

## CAPITULO 03

## TECNICISMO ALGEBRAICO

## Ejercicio 15

Reducir los polinomios siguientes

$$1. -5 + 6 + 2 - 4 = -1$$

$$2. 3a - 8a + 2a + 6a - 5a = -2a$$

$$3. -4a + 11a - 2a - 5a + 8a + 3a = 11a$$

$$4. 2b + 5b - 6b + 3b - 7b = -3b$$

$$5. 7x - 2x + 6x - 10x + 4x - 5x - x = -x$$

$$6. 3c + 5c + 4c - 8c - 6c + c = -c$$

$$7. 3a - 9a + 2b - 4a + 6b + 3b - a = (3a - 9a - 4a - a) + (2b + 6b + 3b) = -10a + 11b$$

$$8. x^2 - 3x + x^2 + 6 + 2x^2 - 5x + 2 - x + 3 = (x^2 + x^2 + 2x^2) + (-3x - 5x - x) + (6 + 2 + 3) = 4x^2 - 9x + 11$$

$$9. x + x^2 + x^3 + 1 - 2x^2 - 5x - 3 + 2x^3 + 6x^2 - 2x = 3x^3 + 5x^2 - 6x - 2$$

$$10. y^4 - y^2 + 6 - 3y^4 + 2y^2 - 8 + y^4 - 3y^2 = -y^4 - 2y^2 - 2$$

$$11. 3ab + 2ac - 2bc + 6ac + 2ab + 4ac - 5ab = 0.ab + 12ac - 2bc = 12ac - 2bc$$

$$12. 3a^2b - 2ab^2 + 5ab^2 + 6a^2b + 3ab^2 - 4a^2b = 5a^2b + 6ab^2$$

$$13. 6abc - 5a^2bc + 3abc - 7ab^2c + 8a^2bc = (6abc + 3abc - 7ab^2c) + (-5a^2bc + 8a^2bc) \\ = 2abc + 3a^2bc$$

$$14. 3ax + 2ay + 6ax - 4ay + ax + 2ay + 3ay = 10ax + 3ay$$

$$15. -4 + 3x^2y^2z^2 + 5 + 2x^2y^2z^2 - 6 - 8x^2y^2z^2 + 6x^2y^2z^2 = 3x^2y^2z^2 - 5$$

$$16. a^3 + 2a^2b - b^3 + 3ab^2 + 2a^3 - 6a^2b + 2b^3 = (a^3 + 2a^3) + (2a^2b - 6a^2b) + (-b^3 + 2b^3) + 3ab^2 \\ = 3a^3 - 4a^2b + b^3 + 3ab^2$$

$$17. x^2 - 2xy + y^2 + 3xy + 4x^2 - 5y^2 + 6xy = 5x^2 + 7xy - 4y^2$$

$$18. \quad 2x^1yz + 6xyz + 1xyz^1 + 3x^1yz - 5xyz - xyz^1 = 5x^1yz + xyz + xyz^1$$

\* corregir la respuesta  $5x^1yz$

$$19. \quad a^2bc + 2ab^2c + 4abc^2 - 5ab^2c + 6a^2bc - 7abc^2$$

$$= (a^2bc + 6a^2bc) + (2ab^2c - 5ab^2c) + (4abc^2 - 7abc^2) = 7a^2bc - 3ab^2c - 3abc^2$$

$$20. \quad z^2 - z^3 + 2z + 4 - 3z^2 + 4z^3 + 8 - 5z = 3z^3 - 2z^2 - 3z + 12$$

$$21. \quad 2a^2b^{-1} + 5a^{-1}b + 6a^{-2}b^{-2} + 6ab^{-1} + 3a^{-1}b = 8ab^{-1} + 8a^{-1}b + 6a^{-2}b^{-2}$$

$$22. \quad 5x^{-2}y + 3xy^{-2} - 2x^{-2}y + 3x^{-2}y + 4xy^{-2} = 6x^{-2}y + 7xy^{-2}$$

$$23. \quad \frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}x^1y^2 - \frac{3}{4}xy + 2x^1y^2$$

$$= (\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4})xy + (\frac{1}{2} + 2)x^1y^2 = -\frac{1}{4}xy + \frac{5}{2}x^1y^2$$

$$24. \quad x^{-2} + x^{-1} + 2x^0 + 3x + 6x^{-1} + 2x^{-2} + 4x^0 = (x^{-2} + 2x^{-2}) + (x^{-1} + 6x^{-1}) + (2x^0 + 4x^0) + 3x$$

$$= 3x^{-2} + 7x^{-1} + 3x + 6$$

$$25. \quad 4x^n y^m + 2x^n y^m - 5x^2 y^m - 3x^n y^m + 6x^2 y^m$$

$$= (4x^n y^m + 2x^n y^m - 3x^n y^m) + (-5x^2 y^m + 6x^2 y^m) = 3x^n y^m + x^2 y^m$$

### Ejercicio 16

Hallar el grado de los monomios siguientes:

1.  $-5$  es de grado 0
2.  $3a$  es de grado 1
3.  $4ab$  es de grado 2
4.  $-x^4z^2$  es de grado 4
5.  $3a/b$  " " " 0
6.  $2a^1bcd^{-3}$  es de grado 1
7.  $3x^2y^1/z^2$  " " " 2
8.  $-5x/yz^3$  es de grado -3
9.  $2a^n b^n$  es de grado  $n+n = 2n$
10.  $x^{n-2}y^{n+2}/z^3$  es de grado  $n-2+n+2-3 = 2n-3$

## Ejercicio 17

Decir los grados de los polinomios siguientes :

1.  $x + x^2$  es de grado 2
2.  $1 + 3x - x^3 + x^2$  es de grado 3
3.  $x^4 - x + 2$  es de grado 4
4.  $x^3 + 2x + 1 + x^{-2}$  de grado 3
5.  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  de grado 3
6.  $x + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$  de grado 4
7.  $2 + x^{-1} + x^{-3}$  de grado 0
8.  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3}$  de grado -2
9.  $3abc + 2a + 3ab^2 + 4ab$  de grado 3
10.  $1 - 2xy + 3x^2y^2 + 6x^3y$  de grado 4

## Ejercicio 18

1. Ordenar los polinomios siguientes en potencias descendentes del factor literal que figura en sus términos :

a.  $3 + x^2 - 4x = x^2 - 4x + 3$

b.  $-3x + 2x^3 - 5x^2 + 8 = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 8$

c.  $2y - 6 + y^4 - 9y^2 + y^3 = y^4 + y^3 - 9y^2 + 2y - 6$

d.  $z + z^3 - z^5 - z^4 + 2z^3 - 8 = -z^5 - z^4 + 2z^3 + z^3 + z - 8$

e.  $x^3 + x^{-1} + 2x^{-2} - 5 + 3x^2 - 2x = x^3 + 3x^2 - 2x - 5 + 2x^{-1} + x^{-2}$

2. Ordenar los siguientes polinomios en potencias ascendentes :

a.  $3x - 5 + x^3 - 6x^2 = -5 + 3x - 6x^2 + x^3$

b.  $x^5 - 2x^3 + 1 - 4x = 1 - 4x - 2x^3 + x^5$

c.  $y^2 - y^4 + y^3 + 2 + y = 2 + y + y^2 + y^3 - y^4$

d.  $z^6 - z^4 + 2z^5 - 3 + 2z - z^2 = -3 + 2z - z^2 - z^4 + 2z^5 + z^6$

e.  $z^{-1} + 6 + z^2 + 3z^{-2} + z = 3z^{-2} + z^{-1} + 6 + z + z^2$

3. Ordenar los siguientes polinomios homogéneos en potencias descendentes de x:

a.  $xy + y^2 + x^2 = x^2 + xy + y^2$

b.  $x^2y + 2xy^2 + x^3 + y^3 = x^3 + x^2y + 2xy^2 + y^3$

$$c. \quad x^4 - 6a^2x^3 + 4a^3x^2 - 2a^4x + a^5 = x^4 + 4a^2x^3 - 6a^3x^2 - 2a^4x + a^5$$

$$d. \quad b^5 + b^4x + x^5 + x^4b - x^3b^4 + x^2b^3 = x^5 - b^4x^4 - b^3x^3 + b^2x^2 + b^4x - b^5$$

$$e. \quad 4x^3y - 5xy^4 + x^3 - y^3 + x^2y^4 = x^3 + 4x^2y - 5xy^2 - y^3 + x^2y^4$$

### Ejercicio 19

I. Decir si las expresiones algebraicas siguientes son enteras o Fraccionarias:

1.  $-3x^2yz^2$  entera

6.  $x^2 + 3x - 8 + x^{-1} + 3x^{-2}$  Fraccionaria

2.  $xy + yz + zx$  entera

7.  $1/x + 3 + x^2$  Fraccionaria

3.  $4xy^2z^{-1}$  Fraccionaria

8.  $y^{-2}$  Fraccionaria

4.  $\frac{ac + bd}{mn}$  Fraccionaria

9.  $z^{-3} + z^3$  Fraccionaria

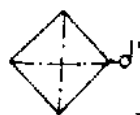
5.  $x^3 - 5x^2 + 6x + 8$  entera

10.  $(x^2 + yz)(y^2 + xz)$  entera

II. Dar una fórmula que exprese que:

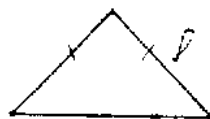
1. El área de un rombo se obtiene tomando la mitad del producto de sus diagonales.

$$A = \frac{1}{2} d d' \quad \begin{cases} d \text{ -- diagonal menor} \\ d' \text{ -- diagonal mayor} \end{cases}$$



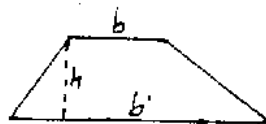
2. El área de un triángulo equilátero se obtiene multiplicando por  $\sqrt{3}/4$  el cuadrado de su lado

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \quad l \text{ -- lado del cuadrado}$$



3. El área de un trapecio se obtiene multiplicando la semisuma de las bases por su altura.

$$A = \frac{(b + b')}{2} h$$



4. El volumen de un prisma se obtiene multiplicando el área de su base por la altura del prisma.

$$V = B h$$





5. El área lateral de un cilindro se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia de la base por la altura del cilindro.

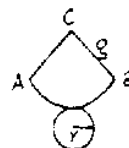
$$A = Ch \text{ como } C = 2\pi r$$

$$A = 2\pi r h$$



6. El área lateral de un cono se obtiene multiplicando  $\pi$  por el radio de la base y por la generatriz del cono.

$$A = \pi r g \text{ superficie lateral}$$



7. El área total de un cono se obtiene multiplicando  $\pi$  por el radio de la base y por la suma de dicho radio y de la generatriz del cono.

$$\text{Área lateral } A = \pi r g$$

$$\text{Área de la base } A = \pi r^2$$

$$\text{Área total } A_T = \pi r^2 + \pi r g \longrightarrow A = \pi r (r + g)$$

8. El área de una corona se obtiene multiplicando  $\pi$  por la diferencia entre los cuadrados de los radios de las circunferencias que limitan la corona.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A = \pi (R^2 - r^2)$$



9. La energía cinética de un cuerpo es igual a la mitad del producto de su masa por el cuadrado de su velocidad.

$$E = 1/2 m v^2$$

10. La intensidad de una corriente se obtiene dividiendo la fuerza electromotriz por la resistencia del circuito (ley de Ohm).

$$I = \frac{E}{R} \text{ ley de Ohm}$$

- III Hallar el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las letras que se indican:

1.  $x^2 + 2z$  para  $x=1$ ;  $y=2$ ;  $z=3 \longrightarrow (1)^2 + (2)(3) = 7$

2.  $x^2 - y^2 + z^2$  para  $x=2$ ;  $y=-3$ ;  $z=-1 \longrightarrow (2)^2 - (-3)^2 + (-1)^2 = -4$

3.  $xy + z/xy - z$  para  $x=3$ ;  $y=2$ ;  $z=1 \longrightarrow 3(2) + 1/3(2) - 1 = 7/5 = 1,4$

4.  $a^2 - b^3 + c^2 - d^2$  para  $a=0; b=2; c=-1; d=-1 \rightarrow 0^2 - (2)^3 + (-1)^2 - (-1)^2 = -7$
5.  $(a+b)(c+d) - a^2$  para  $a=1; b=-2; c=3; d=-4 \rightarrow (1-2)(3-4) - 1^2 = 0$
6.  $x^2 - 2xy + y^2$  para  $x=-3; y=-1 \rightarrow (-3)^2 - 2(-3)(-1) + (-1)^2 = 4$
7.  $x^3 + x^2y - y^3$  para  $x=1; y=-2 \rightarrow (1)^3 + (1)^2(-2) - (-2)^3 = 7$
8.  $x^5 - 2x^3 + x + 4$  para  $x=2 \rightarrow (2)^5 - 2(2)^3 + 2 + 4 = 22$
9.  $x^3 + 3x^2 - 5x + 8$  para  $x=1/2 \rightarrow (1/2)^3 + 3(1/2)^2 - 5(1/2) + 8 = 51/8 = 6,375$   
poner una coma en la respuesta del texto
10.  $a^2 + b^3 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$  para  $a=4; b=3; c=2$   
 $4^2 + 3^2 + 2^2 - 2(4)(3) - 2(4)(2) + 2(3)(2) = 1$
11.  $(4a+3b)(4a-3b) - 16a^2b^2$  para  $a=1; b=-1$   
 $[4(1)+3(-1)][4(1)-3(-1)] - 16(1)^2(-1)^2 = -9$
12.  $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$  para  $a=1; b=2; c=3$   
 $(1+2+3)(1-2+3)(1+2-3)(2+3-1) = (6)(-2)(0)(4) = 0$
13.  $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$  para  $x=1; y=-2; z=3$   
 $\frac{1(-2)}{3} + \frac{(-2)(3)}{1} + \frac{3(1)}{-2} + (1)^{-1} + (-2)^{-1} + (3)^{-1} = -\frac{22}{3}$
14.  $7x^2y^3 - 2x^0y^2$  para  $x=-3; y=2 \rightarrow 7(-3)^2(2)^3 - 2(-3)^0(2)^2 = -1/8$
15.  $2a^2b^m - 3a^n b^2$  para  $a=-2; b=3; m=2; n=3$   
 $2(-2)^2(3)^2 - 3(-2)^3(3)^2 = 72 + 216 = 288$
16.  $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$  para  $x=0; y=-1; z=1$   
 $(0+1)^2 + (-1-1)^2 + (1-0)^2 = 1 + 4 + 1 = 6$
17.  $(x-y) + (y-z)^2 - (y+z)^3$  para  $x=1; y=-2; z=0$   
 $(1+2) + (-2-0)^2 - (-2+0)^3 = 3 + 4 + 8 = 15$
18.  $\frac{2a^3 - b^2 + c^2}{c} + \frac{3a-b}{b}$  para  $a=b=c=2$   
 $\frac{2(2)^3 - (2)^2 + (2)^2}{2} + \frac{3(2)-2}{2} = 4 + 2 = 6$
19.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  para  $x=-1; y=-2; z=3 \rightarrow (-1)^3 + (-2)^3 + (3)^3 - 3(-1)(-2)(3) = 0$
20.  $\frac{ab+cd}{ab-cd} + a^x - x^a$  para  $a=2; b=-1; c=-2; d=0.2; x=-2$

$$\frac{2(-1) + (-2)(0,2)}{2(-1) - (-1)(0,2)} + (2)^{-2} - (-2)^1 = \frac{-2,4}{-1,6} + \frac{1}{4} - 4 = -2,25$$

IX. En las fórmulas siguientes, determinar el valor del primer miembro para los valores indicados de las letras que contienen:

1.  $i = \frac{crt}{100}$  para  $c = 2400 \$$ ;  $r = 5\%$ ;  $t = 3$  años  $\rightarrow i = \frac{2400(5)(3)}{100}$ ;  $i = 360 \$$

2.  $A = \frac{1}{2}bh$  para  $b = 10,5$  m,  $h = 6$  m.  $\rightarrow A = \frac{1}{2}(10,5)(6)$ ;  $A = 31,5$  m<sup>2</sup>

3.  $A = \pi r^2$  para  $\pi = 22/7$ ;  $r = 3,5$  cm  $\rightarrow A = 22/7(3,5)^2$ ;  $A = 38,5$  cm<sup>2</sup>

4.  $V = abc$  para  $a = 2$  m;  $b = 8$  dm;  $c = 20$  cm.  $\rightarrow V = 20(8)(2)$ ;  $V = 320$  dm<sup>3</sup>  
Transformando las unidades a decímetros dm

5.  $V = \pi r^2 h$  para  $\pi = 3,14$ ;  $r = 8$  cm;  $h = 5$  cm  $\rightarrow V = (3,14)(8)^2(5)$ ;  $V = 1004,8$  cm<sup>3</sup>

6.  $e = vt$  para  $v = 20$  m/seg;  $t = 2$  min = 120 s  $\rightarrow e = 20(120)$ ;  $e = 2400$  m no espies e.

7.  $e = 1/2 gt^2$  para  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;  $t = 4$  s  $\rightarrow e = 1/2(10)(4)^2$ ;  $e = 80$  m

8.  $A = \pi r(r + g)$  para  $\pi = 3,14$ ;  $r = 4$  cm;  $g = 6$  cm  $A = 3,14(4)(4 + 6)$ ;  $A = 125,6$  cm<sup>2</sup>

9.  $V = 4/3 \pi r^3$ ; para  $\pi = 3,1416$ ;  $r = 10$  cm  $V = 4/3(3,1416)(10)^3$ ;  $V = 4188,8$  cm<sup>3</sup>

10.  $I = \frac{E}{R}$ , para  $E = 200$  voltios,  $R = 0,5$  ohmios ( $I$  resultará expresada en amperios).

$I = 200/0,5$ ;  $I = 400$  amperios

### Ejercicio 20 (REPASO).

1. En los ejemplos siguientes señalar los que sean monomios:

a.  $7b$ ; b.  $-5$ ; c.  $a+1$ ; d.  $5x/4$  los monomios son los literales a), b) y d)

2. En los ejemplos siguientes señalar los que sean binomios:

a.  $a-bc$ ; b.  $3+2$ ; c.  $xy$ ; d.  $x + \frac{1}{x}$  binomios son a), b) y d)

3. En los ejemplos siguientes señalar los trinomios:

a)  $xyz$ ; b)  $xy+z$ ; c)  $x-y+z$ ; d)  $x+x^{-1}+x^{-2}$  Trinomios son c) y d)

4. Indicar cuáles son los términos de los polinomios siguientes:

a)  $-2x^3 + 5x^2 - 3x - 4$  los términos son:  $-2x^3$ ;  $5x^2$ ;  $-3x$ ;  $-4$

VI. Hallar el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las letras que se indican:

1.  $x^3 - 2x^2 + 5x - 8$  para  $x = -2$        $(-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) - 8 = -34$
2.  $\frac{a^2 - 3a + 4}{b^2 - 5b + 1}$  para  $a = 1, b = 2$        $\frac{1^2 - 3(1) + 4}{2^2 - 5(2) + 1} = -\frac{2}{5}$
3.  $(a+x)(b-x) - abx^2$  para  $a = -1, b = 2, x = -3$        $(-1-3)[2-(-3)] - (-1)(2)(-3)^2 = -2$
4.  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$  para  $x = 2, y = -1$        $2^3 - 3(2)^2(-1) + 3(2)(-1)^2 - (-1)^3 = 27$
5.  $3a(b+c) + 2b(a+c) - 3c(a+b)$  para  $a = b = -1, c = -2$   
 $3(-1)(-1-2) + 2(-1)(-1-2) - 3(-2)(-1-1) = 9 + 6 - 12 = 3$
6.  $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} - \frac{1}{9}xyz$  para  $x = 2, y = 3, z = -4$   
 $(2+3)/-4 + (3-4)/2 + (-4+2)/3 - 1/9(2)(3)(-4) = 1/4$
7.  $4a^{1/2}b^{-1} - 3a^{-2/3}b^{1/3}$  para  $a = 3, b = 6$        $4(3)^{1/2}(6)^{-1} - 3(3)^{-2/3}(6)^{1/3} = 36/36 - 648/9 = -71$
8.  $2x^2y^2 + 3x^0y^{-1} + 4x^{-2}y^0$  para  $x = 2, y = 3$        $2(2)^2(3)^2 + 3(2)^0(3)^{-1} + 4(2)^{-2} = 74$
9.  $\frac{ab - cd + ac}{ab + cd - bd}$  para  $a = \frac{1}{2}, b = 4, c = -1, d = -2$        $\frac{1/2(4) - (-1)(-2) + 1/2(-1)}{1/2(4) + (-1)(-2) - 4(-2)} = -\frac{1}{24}$
10.  $(a+b+c)^3 + (a-b+c)^2 - (a+b-c)(a-b-c)$  para  $a = -1, b = -2, c = -3$   
 $(-1-2-3)^3 + (-1-(-2)-3)^2 - (-1-2-(-3))(-1-(-2)-(-3)) = -216 + 4 - 0 = -212$

## CAPITULO 04

## ADICION Y SUSTRACCION DE EXPRESIONES

## ALGEBRAICAS ENTERAS

I. Sumar los monomios siguientes:

1.  $3a, 2b, -5c = 3a + 2b - 5c$
2.  $x, -y, 2z, -3u = x - y + 2z - 3u$
3.  $-3a, 2b, a, b = -3a + 2b + a + b = -2a + 3b$
4.  $2x, 2y, -2z, x, z = 2x + 2y - 2z + x + z = 3x + 2y - z$
5.  $3x^2, y, -2x^2, 3y = 3x^2 + y - 2x^2 + 3y = x^2 + 4y$
6.  $5xy, -2, -3xy, +4 = 5xy - 2 - 3xy + 4 = 2xy + 2$
7.  $a^2b, -ab^2, 2ab^2, -3a^2b = a^2b - ab^2 + 2ab^2 - 3a^2b = -2a^2b + ab^2$
8.  $2a^2, -5a^2, b, 3b^2, 2b = 2a^2 - 5a^2 + b + 3b^2 + 2b = -3a^2 + 3b + 3b^2$
9.  $x, -2y, -3x, -5x, 6y = x - 2y - 3x - 5x + 6y = -7x + 4y$
10.  $3a, -2xy, -2a, 4xy = 3a - 2xy - 2a + 4xy = a + 2xy$
11.  $x^2, -2y^2, 3xy, -3x^2, -xy, y^2, 4x^2, 5y^2 = x^2 - 2y^2 + 3xy - 3x^2 - xy + y^2 + 4x^2 + 5y^2 = 2x^2 + 2xy + 4y^2$
12.  $a, -2b, 3c, b, -2d, -3a, 4b, -2c, -5a, d, 2c = a - 2b + 3c + b - 2d - 3a + 4b - 2c - 5a + d + 2c = -7a + 3b + 3c - d$
13.  $x^2, -y^2, -z^2, 2y^2, 2x^2, 2z^2, -3y^2, -4x^2, 5z^2 = x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2z^2 - 3y^2 - 4x^2 + 5z^2 = -x^2 - 2y^2 + 6z^2$
14.  $x^3, -4x^2y, -2x^3y^2, 3xy^2, x^2y, x^3, 2y^3 = x^3 - 4x^2y - 2x^3y^2 + 3xy^2 + x^2y + x^3 + 2y^3 = -3x^2y + 3xy^2 + 3y^3$
15.  $a^2bc, ab^2c, abc^2, -2a^2bc, 2abc^2, -3ab^2c = a^2bc + ab^2c + abc^2 - 2a^2bc + 2abc^2 - 3ab^2c = -a^2bc - 2ab^2c + 3abc^2$

II. Sumar los polinomios siguientes:

1.  $a - b + c, a^2 + b^2 + c^2, ab + 2 = a - b + c + a^2 + b^2 + c^2 + ab + 2$
2.  $2a + 3b - c, -3a + 2b + c, a - 2b - 2 = 2a + 3b - c - 3a + 2b + c + a - 2b - 2 = 3b - 2$
3.  $x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 2$   

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4 \\ 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9x + 2 \end{array}$$
4.  $3 - 5x + x^2$   

$$\begin{array}{r} 4 + x + x^2 + x^3 \\ -3 + x + x^3 \\ 4 - 3x + 2x^2 + 2x^3 \end{array}$$
5.  $a^2 - 2ax + x^2$   

$$\begin{array}{r} 3a^2 + ax - 2x^2 \\ -a^2 + 3ax + 4x^2 \\ 3a^2 + 2ax + 3x^2 \end{array}$$
6.  $y^3 - 2y^2 + 3y + 1$   

$$\begin{array}{r} 2y^3 - 3y^2 - 4y - 2 \\ y^2 + y + 5 \\ 4y^3 + y^2 - 2y - 6 \\ 7y^3 - 3y^2 - 2y - 2 \end{array}$$
7.  $3x^2 + x + 1 + 2x^{-1} + x^{-2}$   

$$\begin{array}{r} -x^2 + 4x - 2 - 3x^{-1} + 2x^{-2} \\ 2x^2 + 5x - 1 - x^{-1} + 3x^{-2} \end{array}$$
8.  $x^3 + 1, x^2 - 1, x^4 + x - 2, x^3 - 2x, 2x^4 - 3 = x^3 + 1 + x^2 - 1 + x^4 + x - 2 + x^3 - 2x + 2x^4 - 3 = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 5$

9. 
$$\begin{array}{r} X^{n+1} + 3X^{n+1} + 2X^n - X^{n-1} \\ 2X^{n+1} - X^{n+1} - 4X^n + X^{n-1} \\ \hline 3X^{n+2} + 2X^{n+1} - 2X^n \end{array}$$
10. 
$$\begin{array}{r} a^{2n} - 3a^n b^n + b^{2n} \\ - a^{2n} + 2a^n b^n + b^{2n} \\ \hline 3a^{2n} + a^n b^n + 3b^{2n} \\ \hline 3a^{2n} + 6b^{2n} \end{array}$$
11. 
$$\begin{array}{r} a - 2b + 3c + d \\ - a + 2b + c - 2d \\ \hline 3a + b + c + d \\ \hline 3a + b + 5c \end{array}$$
12. 
$$\begin{array}{r} X^2 - 5XY + Y^2 \\ - 2X^2 + XY - 2Y^2 \\ \hline 3X^2 + 2XY + 4Y^2 \\ - X^2 - XY + 3Y^2 \\ \hline X^2 - 3XY + 6Y^2 \end{array}$$
13. 
$$\begin{array}{r} X^3 - 5X^2 + 2X + 8 \\ - X^3 + 4X^2 - 4X + 6 \\ \hline 3X^3 - X^2 + 6X - 5 \\ \hline X^3 + 2X^2 - 4X + 2 \\ \hline 4X^3 + 11 \end{array}$$
14. 
$$\begin{array}{r} a^3 - b^3 + c^3 - d^3 \\ - a^3 - b^3 + c^3 + d^3 \\ \hline a^3 + 2b^3 - c^3 - d^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \\ \hline -a^3 - c^3 \\ \hline a^3 + b^3 + c^3 - d^3 \end{array}$$
15. 
$$\begin{array}{r} 8a^{5/2} - 12a^{4/2} + 6a^{1/2} \\ - 6a^{5/2} + 7a^{4/2} - 4a^{3/2} - 2a^{3/2} \\ \hline 3a^{5/2} - 5a^{4/2} - 3a^{3/2} + 7a^{3/2} \\ \hline 5a^{5/2} - 11a^{4/2} - a^{3/2} + 5a^{3/2} \end{array}$$
16. 
$$\begin{array}{r} 1,5X^3 - 2,3X^2 + 4,1X - 8,2 \\ - 0,5X^3 + 3,6X^2 - 3,4X + 1,3 \\ \hline - 2,5X^3 + 1,2X^2 + 3,1X - 4,6 \\ \hline 3,0X^3 - 2,1X^2 + 4,6X - 7,1 \\ \hline 1,5X^3 + 0,4X^2 + 8,4X - 18,6 \end{array}$$
17. 
$$\begin{array}{r} 1/2 a^3 - 3/4 a^2 b + 1/4 a b^2 - b^3 \\ 3/2 a^3 - 1/4 a^2 b + 1/2 a b^2 + 3/4 b^3 \\ \hline - 1/4 a^3 + 1/2 a^2 b - 3/2 a b^2 + 1/4 b^3 \\ \hline 7/4 a^3 - 1/2 a^2 b - 3/4 a b^2 \end{array}$$
18. 
$$\begin{array}{r} X^2 - 1,5X + 2 - 3X^{-1} + 4X^{-2} \\ 1/2 X^2 + 2,3X + 3 - 2X^{-1} + X^{-2} \\ \hline - 3/2 X^2 - 1,2X - 1 + 4X^{-1} - 5X^{-2} + 2X^{-3} \\ \hline - 0,4X + 4 - X^{-1} + 2X^{-3} \end{array}$$
19. 
$$\begin{array}{r} a^n - 2a^{n-1}b + 4a^{n-2}b^2 + 3b^n \\ - 2a^n + 4a^{n-1}b - 5a^{n-2}b^2 + 4b^n \\ \hline - a^n - 3a^{n-1}b + 2a^{n-2}b^2 + 2b^n \\ \hline - 2a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + 5b^n \end{array}$$
20. 
$$\begin{array}{r} X^p - 2X^p Y^q + Y^q + Z^m \\ - 3X^p - 4X^p Y^q - 2Y^q + 3Z^m \\ \hline - 2X^p + 5X^p Y^q - 3Y^q + 2Z^m \\ \hline - X^p - 2X^p Y^q + 4Y^q - 3Z^m \\ \hline - 5X^p - 3X^p Y^q + 3Z^m \end{array}$$

## Ejercicio 22

I. De :  $7a - 4a = 3a$ 1.  $7a$  restar  $4a \rightarrow 7a - 4a = 3a$  2.  $3a$  restar  $6a \rightarrow 3a - 6a = -3a$

3.  $-5a$  restar  $2a \longrightarrow -5a - 2a = -7a$   
 4.  $4a$  restar  $-3a \longrightarrow 4a + 3a = 7a$   
 5.  $-4a$  restar  $-5a \longrightarrow -4a + 5a = a$   
 6.  $-2a$  restar  $-8a \longrightarrow -2a + 8a = 6a$

7.  $2x$  restar  $3y \longrightarrow 2x - 3y$   
 8.  $-3x$  restar  $-4y \longrightarrow -3x + 4y$   
 9.  $-5x^2$  restar  $4x^2 \longrightarrow -5x^2 - 4x^2 = -9x^2$   
 10.  $3ab^2$  restar  $-2ab^2 \longrightarrow 3ab^2 + 2ab^2 = 5ab^2$

Restar:

11.  $-2b$  de  $6b \longrightarrow 6b + 2b = 8b$   
 12.  $4b$  de  $-3b \longrightarrow -3b - 4b = -7b$   
 13.  $-4c^2$  de  $-5c^2 \longrightarrow -5c^2 + 4c^2 = -c^2$   
 14.  $-3a$  de  $2b \longrightarrow 2b + 3a$   
 15.  $8x$  de  $-6y \longrightarrow -6y - 8x$   
 16.  $-5z^3$  de  $-3z^3 \longrightarrow -3z^3 + 5z^3 = 2z^3$   
 17.  $-xy$  de  $xy \longrightarrow xy + xy = 2xy$   
 18.  $3xyz$  de  $-2xyz \longrightarrow -2xyz - 3xyz = -5xyz$   
 19.  $-x^2y$  de  $xy^2 \longrightarrow xy^2 + x^2y$   
 20.  $4x^n$  de  $6x^n \longrightarrow 6x^n - 4x^n = 2x^n$

En el texto en lugar de poner "de" se debe escribir restar

De:

21.  $a - b$  restar  $c - d \longrightarrow a - b - c + d$   
 22.  $x + y + z$  restar  $u - v + w \longrightarrow x + y + z - u + v - w$   
 23.  $a - b$  restar  $a + b \longrightarrow a - b - a - b = -2b$   
 24.  $a + b$  restar  $a - b \longrightarrow a + b - a + b = 2b$   
 25.  $a - b + c + d$  restar  $a + b - c - d \longrightarrow a - b + c + d - a - b - c - d = -2b - 2d$   
 26.  $2x - 3y - 2z$  restar  $x + 2y + 3z \longrightarrow 2x - 3y - 2z - x - 2y - 3z = x - 5y - 5z$   
 27.  $3x^2 - 5x + 4$  restar  $x^2 + 2x + 1 \longrightarrow 3x^2 - 5x + 4 - x^2 - 2x - 1 = 2x^2 - 7x + 3$   
 28.  $x^3 - 6x^2 + 2x - 5$  restar  $-2x^3 + 3x^2 - 6x - 4 \longrightarrow x^3 - 6x^2 + 2x - 5 + 2x^3 - 3x^2 + 6x + 4 = 3x^3 - 9x^2 + 8x - 1$   
 29.  $x^3 - 2x^2 + 5x - 2$  restar  $x^2 - 4x - 1 \longrightarrow x^3 - 2x^2 + 5x - 2 - x^2 + 4x + 1 = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$   
 30.  $2x^2 - 3x + 1$  restar  $x^3 - x^2 + 3x - 8 \longrightarrow 2x^2 - 3x + 1 - x^3 + x^2 - 3x + 8 = -x^3 + 3x^2 - 6x + 9$

Restar:

31.  $x^4 + x^2 + 2$  de  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \longrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 - x^4 - x^2 - 2 = -x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 4$   
 32.  $x^3 + x^2 - x + 1$  de  $2x^2 + 3x + 4 \longrightarrow 2x^2 + 3x + 4 - x^3 - x^2 + x - 1 = -x^3 + x^2 + 4x + 3$   
 33.  $y^5 - 2y^3 + 4y^2 - 6$  de  $y^5 + y^4 + 3y^2 + 4y + 5 \longrightarrow y^5 + y^4 + 3y^2 + 4y + 5 - y^5 + 2y^3 - 4y^2 + 6 = y^4 + 2y^3 - y^2 + 4y + 11$   
 34.  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  de  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \longrightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = -6a^2b - 2b^3$   
 35.  $x^4 + y^4 - 2x^3y + 3xy^3$  de  $x^3y - xy^3 + y^4 - x^4 \longrightarrow x^3y - xy^3 + y^4 - x^4 - x^3y + x^4y^3 - y^4 + 2x^3y - 3xy^3 = -2x^4 + 3x^3y - 4xy^3$   
 36.  $5 + 2x + x^2 - x^4$  de  $2 - 3x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 \longrightarrow 2 - 3x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 - 5 - 2x - x^2 - x^4 = -3 - 5x + x^2 + 2x^3 + 3x^4$   
 37.  $a^2b + ac^2 + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$  de  $a^2b + b^2c + c^2a \longrightarrow a^2b + b^2c + c^2a - a^2b - b^2c - b^2a - c^2a - c^2b = -b^2a - c^2b$   
 38.  $3x^2yz - 5xy^2z + 6xyz^2$  de  $xy^2z - 4x^2yz - 3xyz^2 \longrightarrow xy^2z - 4x^2yz - 3xyz^2 - 3x^2yz + 5xy^2z - 6xyz^2 = 6xy^2z - 7x^2yz - 9xyz^2$   
 39.  $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$  de  $x^5 + 2x^3y^2 + 2xy^4 + y^5 \longrightarrow x^5 + 2x^3y^2 + 2xy^4 + y^5 - x^5 - x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 = -x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4$   
 40.  $2x^{n+2} - 5x^{n+1} + 3x^n + x^{n-1}$  de  $3x^{n+2} - 2x^{n+1} - 6x^n + 2x^{n-1} \longrightarrow 2x^{n+2} - 5x^{n+1} + 3x^n + x^{n-1} - 3x^{n+2} + 2x^{n+1} + 6x^n - 2x^{n-1} = -x^{n+2} + 3x^{n+1} + 9x^n + x^{n-1}$

II. Dados los polinomios siguientes, de la suma de los tres primeros restar el último:

$$\begin{aligned} &5x^2 - 2xy + y^2 - 3xz + 4yz - z^2 \\ &x^2 + 3xy - y^2 + 2xz - 2yz + 2z^2 \\ &-3x^2 - xy + 3y^2 - 4xz + 3yz + z^2 \\ &2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz - 2yz - 2z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5x^2 - 2xy + y^2 - 3xz + 4yz - z^2 \\ &x^2 + 3xy - y^2 + 2xz - 2yz + 2z^2 \\ &-3x^2 - xy + 3y^2 - 4xz + 3yz + z^2 \\ &-2x^2 - 3xy + 2y^2 - 3xz + 2yz + 2z^2 \\ \hline &x^2 - 3xy + 5y^2 - 8xz + 7yz + 4z^2 \end{aligned}$$

III. Dados los polinomios siguientes, de la suma de los dos primeros restar la suma de los dos últimos:

$$\begin{aligned} &3x^4 - 3ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 \\ &-2x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4 \\ &-3x^4 + 4ax^3 - 2a^2x^2 - 3a^3x + a^4 \\ &2x^4 - 2ax^3 + 4a^2x^2 + 6a^3x - 3a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3x^4 - 3ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 \\ &-2x^4 - ax^3 - 3a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4 \\ &3x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x - a^4 \\ &-2x^4 + 2ax^3 - 4a^2x^2 - 6a^3x + 3a^4 \\ \hline &2x^4 - 6ax^3 - 3a^2x^2 + a^4 \end{aligned}$$

IV. Dados los polinomios siguientes, del primero restar la suma de los tres últimos:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\ &x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \\ &x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \\ &-x^2 + y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\ &-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \\ &-x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \\ &x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz \\ \hline &2z^2 + 4xy + 4xz \end{aligned}$$

### Ejercicio 23

Efectuar las operaciones indicadas (suprimir paréntesis):

- $a + (b - c) = a + b - c$
- $a - (b - c) = a - b + c$
- $(a - b) + (c - d) = a - b + c - d$
- $(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$  (corregir el signo en la respuesta)
- $(2a - 3b) + (a + b) = 2a - 3b + a + b = 3a - 2b$
- $(2a - 3b) - (a + b) = 2a - 3b - a - b = a - 4b$
- $(x - 3) + (x - 2) = x - 3 + x - 2 = 2x - 5$
- $(2x - 4) - (x - 2) = 2x - 4 - x + 2 = x - 2$
- $(x^2 - 5x + 1) + (3x - 1) = x^2 - 5x + 1 + 3x - 1 = x^2 - 2x$
- $(x^2 - 5x + 1) - (3x - 1) = x^2 - 5x + 1 - 3x + 1 = x^2 - 8x + 2$
- $a - (3a + 2b) + (a - b + c) = a - 3a - 2b + a - b + c = -a - 3b + c$
- $(x + y + z) - (x - y - z) + (-x + y - z) - (x - y + z) = x + y + z - x + y + z - x + y - z - x + y - z = -2x + 4y$



13.  $(x^3 - 5x + 2) + (x^2 + x - 1) - (x^3 - x^2 + 1) - (x^3 + x^2 + x + 2) = x^3 - 5x + 2 + x^2 + x - 1 - x^3 + x^2 - 1 - x^3 - x^2 - x - 2$   
 $= -x^3 + x^2 - 5x - 2$
14.  $y^2 - (x^2 - z^2) + x^2 - (y^2 + z^2) - z^2 + (x^2 - y^2) = y^2 - x^2 + z^2 + x^2 - y^2 - z^2 - z^2 + x^2 - y^2 = x^2 - y^2 - z^2$
15.  $(a - b + c - d) - (a + b - c + d) + (a + b + c - d) = a - b + c - d - a - b + c - d + a + b + c - d = a - b + 3c - 3d$
16.  $(3a^2 - 4ax + x^2) - (a^2 - 2ax + x^2) - (a^2 + ax + x^2) = 3a^2 - 4ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2 - a^2 - ax - x^2 = a^2 - 3ax - x^2$
17.  $x^3 - (x^2 + y^2 - z^2) + y^2 + (x^2 - y^2 + z^2) - z^2 = x^3 - x^2 - y^2 + z^2 + y^2 + x^2 - y^2 + z^2 - z^2 = x^3 - y^2 + z^2$
18.  $(ab - ac + bc) - (ab + ac + bc) - (-ab + ac - bc) = ab - ac + bc - ab - ac - bc + ab - ac + bc = ab - 3ac + bc$
19.  $(u^2 + uv + v^2) - (v^2 + vw + w^2) + (w^2 + uw + u^2) = u^2 + uv + v^2 - v^2 - vw - w^2 + w^2 + uw + u^2 = 2u^2 + uv + vw + uw$
20.  $a - (b - c + d + e) + (a - b + c - d) - (d - e + a) = a - b + c - d - e + a - b + c - d - d + e - a = a - 2b + 2c - 3d$

### Ejercicio 24

- Encerrar en un paréntesis precedido del signo + los tres últimos términos de cada una de las expresiones siguientes:
 

a.- $a + b - c + d = a + (b - c + d)$	d.- $y^3 + y^2 + y - 1 = y^3 + (y^2 + y - 1)$
b.- $a + x + x^2 - x^3 = a + (x + x^2 - x^3)$	e.- $a^2 + b^2 + c^2 - 2cd + d^2 = a^2 + b^2 + (c^2 - 2cd + d^2)$
c.- $x - y + z - u = x + (-y + z - u)$ Corregir la respuesta no es -z es +z	
- Encerrar en un paréntesis precedido del signo - los tres últimos términos de cada una de las expresiones siguientes:
 

a.- $a - b - c + d = a - (b + c - d)$	d.- $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
b.- $4 - x + x^2 - 2x^3 = 4 - (x - x^2 + 2x^3)$	e.- $m^2 + n^2 + 2pq - p^2 - q^2 = m^2 + n^2 - (p^2 - 2pq + q^2)$
c.- $x^2 - y^2 - 2yz - z^2 = x^2 - (y^2 + 2yz + z^2)$	
- Incluir en un paréntesis precedido del signo + los términos de los polinomios siguientes que contengan a o b y en otro paréntesis precedido del signo - los demás términos:
 

a.- $ax + ay - cx - cy = (ax + ay) - (cx + cy)$	b.- $a^2 - 2ab - c^2 - d^2 + 2cd + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)$
c.- $4a^2 + 4ab + b^2 - 9x^2 + 6x - 1 = (4a^2 + 4ab + b^2) - (9x^2 - 6x + 1)$	
d.- $ax - bx + abx - cx + dx - cdx = (ax - bx + abx) - (cx - dx + cdx)$	
e.- $a^2 - x^2 - y^2 + b^2 + 2ab - 2xy = (a^2 + 2ab + b^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$	
f.- $ax - ay + az - mx + my - mz = (ax - ay + az) - (mx - my + mz)$	
g.- $bp - bq + br - br - cp + cq - cr + cs = (bp - bq + br - br) - (cp - cq + cr - cr)$	
h.- $10y - 25 - 6ab + 9b^2 + a^2 - y^2 = (a^2 - 6ab + 9b^2) - (y^2 - 10y + 25)$	
i.- $12xy - 4y^2 - 9x^2 - 10ab + 25a^2 + b^2 = (25a^2 - 10ab + b^2) - (9x^2 - 12xy + 4y^2)$	
j.- $a^2x - c^2x + b^2y - d^2y + abz - cdz = (a^2x + b^2y + abz) - (c^2x + d^2y + cdz)$	

## Ejercicio 15

Simplificar las expresiones siguientes suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos semejantes:

1.  $a - [b - (a - c)] = a - [b - a + c] = a - b + a - c = 2a - b - c$
2.  $a - b + [(a + 2b) - (2a - b)] = a - b + [a + 2b - 2a + b] = a - b + a + 2b - 2a + b = 2b$
3.  $x - y - [x - (y + z) + z] = x - y - [x - y - z + z] = x - y - x + y + z - z = 0$
4.  $[(2x - 5) - (-3x - 1)] + [(2x - 3) - x] = [2x - 5 + 3x + 1] + [2x - 3 - x]$   
 $= 2x - 5 + 3x + 1 + 2x - 3 - x = 6x - 7$
5.  $2a - \{3b - [2c - (a + b)]\} = 2a - \{3b - [2c - a - b]\} = 2a - \{3b - 2c + a + b\}$   
 $= 2a - 3b + 2c - a - b = a - 4b + 2c$
6.  $x - (y + z) - \{z - (y - x) + y - [x + (y - z)]\} = x - y - z - \{z - y + x + y - [x + y - z]\}$   
 $= x - y - z - \{z - y + x + y - x - y + z\} = x - y - z - z + y - x - y + x + y - z = x - 3z$
7.  $a - \{2b - [a - (3b - c) + 2c - (a - b - c)]\} = a - \{2b - [a - 3b + c + 2c - a + b + c]\}$   
 $= a - \{2b - a + 3b - c - 2c + a - b - c\} = a - 2b + a - 3b + c + 2c - a + b + c = a - 4b + 4c$
8.  $a^3 - [a^2 - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2 + 2ab] = a^3 - [a^2 - a^2 + 2ab - b^2 - b^2 + 2ab]$   
 $= a^3 - a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2ab = a^3 - 4ab + 2b^2$
9.  $3xy^2 - (3x^2y - x^3) + [y^3 + (3x^2y - 3xy^2 + y^3) - x^3] = 3xy^2 - 3x^2y + x^3 + y^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - x^3$   
 $= 3xy^2 - 3x^2y + x^3 + y^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - x^3 = 2y^3$
10.  $4a - \{3a - b - c + 2c - [3a + (a - b + 2c)]\} = 4a - \{3a - b - c + 2c - [3a + a - b + 2c]\}$   
 $= 4a - \{3a - b - c + 2c - 3a - a + b - 2c\} = 4a - 3a + b + c - 2c + 3a + a - b + 2c = 5a + c$
11.  $2a - (3b + c) - \{c - (a - b) + b - [a - (b + c)]\} = 2a - 3b - c - \{c - a + b + b - [a - b - c]\}$   
 $= 2a - 3b - c - \{c - a + b + b - a + b + c\} = 2a - 3b - c - c + a - b - b + a - b - c = 4a - 6b - 3c$
12.  $x + 5 - (2x - 1) - [x - 2 - (3x - 2x - 4)] = x + 5 - 2x + 1 - [x - 2 - (3x - 2x + 4)]$   
 $= x + 5 - 2x + 1 - [x - 2 - 3x + 2x + 4] = x + 5 - 2x + 1 - x + 2 + 3x - 2x - 4 = -x + 12$
13.  $4 - x - \{-x - [x - (x - 1 - x)]\} = 4 - x - \{-x - [x - (x - 1 + x)]\} = 4 - x - \{-x - [x - x + 1 - x]\}$   
 $= 4 - x - \{-x - x + x - 1 + x\} = 4 - x + x + x - x + 1 - x = 5 - x$
14.  $6 - a - \{2a + [3a - (4a - \overline{a - b}) - a] + a\} = 6 - a - \{2a + [3a - (4a - a + b) - a] + a\}$   
 $= 6 - a - \{2a + 3a - 4a + a - b - a + a\} = 6 - a - 2a - 3a + 4a - a + b + a - a = -3a + b + 6$
15.  $x - \{x + (a - y) - 2y + [3x - (y - \overline{a - 2y}) - y] + 2a\} = x - \{x + (a - y) - 2y + [3x - (y - a + 2y) - y] + 2a\}$   
 $x - \{x + a - y - 2y + [3x - y + a - 2y - y] + 2a\} = x - x - a + y + 2y - 3x + y - a + 2y + y - 2a = -4a - 3x + 7y$
16.  $a^3 - [b^3 - (c^3 - \overline{a^3 - b^3})] - [c^3 + (a^3 - \overline{c^3 - b^3})] = a^3 - [b^3 - (c^3 - a^3 + b^3)] - [c^3 + (a^3 - c^3 + b^3)]$   
 $= a^3 - [b^3 - c^3 + a^3 - b^3] - [c^3 + a^3 - c^3 + b^3] = a^3 - b^3 + c^3 - a^3 + b^3 - c^3 - a^3 + c^3 - b^3 = -a^3 - b^3 + c^3$
17.  $4 - b - \{5b - [2b - (3b - \overline{2 - b}) + 2] - b\} = 4 - b - \{5b - [2b - (3b - 2 + b) + 2] - b\}$   
 $= 4 - b - \{5b - [2b - 3b + 2 - b + 2] - b\} = 4 - b - 5b + 2b - 3b + 2 - b + 2 + b = 8 - 7b$
18.  $x + (a - [a - 2 - \{2a + 1\} + 3] - a) = x + (a - [a - 2 - 2a - 1 + 3] - a)$   
 $= x + (a - a + 2 + 2a + 1 - 3 - a) = x + a - a + 2 + 2a + 1 - 3 - a = x + a$

$$19. 3x + (x - [3x - \overline{x-1}] - \{2x - 3\}) = 3x + (x - [3x - x + 1] - \{2x - 3\}) = 3x + (x - 3x + x - 1 - 2x + 3) \\ = 3x + x - 3x + x - 1 - 2x + 3 = 2$$

$$20. 8x - (2y - 4x) - \{3y - \overline{2y - x}\} - [2y + (4x - 3y)] = 8x - (2y - 4x) - \{3y - 2y + x\} - [2y + (4x - 3y)] \\ = 8x - 2y + 4x - \{3y - 2y + x\} - [2y + 4x - 3y] = 8x - 2y + 4x - 3y + 2y - x - 2y - 4x + 3y = 7x - 2y$$

## Ejercicio 26

I. Efectuar las sumas siguientes:

$$1. \begin{array}{r} -6(a+x) \\ +4(a+x) \\ \hline -2(a+x) \end{array}$$

$$2. \begin{array}{r} 3(a+y) \\ 2(b+y) \\ \hline 3(a+y) + 2(b+y) \end{array}$$

$$3. \begin{array}{r} 5a(b+c) \\ -2a(b+c) \\ \hline 3a(b+c) \end{array}$$

$$4. \begin{array}{r} -2ab^2(x-y) \\ 6ab^2(x-y) \\ \hline 4ab^2(x-y) \end{array}$$

$$5. \begin{array}{r} 2n(n+1) \\ 3n(n+1) \\ \hline 5n(n+1) \end{array}$$

$$6. \begin{array}{r} 2a(x+y^2) \\ 3b(x+y^2) \\ \hline (2a+3b)(x+y^2) \end{array}$$

$$7. \begin{array}{r} 4x^2 - 6x(y+z) \\ -3x^2 + 4x(y+z) \\ \hline x^2 - 2x(y+z) \end{array}$$

$$8. \begin{array}{r} 3a(b+c) - 2d \\ 2a(b+c) - 4d \\ \hline 5a(b+c) - 6d \end{array}$$

$$9. \begin{array}{r} -5xy + 2(x+y+z) - 3a(x-y) \\ 2xy - 5(x+y+z) + 7a(x-y) \\ \hline -3xy - 3(x+y+z) + 4a(x-y) \end{array}$$

$$10. \begin{array}{r} -4x^3 + 3x^2(y-z) + 5x(y+z) \\ -1,2x^3 - 6x^2(y-z) + 2x(y+z) \\ \hline 3,3x^3 + x^2(y-z) - 4x(y+z) \\ -2x^3 - 2x^2(y-z) + 3x(y+z) \end{array}$$

II. Efectuar las diferencias siguientes: Para esto cambiamos de signo al sustraendo

$$1. \begin{array}{r} 3(x+y) \\ -2(y+z) \\ \hline 3(x+y) - 2(y+z) \end{array}$$

$$2. \begin{array}{r} -3a(x+y) \\ +2a(x+y) \\ \hline -a(x+y) \end{array}$$

$$3. \begin{array}{r} 4a^2(x+y)^2 \\ +2a^2(x+y)^2 \\ \hline 6a^2(x+y)^2 \end{array}$$

$$4. \begin{array}{r} -5a(b+c-d) \\ -3a(b+c-d) \\ \hline -8a(b+c-d) \end{array}$$

$$5. \begin{array}{r} 1/2 n(n-1) \\ -1/3 n(n-1) \\ \hline 1/6 n(n-1) \end{array}$$

$$6. \begin{array}{r} 3m(p+q) \\ +2n(p+q) \\ \hline (3m+2n)(p+q) \end{array}$$

$$7. \begin{array}{r} 3a^2 - 5a(b+c) \\ 2a^2 - 3a(b+c) \\ \hline 5a^2 - 8a(b+c) \end{array}$$

$$8. \begin{array}{r} 4a(b+x) - 2xy \\ 2a(b+x) + 3xy \\ \hline 6a(b+x) + xy \end{array}$$

$$9. \begin{array}{r} -6x^2 + 3x(y+z) - 2y(x+z) \\ 8x^2 - x(y+z) + 3y(x+z) \\ \hline 2x^2 + 2x(y+z) + y(x+z) \end{array}$$

$$10. \begin{array}{r} 3(x+y) - 2a(x-y) + 3b(x+y)(x-y) \\ -(x+y) + 6a(x-y) + 2b(x+y)(x-y) \\ \hline 2(x+y) + 4a(x-y) + 5b(x+y)(x-y) \end{array}$$

## Ejercicio 27

Efectuar las operaciones indicadas siguientes por el método de coeficientes separados:

$$1. (x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 5x - 2) + (2x^4 + 3x^2 - x + 4)$$

$$\begin{array}{r}
 1 + 6 - 2 + 5 - 2 \\
 2 \quad 0 + 3 - 1 + 4 \\
 \hline
 3 + 6 + 1 + 4 + 2 \longrightarrow 3X^4 + 6X^3 + X^2 + 4X + 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. (X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X + 7) + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 2) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad -3 \quad +0 \quad 2 \quad 1 \quad 7 \\
 0 \quad 1 \quad -3 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \\
 \hline
 1 \quad -2 \quad -3 \quad +4 \quad +0 \quad +9 \\
 X^5 - 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 + 9
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. (X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 5X + 3) - (X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 3X - 2) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad -8 \quad +9 \quad -5 \quad +3 \\
 -1 \quad +10 \quad -6 \quad -3 \quad +2 \\
 \hline
 0 \quad +2 \quad +3 \quad -8 \quad +5 \\
 2X^3 + 3X^2 - 8X + 5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. (X^3 + 4X^2y - 6Xy^2 + 2y^3) + (2X^3 - 2X^2y + 3Xy^2 - y^3) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad +4 \quad +6 \quad +2 \\
 2 \quad -2 \quad +3 \quad -1 \\
 \hline
 3 \quad +2 \quad -3 \quad +1 \\
 3X^3 + 2X^2y - 3Xy^2 + y^3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. (a^4 - 5a^3b + 2a^2b^2 - 5ab^3 + b^4) - (a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2 + 2b^3) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad -5 \quad +2 \quad -5 \quad +1 \\
 -1 \quad +0 \quad -3 \quad +6 \quad -2 \\
 \hline
 0 \quad -5 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \\
 -5a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6. (X^3 - 6X + 8) + (X^3 - 3X^2 + 1) + (X^4 + 5X^3 + 2X - 4) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad -6 \quad +8 \\
 1 \quad -3 \quad 0 \quad +1 \\
 +1 \quad +5 \quad 0 \quad +2 \quad -4 \\
 \hline
 1 \quad +6 \quad -2 \quad -4 \quad +5 \\
 X^4 + 6X^3 - 2X^2 - 4X + 5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7. (X^3 - X^2 + X - 1) + (X^4 - X^2 + 4) - (X^3 + 2X^2 + 2X - 6) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \\
 1 \quad +0 \quad -1 \quad 0 \quad +4 \\
 -1 \quad -2 \quad -2 \quad +6 \\
 \hline
 1 \quad +0 \quad -4 \quad -1 \quad +9 \\
 X^4 - 4X^2 - X + 9
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8. (X^4 + 6X^3 - 2X + 5) - (2X^4 - 3X^3 + 4) + (X^3 + 2X^2 + 4X - 7) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad +6 \quad +0 \quad -2 \quad +5 \\
 -2 \quad +3 \quad +0 \quad +0 \quad -4 \\
 0 \quad +1 \quad +2 \quad +4 \quad -7 \\
 \hline
 -1 \quad +10 \quad +2 \quad +2 \quad -6 \\
 -X^4 + 10X^3 + 2X^2 + 2X - 6
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9. (y^5 + y^3 + 1) + (y^4 + y^2 + 2) + (y^5 + y^4 + y^2 - 4) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad +0 \quad +1 \quad +0 \quad +0 \quad +1 \\
 +1 \quad +0 \quad +1 \quad +0 \quad +2 \\
 1 \quad +1 \quad +0 \quad +1 \quad +0 \quad -4 \\
 \hline
 2 \quad +2 \quad +1 \quad +2 \quad +0 \quad -1 \\
 2y^5 + 2y^4 + y^3 + 2y^2 - 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10. (z^6 + z^5 + z^2 + 1) + (z^5 - z^4 - z^3 + 2z^2 - 3) + (z^4 - z^3 + z) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad +1 \quad +0 \quad +0 \quad +1 \quad +0 \quad +1 \\
 +1 \quad -1 \quad -1 \quad +2 \quad +0 \quad -3 \\
 1 \quad +0 \quad +0 \quad -1 \quad +0 \quad +1 \quad +0 \\
 \hline
 2 \quad +2 \quad -1 \quad -2 \quad +3 \quad +1 \quad -2 \longrightarrow 2z^6 + 2z^5 - z^4 - 2z^3 + 3z^2 + z - 2
 \end{array}
 \end{array}$$

Ejercicio 28 (REPASO)

1. Sumar los monomios siguientes:

a.-  $3x, -2y, 4z = 3x - 2y + 4z$       b.-  $-4x^3, 1x^3, 5x = -4x^3 + 1x^3 + 5x = -3x^3 + 5x$

c.-  $5a^2b, -3a^2b, -1a^2b, a^2b, ac^3 = 5a^2b - 3a^2b - 1a^2b + a^2b + ac^3 = 2a^2b + ac^3$

d.-  $-2x^m y^m, 3x^m y^m, 4x^m y^m = -2x^m y^m + 3x^m y^m + 4x^m y^m = 5x^m y^m$

e.-  $-5x(y+z), 2x(y+z), -x(y+z), 4x(y+z) = -5x(y+z) + 2x(y+z) - x(y+z) + 4x(y+z) = 0$

2. Sumar los polinomios siguientes:

a.-  $3a - 2b + 4c, a - b, b + c, -2d = 3a - 2b + 4c + a - b + b + c - 2d = 4a - 2b + 5c - 2d$

b.-  $x^3 - 5x + 2$

c.-  $1, 5y^3$

$-2, 1y + 2$

d.-  $-3x^3y^2 + 4xy^3 - 5x^4 + 2z^m$

$x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

$4, 1y^3 - 2y^2 + 4, 2y - 3, 1$

$2x^3y^2 - xy^3 + 6y^4 - 3z^m$

$-2x^3 + 3x - 6$

$-2, 3y^3 + 3y^2$

$-4, 2$

$-5x^3y^2 + 3xy^3 - 2y^4 + 4z^m$

$-x^3 - 3x^2 + 0 - 5$

$3, 3y^3 + y^2 + 2, 1y - 5, 3$

$-x^3y^2 - 2xy^3 + 3y^4 - z^m$

$-7x^3y^2 - 4xy^3 + 2y^4 + 2z^m$

e.-  $3a^2(b+c) - 4a(b+c)^2 + 2(a+b)(c+d)$

$-2a^2(b+c) - 2a(b+c)^2 - 3(a+b)(c+d)$

$a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + 4(a+b)(c+d)$

$2a^2(b+c) - 3a(b+c)^2 + 3(a+b)(c+d)$

3. De: Corregir signo del ejercicio 2ab es negativo

a.-  $5ab$  restar  $-2ab \rightarrow 5ab + 2ab = 7ab$

b.-  $-5x$  restar  $-3y \rightarrow -5x + 3y$

c.-  $-4x^3y^3$  restar  $-6x^3y^3 \rightarrow -4x^3y^3 + 6x^3y^3 = 2x^3y^3$

d.-  $3x^m y^m$  restar  $5x^m y^m \rightarrow 3x^m y^m - 5x^m y^m = -2x^m y^m$

e.-  $-5x(a+b+y)$  restar  $-3x(a+b+y) \rightarrow -5x(a+b+y) + 3x(a+b+y) = -2x(a+b+y)$

f.-  $2a - 3b + 2c$  restar  $-4b + c - 2d \rightarrow 2a - 3b + 2c + 4b - c + 2d = 2a + b + c + 2d$

g.-  $3a^2 - 6ax - 9x^2$  restar  $2a^2 - 8ax + 3x^2 \rightarrow 3a^2 - 6ax - 9x^2 - 2a^2 + 8ax - 3x^2 = a^2 + 2ax - 12x^2$

h.-  $2x^3 - 5x^2y - 6xy^2 + y^3$  restar  $-3x^3 - 2x^2y + 6xy^2 - 2y^3 \rightarrow 2x^3 - 5x^2y - 6xy^2 + y^3 + 3x^3 + 2x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 5x^3 - 3x^2y - 12xy^2 + 3y^3$

i.-  $a^4 + b^4$  restar  $a^4 - 3a^3b + 2ab^3 + b^4 \rightarrow a^4 - b^4 - a^4 + 3a^3b - 2ab^3 - b^4 = 3a^3b - 2ab^3$

j.-  $3a(x+y) - 2a^2(x+y) - 5b(x-y) - 2a(x+y) + 4a^2(x+y) + 2b(x-y) = a(x+y) + 2a^2(x+y) - 3b(x-y)$

4. Efectuar las operaciones indicadas:

a.-  $(a - 2b + 3c - 4d) + (a + b - c + 3d) = a - 2b + 3c - 4d + a + b - c + 3d = 2a - b + 2c - d$

b.-  $(3a + b - 2c + d) - (2a + b + c - d) = 3a + b - 2c + d - 2a - b - c + d = a - 3c + 2d$

c.-  $(x^4 - 2x^3y + 6x^2y^2 - 5y^3) - (-x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - y^3) = x^4 - 2x^3y + 6x^2y^2 - 5y^3 + x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^3 = 2x^4 - 5x^3y + 8x^2y^2 - 4y^3$

d.-  $(x - y + z) + (3x - 2y + 2z) - (y - z) - (x - y) = x - y + z + 3x - 2y + 2z - y + z - x + y = 3x - 3y + 4z$

e.-  $x^2 - (y^2 - z^2) + z^2 - (y^2 - x^2) - y^2 + (x^2 - z^2) = x^2 - y^2 + z^2 + z^2 - y^2 + x^2 - y^2 + x^2 - z^2 = 3x^2 - 3y^2 + 2z^2$

5. En los siguientes polinomios, incluir los términos que contienen a en un paréntesis

precedido del signo + y los términos que contienen b en un paréntesis precedido del signo - :

$$a.- 2by + 3ax - 4az + 2bz = (3ax - 4az) - (2by - 2bz)$$

$$b.- a^2 - b^2 - a^2c^2 - b^2d^2 = (a^2 - a^2c^2) - (b^2 + b^2d^2)$$

$$c.- a^2x - b^2y - a^2z + b^2x - a^2xy = (a^2x - a^2z - a^2xy) - (b^2y - b^2x)$$

$$d.- 2bc + 2bd - 2b^2 - a^2 + ac - ad = (-a^2 + ac - ad) - (-2bc - 2bd + 2b^2)$$

$$e.- am - bm - bn + an - ap + bp = (am + an - ap) - (bm + bn - bp)$$

6. Suprimir paréntesis y reducir términos semejantes:

$$a.- 10x + [8y - (3x - 2y + 5z) - 2z] - [12y - (3x + 2z)] = 10x + [8y - 3x + 2y - 5z - 2z] - [12y - 3x - 2z]$$

$$= 10x + 8y - 3x + 2y - 5z - 2z - 12y + 3x + 2z = 10x - 2y - 5z$$

$$b.- x^2 - [2a^2 - 3ax - (3a^2 - 6ax + 2x^2)] - 4x^2 = x^2 - [2a^2 - 3ax - (3a^2 - 6ax - 2x^2)] - 4x^2$$

$$= x^2 - 2a^2 + 3ax + 3a^2 - 6ax - 2x^2 - 4x^2 = -5x^2 - 3ax + a^2$$

$$c.- 4a - \{3a - 2 + [-a + 3 + (a - 3a - 2)]\} = 4a - \{3a - 2 + [-a + 3 + (a - 3a + 2)]\}$$

$$= 4a - \{3a - 2 - a + 3 + a - 3a + 2\} = 4a - 3a + 2 + a - 3 - a + 3a - 2 = 4a - 3$$

$$d.- x - [x - y - \{x - y + z - \overline{x + y - z}\}] = x - [x - y - \{x - y + z - x - y + z\}]$$

$$= x - [x - y - x + y - z + x + y - z] = x - x + y + x - y + z - x - y + z = -y + 2z$$

$$e.- 2a - [5a + x - \{6a - (3x - y) + 2x\} - 2a] = 2a - [5a + x - \{6a - 3x + y + 2x\} - 2a]$$

$$= 2a - [5a + x - 6a + 3x - y - 2x - 2a] = 2a - 5a - x + 6a - 3x + y + 2x + 2a = 5a - 2x + y$$

7. Dados los polinomios siguientes, de la suma de los tres primeros restar la suma de los dos últimos. Úsese el método de coeficientes separados:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2xz + z^2 - 3x(y + z)$$

$$-3x^2 + 4xy - y^2 + xz + 2z^2 + 6x(y + z)$$

$$x^3 - 3xy + 5y^2 - 4xz - z^3 - 2x(y + z)$$

$$2x^3 + xy + y^2 + 2xz + 5z^2 + 4x(y + z)$$

$$-4x^3 + 2xy - 3y^2 - 5xz - z^2 + 2x(y + z)$$

Sumando los tres primeros:

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & -2 & +1 & +2 & +1 & -3 \\ -3 & +4 & -1 & +1 & +2 & +6 \\ \hline 1 & -3 & +5 & -4 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} -1 & -1 & +5 & -1 & +2 & +1 \\ -x^2 & -xy & +5y^2 & -xz & +2z^2 & +x(y+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & -3 & +2 & +3 & -3 & -6 \\ \hline 1 & -4 & +7 & +2 & -1 & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} -1 & -1 & +5 & -1 & +2 & +1 \\ -x^2 & -xy & +5y^2 & -xz & +2z^2 & +x(y+z) \end{array}$$

$$-x^2 - xy + 5y^2 - xz + 2z^2 + x(y + z)$$

Realizando la resta: cambiamos de signo al sustraendo

$$\begin{array}{rrrrrr} -1 & -1 & +5 & -1 & +2 & +1 \\ 2 & -3 & +2 & +3 & -3 & -6 \\ \hline 1 & -4 & +7 & +2 & -1 & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} -1 & -1 & +5 & -1 & +2 & +1 \\ -x^2 & -xy & +5y^2 & -xz & +2z^2 & +x(y+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & -3 & +2 & +3 & -3 & -6 \\ \hline 1 & -4 & +7 & +2 & -1 & -5 \end{array}$$

$$x^2 - 4xy + 7y^2 + 2xz - z^2 - 5x(y + z)$$

Sumando los dos últimos:

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & +1 & +1 & +2 & +5 & +4 \\ -4 & +2 & -3 & -5 & -2 & +1 \\ \hline -2 & +3 & -2 & -3 & +3 & +6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} -2 & +3 & -2 & -3 & +3 & +6 \\ -2x^2 & +3xy & -2y^2 & -3xz & +3z^2 & +6x(y+z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} -2 & +3 & -2 & -3 & +3 & +6 \\ -2x^2 & +3xy & -2y^2 & -3xz & +3z^2 & +6x(y+z) \end{array}$$

$$-2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3xz + 3z^2 + 6x(y + z)$$

## CAPITULO 05

MULTIPLICACION Y DIVISION DE EXPRESIONES  
ALGEBRAICAS ENTERAS

## Ejercicio 29

Hallar los productos indicados siguientes:

1.  $(-2x)(+3y) = -6xy$
2.  $(4xy)(5yz) = 20xy^2z$
3.  $(+4ab)(-3a^2b) = -12a^3b^2$
4.  $(-1,5x^2y^3z)(2xz^2) = -3x^3y^3z^3$
5.  $(-8ab)(-2cd) = 16abcd$
6.  $(3x^3y^2z)(-4a^2xz) = -12a^2x^4y^2z^2$
7.  $(-1ab)(-3bc)(-2cd) = -12a^2b^2cd$
8.  $(+5x^m y^n)(-2x^3y^2) = -10x^{m+3}y^{n+2}$
9.  $(0,1a^2b^3)(2ab^4)(5a^3bc) = a^6b^8c$
10.  $(-3x^{m-1})(-x^{m+1}) = 3x^{2m}$
11.  $(-xyz)(-x^2z^2)(-y^2z^2) = -x^3y^3z^5$
12.  $(4a^{3n-1})(-0,5a^{2n+2}) = -2a^{5n+1}$

## Ejercicio 30

Hallar los productos indicados siguientes: Aplicando la ley distributiva

1.  $a(b-c+d) = ab-ac+ad$
2.  $(p+q-r)x = px+qx-rx$
3.  $(-3x)(x^2-5x+6) = -3x^3+15x^2-18x$
4.  $x^2(y^2+z^2-x^2) = x^2y^2+x^2z^2-x^4$
5.  $(2ab)(a^2-ab+b^2) = 2a^3b-2a^2b^2+2ab^3$
6.  $x^2(x^2-x+2) = x^4-x^3+2x^2$
7.  $(-2xy^2)(x^2-3xy+2y^2) = -2x^3y^2+6x^2y^3-4xy^4$
8.  $(y^2-4z+z^2)(y^2z^2) = y^4z^2-y^3z^3+y^2z^4$
9.  $(-1/2xyz)(x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz) = -1/2x^3yz-1/2xy^3z-1/2xyz^3+x^2y^2z+x^2yz^2-xy^2z^2$
10.  $(4x^2y^3)(x^2-5x^2y+2xy^2-6xy^3+4y^4) = 4x^4y^3-20x^5y^4+8x^4y^5-24x^3y^6+16x^2y^7$
11.  $(b^2c^2)(a^4-b^4+c^4-a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2) = a^4b^2c^2-b^6c^2+b^2c^6-a^2b^4c^2+a^2b^2c^4-b^4c^4$
12.  $(-c+3ac^2-5a^2b^3c^2)(-4ab^3c) = 4ab^4c^2-12a^3b^3c^3+20a^3b^6c^3$
13.  $x^n(x^3-2x^2+5x+6) = x^{n+3}-2x^{n+2}+5x^{n+1}+6x^n$
14.  $(3x^{n-2})(2x^3-4x^2-6x+3) = 6x^{n+1}-12x^n-18x^{n-1}+9x^{n-2}$
15.  $(2x^n y^m)(x^{n-1}+x^{n-2}y^{m-2}+y^{m-1}) = 2x^{2n-1}y^m+2x^{2n-2}y^{2m-2}+2x^n y^{2m-1}$

## Ejercicio 31

1. Efectuar las multiplicaciones indicadas siguientes. Comprobar las diez primeras  
(M) = Multiplicando ; (m) = Multiplicador ; (P) = Producto

$$1. (x+8)(x+5) = x^2+5x+8x+40 = x^2+13x+40$$

Comprobación: haciendo  $x=2 \rightarrow (M) 2+8=10 ; (m) 2+5=7 ; (P) 4+26+40=70 \rightarrow (10 \cdot 7)$

$$2. (x-4)(x-3) = x^2-7x+12$$

si  $x=2$  (M):  $2-4=-2 ; (m): 2-3=-1 ; P: 4-14+12=2 \quad (= (-2)(-1))$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad a^{n+4} - 6a^{n+3}b + 4a^{n+2}b^2 + 15a^{n+1}b^3 - a^n b^4 - a^{n-1}b^5 \quad | \quad a^2 - 4ab - b^2 \\
 \underline{-a^{n+4} + 4a^{n+3}b - 6a^{n+2}b^2} \\
 -2a^{n+3}b + 5a^{n+2}b^2 + 15a^{n+1}b^3 \\
 \underline{2a^{n+3}b - 8a^{n+2}b^2 - 2a^{n+1}b^3} \\
 -3a^{n+2}b^2 + 13a^{n+1}b^3 - a^n b^4 \\
 \underline{3a^{n+2}b^2 - 12a^{n+1}b^3 - 3a^n b^4} \\
 a^{n+1}b^3 - 4a^n b^4 - a^{n-1}b^5 \\
 \underline{-a^{n+1}b^3 + 4a^n b^4 + a^{n-1}b^5} \\
 /
 \end{array}$$

VII. Utilizar el método de división sintética en los ejemplos siguientes:

$$\begin{array}{l}
 1. \quad (x^3 + 30x^2 + 14x - 8) : (x + 5) \quad 2. \quad (x^4 - 10x^3 + 100x - 18) : (x - 4) \quad 3. \quad (x^5 - 40x^3 + 150x - 36) : (x - 6) \\
 \begin{array}{r|rrrr}
 1 & 30 & 14 & -8 & -5 \\
 & -5 & -125 & 555 & \\
 \hline
 1 & 25 & -111 & 547 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rrrrrr}
 1 & -10 & 0 & 0 & 100 & -18 & -4 \\
 & 4 & -24 & -96 & +16 & & \\
 \hline
 1 & -6 & -24 & +4 & -2 & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rrrrrr}
 1 & 0 & -40 & 0 & 150 & -36 & -6 \\
 & +6 & +36 & -24 & -144 & +36 & \\
 \hline
 1 & +6 & -4 & -24 & +6 & 0 & 
 \end{array} \\
 x^2 + 25x - 111 \quad R = 547 & \quad x^3 - 6x^2 - 24x + 4 \quad R = -2 & \quad x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 24x + 6
 \end{array}$$

VIII. En las siguientes divisiones hallar el cociente completo:

$$\begin{array}{l}
 1. \quad 3x^3 + 6x^2 - x + 5 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \quad 3x^2 - 1 \\
 \quad \quad \quad -x + 5 \\
 \quad \quad \quad \underline{x + 2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 7 \\
 \hline
 3x^3 + 6x^2 - x + 5 = 3x^2 - 1 + \frac{7}{x+2} \\
 \quad \quad \quad x+2 \quad \quad \quad x+2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2. \quad x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 8 \quad | \quad x^2 - 4x + 5 \\
 \underline{-x^4 + 4x^3 - 5x^2} \\
 \quad \quad \quad x^3 + x^2 + 2x \\
 \quad \quad \quad \underline{-x^3 + 4x^2 - 5x} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 5x^2 - 3x - 8 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-5x^2 + 20x - 25} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 17x - 33
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3. \quad x^4 - 3x^2y^2 + y^4 \quad | \quad x - 2y \\
 \underline{-x^4 + 2x^3} \\
 \quad \quad \quad 2x^3 - 3x^2y^2 \\
 \quad \quad \quad \underline{-2x^3 + 4x^2y^2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x^2y^2 + 2x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-x^2y^2 + 2xy^3} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2xy^3 + y^4 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-2xy^3 + 4y^4} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 5y^4
 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 3x^2y^2 + y^4}{x - 2y} = x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2y^3 + \frac{5y^4}{x - 2y}$$



# CAPITULO 06

## ECUACIONES ALGEBRAICAS SENCILLAS

### PROBLEMAS

#### Ejercicio 39

I. En las siguientes ecuaciones transponer términos de modo que en el primer miembro sólo queden términos que contengan la incógnita y en el segundo miembro sólo queden términos numéricos. Dar el resultado en forma simplificada efectuando la reducción de términos semejantes:

1.  $X+2=6 \rightarrow X=6-2; X=4$
2.  $3X-1=2+X \rightarrow 3X-X=2+1; 2X=3$
3.  $3=4-X \rightarrow X=4-3; X=1$
4.  $6X+2=2X+1 \rightarrow 6X-2X=1-2; 4X=-1$
5.  $X-1=3X+3 \rightarrow X-3X=3+1; -2X=4$
6.  $2X-1=4+X-3 \rightarrow 2X-X=4-3+1; X=2$
7.  $4+1+3Y=13-6 \rightarrow 4+3Y-2Y=-6-2; 2Y=-8$
8.  $3+Y-2=4-2Y \rightarrow Y+2Y=4+2-3; 3Y=3$
9.  $4-2Z=6-5Z+2 \rightarrow -2Z+5Z=6+2-4; 3Z=4$
10.  $2+Z-5=-7+3-4Z \rightarrow 7+Z+4Z=3+5-2; 6Z=6$

II. En las ecuaciones siguientes despejar la incógnita pasando al otro miembro de la ecuación el factor o divisor que la acompaña:

1.  $2X=4, X=4/2, X=2$
2.  $3X=9, X=9/3, X=3$
3.  $5X=-20, X=-20/5, X=-4$
4.  $10=2X, 10/2=X, 5=X$
5.  $-4X=12, X=12/-4, X=-3$
6.  $-3X=-6, X=-6/-3, X=2$
7.  $X/2=3, X=6$
8.  $X/4=-3, X=-12$
9.  $1/4Y=1/2, Y=1/2(4), Y=2$
10.  $6Y=3, Y=3/6, Y=1/2$

#### Ejercicio 40

Resolver las ecuaciones siguientes y comprobar la solución encontrada:

1.  $4X-2=10, 4X=10+2, X=3$  comprobación  $4(3)-2=10, 12-2=10, 10=10$
2.  $6X-3=X+17, 6X-X=17+3, X=20/5, X=4$  comprob:  $6(4)-3=4+17; 24-3=21, 21=21$
3.  $2X+5=3, 2X=3-5, X=-1$  comprob:  $2(-1)+5=3, -2+5=3; 3=3$
4.  $7X=4X+6, 7X-4X=6, X=2$  comprob.  $7(2)=4(2)+6; 14=14$
5.  $2X=9+X, 2X-X=9, X=9$  comprob.  $2(9)=9+9, 18=18$
6.  $6X=24-2X, 6X+2X=24, X=3$  comprob.  $6(3)=24-2(3), 18=24-6, 18=18$
7.  $10=15-5X; 10-15=-5X, X=1$  comprob.  $10=15-5(1), 10=15-5, 10=10$
8.  $X-8=4-X; X+X=4+8, X=6$  comprob  $6-8=4-6, -2=-2$
9.  $3X-10=18-X, 3X+X=18+10, X=7$  comprob.  $3(7)-10=18-7, 21-10=18-7, 11=11$
10.  $7X-8=3X+4, 7X-3X=4+8, X=3$  comprob.  $7(3)-8=3(3)+4, 21-8=9+4, 13=13$

11.  $2-3x-5=5-8x+x$ ;  $-3x+8x-x=5+5-2$ ;  $x=2$  comprob.  $2-3(2)-5=5-8(2)+2 \rightarrow -9=-9$
12.  $x+2=3-2x+8$ ;  $x+2x=3+8-2$ ;  $x=3$  comprob.  $3+2=3-2(3)+8 \rightarrow 5=5$
13.  $x-4+2y=6-2y+1$ ;  $-y+2y+2y=6+1-4$ ;  $y=1$  comp.  $4-1+2(1)=6-2(1)+1 \rightarrow 5=5$
14.  $2z+3=1+z+4$ ;  $2z-z=1+4-3$ ;  $z=2$  comp.  $2(2)+3=1+2+4 \rightarrow 7=7$
15.  $0,6x-0,3=1,2+0,4x$ ;  $0,6x-0,4x=1,2+0,3$ ;  $x=7,5$  comp.  $0,6(7,5)-0,3=1,2+0,4(7,5)$ ;  $4,2=4,2$
16.  $0,26y+0,21=-0,04y-0,06$ ;  $0,26y+0,04y=-0,06-0,21$ ;  $y=-0,9$  comp.  $0,26(-0,9)+0,21=-0,04(-0,9)-0,06$
17. No hay  $-0,024=-0,024$
18.  $3(x+6)-40=6(x-3)$ ;  $3x+18-40=6x-18$ ;  $-3x=4$ ;  $x=-4/3$  comp.  $3(-4/3+6)-40=6(-4/3-3)$ ;  $-16=-16$
19.  $2(3x-2)-5x=2(x-3)+90$ ;  $6x-5x-2x=-6+90+4$ ;  $x=-88$  comp.  $-92=-92$
20.  $4(x-1)-5(3-x)=14x-2(5x-3)$ ;  $4x-4-15+5x=14x-10x+6$ ;  $5x=25$ ;  $x=5$  comp.  $26=26$
21.  $12x-3(x-2)=3(x+4)$ ;  $12x-3x+6=3x+12$ ;  $6x=6$ ;  $x=1$  comp.  $15=15$
22.  $4x-(x+6)-(x-2)=16-2x$ ;  $4x-x-6-x+2=16-2x$ ;  $4x=20$ ;  $x=5$  corregir respuesta libronoes6
23.  $x^2+3x-(x-2)=2(x-1)+(x^2-x)$ ;  $x^2+3x-x+2=2x-2+x^2-x$ ;  $x=-4$  comp.  $10=10$
24.  $3(x-1)+5(x-2)-(x-3)=18$ ;  $3x-3+5x-10-x+3=18$ ;  $7x=28$ ;  $x=4$  comp.  $18=18$
25.  $2(x-3)-4(x-1)+3(x-5)=2x+20$ ;  $2x-6-4x+4+3x-15=2x+20$ ;  $-x=37$ ;  $x=-37$
26.  $10-4(x+2)=32-6(3x-2)$ ;  $10-4x-8=32-18x+12$ ;  $14x=42$ ;  $x=3$
27.  $8(x-2)-5(3-x)+6=15-4(3-x)$ ;  $8x-16-15+5x+6=15-12+4x$ ;  $9x=18$ ;  $x=2$
28.  $(3x-2)-(x+3)-x=0$ ;  $3x-2-x-3-x=0$ ;  $x=5$
29.  $0=6x+(11-x)+2(x-2)$ ;  $0=6x+11-x+2x-4$ ;  $-7=7x$ ;  $x=-1$  comp.  $0=0$
30.  $(2x+3)-(x+4-2x)=5-(x+2)$ ;  $2x+3-x-4+2x=5-x-2$ ;  $4x=4$ ;  $x=1$
31.  $3x+(x+1)-(x-5)=8-(2x-6+x)$ ;  $3x+x+1-x+5=8-2x+6-x$ ;  $4x=8$ ;  $x=2$
32.  $4x+[-x-(5+x)]=3$ ;  $4x-x-5-x=3$ ;  $2x=8$ ;  $x=4$  Comp.  $3=3$
33.  $15-[-3x+(8x-2)]=7$ ;  $15+3x-8x+2=7$ ;  $-5x=-10$ ;  $x=2$
34.  $6+\{3x-[3+(4x-1)]\}=-2$ ;  $6+3x-[3+4x-1]=-2$ ;  $6+3x-3-4x+1=-2$ ;  $x=6$
35.  $x-\{2+[x-(3x-1)]\}=2-x$ ;  $x-2-x+3x-1=2-x$ ;  $4x=5$ ;  $x=1,25$
36.  $-3x-[-6x-(3-x)]=9+(x-1)$ ;  $-3x+6x+3-x=9+x-1$ ;  $x=5$
37.  $6+(3x-4)=2x-\{3+[4x-(3-x)]-x\}$ ;  $6+3x-4=2x-3-4x+3-x+x$ ;  $5x=-2$ ;  $x=-0,4$
38.  $x^2-(x-3)(x+2)=8$ ;  $x^2-x^2+x+6=8$ ;  $x=2$
39.  $3x^2-(x-1)(x+5)=2x^2+3$ ;  $3x^2-x^2-4x+5=2x^2+3$ ;  $-4x=-2$ ;  $x=0,5$
40.  $-(4-x)(x+3)=x^2-40$ ;  $-(4x+12-x^2-3x)=x^2-40$ ;  $-x=-28$ ;  $x=28$
41.  $5x-3[x-(2x-1)]=-3$ ;  $5x-3x+6x-3=-3$ ;  $8x=0$ ;  $x=0$
42.  $x+4-(x-2)(x-1)=3(3-x)-x^2$ ;  $x+4-x^2+3x-2=9-3x-x^2$ ;  $7x=7$ ;  $x=1$
43.  $22-[3x-(2x-1)]=5x+\{6-[2x-7(x-1)]\}$ ;  $22-3x+2x-1=5x+6-2x+7x-7$ ;  $x=2$
44.  $4(x-5)(x+2)=11-3[x(x+2)+3]+7x^2$ ;  $4x^2-12x-40=11-3x^2-6x-9+7x^2$ ;  $x=-7$
45.  $(y+2)(y-1)+(-y)^2=(2y-1)(y+2)-4$ ;  $y^2+y-2+y^2=2y^2+3y-2-4$ ;  $y=2$
46.  $(z+1)(z+4)+3(z-2)(z-1)=4z(z-6)$ ;  $z^2+5z+4+3z^2-9z+6=4z^2-24z$ ;  $z=-0,5$
47.  $x(x+1)(x+2)-(x+1)(x-2)(x+3)=x^2-1$ ;  $x(x^2+3x+2)-(x^2-x-2)(x+3)=x^2-1$   
 $x^3+3x^2+2x-x^3-3x^2-x^2+3x+2x+6=x^2-1$ ;  $7x=-7 \rightarrow x=-1$

$$26. (3-3)(3+5) - 23(3-1) = (4-3)(4-2) + 6 - 24^1; 4^1 + 24 - 18 = 24^1 + 12 = 4^1 - 54 + 6 + 6 = 24^1; 4 = 3$$

$$49. (2+1)(2-3) - (2+1)(2+4) = 32 - [42 - 2(2-1)]; 2^1 - 22 - 3 - 2^1 - 62 - 8 = 32 - 42 + 12 - 2; 2 = -1$$

$$50. (2x-3)(3x-2) + (4x-1)(2x-1) = 2x(7x-5) + 70; 6x^2 - 13x + 6 + 8x^1 - 2x(1) + 70 = 14x^2 - 10x + 70; x = -2$$

## Ejercicio 41

Escribir utilizando el simbolismo algebraico:

1. Un número aumentado en 5. Sea  $x$  el número  $\rightarrow$  el número pedido será  $x+5$
2. Un número disminuido en 8. Sea  $x$  el número  $\rightarrow x-8$
3. El cuadrado de un número aumentado en 2.  $\rightarrow x^2+2$
4. El cubo de un número.  $\rightarrow x^3$
5. El quíntuplo de un número.  $\rightarrow 5x$
6. El triple de un número disminuido en 4.  $\rightarrow 3x-4$
7. El 5% de un número  $\rightarrow 5/100 x = 0,05x$
8. Tres números consecutivos. Sea  $n$  el 1º número, el 2º es  $n+1$ , el 3º es  $n+2$   
los números buscados son:  $n, n+1, n+2$
9. Dos números pares consecutivos. Sea  $n$  un número; el número par es  $2n$  el consecutivo es  $2n+2$   $\rightarrow$  los números buscados son  $2n, 2n+2$
10. El cuadrado de un número menos el número. Sea  $x$  un número;  $x^2-x$
11. En una división el divisor es  $d$ , el cociente  $q$  y el resto  $r$ . Representar el dividendo.  
Sea  $D$  el dividendo  $\rightarrow \begin{array}{r} D \overline{) d} \\ \underline{r} \quad q \end{array} \rightarrow D = dq + r$
12. En una división el dividendo es  $D$ , el divisor  $d$  y el cociente  $q$ . Representar el resto.  
Sea  $r$  el resto  $\rightarrow \begin{array}{r} D \overline{) d} \\ \underline{r} \quad q \end{array} \rightarrow D = dq + r; r = D - dq$
13. Un joven tiene 15 años de edad. Representar su edad: a) hace  $x$  años; b) dentro de  $x$  años  
a)  $15-x$   $\rightarrow$  hace  $\therefore$  restar      b)  $15+x$   $\rightarrow$  dentro  $\therefore$  sumar
14. Un joven tiene  $x$  años. Representar su edad: a) dentro de 2 años; b) dentro de  $m$  años.  
a)  $x+2$       b)  $x+m$
15. La cifra de las centenas de un número es  $c$ , la cifra de las decenas es  $d$  y la de las unidades es  $u$ . Representar el número.  
Partiendo de  $125 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$   
 $\begin{array}{c} c \quad d \quad u \\ \rightarrow cd u = 100c + 10d + u \end{array}$
16. Representar el número de pesos que hay en  $x$  billetes de 5 pesos, y billetes de 10 pesos y  $z$  billetes de 20 pesos.  
 $x$  billetes de 5 pesos  $\rightarrow 5x$   
 $y$  billetes de 10 pesos  $\rightarrow 10y$   $\Rightarrow$  El número total será  $5x + 10y + 20z$   
 $z$  billetes de 20 pesos  $\rightarrow 20z$

17. Si un automóvil camina 50 Km por hora, ¿cuántos Kilómetros camina en  $t$  horas?  
¿En  $m$  minutos?

En 1h camina 50Km

En 60 min camina 50Km  $\Rightarrow$  en 1 min camina =  $5/6$  km

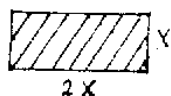
en  $t$ h caminará 50t Km

en  $m$  min caminará  $5/6 m$  Km

18. Un muchacho tiene  $p$  pesos. Si ha gastado  $m$  reales y  $n$  pesetas, representar los centavos que le quedan. Como tienen  $p$  pesos equivalen a 100  $p$  centavos gastan  $m$  reales y  $n$  pesetas  $\rightarrow$  1 real = 10 centavos gasta 10m centavos  
1 peseta = 20 centavos gasta 20n centavos

Por tanto le quedan  $100p - 10m - 20n$

19. Un rectángulo tiene una anchura de  $x$  pies y doble largo que ancho. Representa  
a) su perímetro; b) su área.



Sea  $x$  el ancho; el largo es  $2x$

a)  $p = 2(2x + x) = 6x$

b)  $A = b \cdot h \rightarrow A = 2x(x); A = 2x^2$

20. Juan hace un trabajo en  $x$  días. ¿Qué parte del trabajo hace en un día?  
Todo el trabajo hace en  $x$  días; En un día hará  $1/x$

### Ejercicio 42

Resuélvanse los problemas siguientes:

1. El duplo de un número es igual al número aumentado en 15. Hallar el número.

El número

$x$

Planteo  $2x = x + 15$

El duplo del número

$2x$

Resolución  $x = 15$

El número aumentado en 15

$x + 15$

Verificación: El doble de 15 es 30 y 15 aumentado en 15 también es 30

2. Cuatro veces un número es igual al número aumentado en 30. Hallar el número.

El número

$x$

$4x = x + 30$

cuatro veces el número

$4x$

$3x = 30$

El número aumentado en 30

$x + 30$

$x = 10$

3. El duplo de un número más el triplo del mismo número es igual a 20. Hallar el #.

El número

$x$

Planteo:  $2x + 3x = 20$

Duplo del número

$2x$

$5x = 20$

Tripló del número

$3x$

$x = 4$

4. Si el triple de un número se resta de ocho veces el número el resultado es 45. Hallar el #.

El número

$x$

$8x - 3x = 45$

Triple del número

$3x$

$5x = 45$

Ocho veces al número

$8x$

$x = 9$

5. Pedro tiene tres veces el número de naranjas que tiene Juan y entre los dos tienen 48 naranjas. ¿Cuántas naranjas tiene cada uno?
- |                               |      |               |                          |
|-------------------------------|------|---------------|--------------------------|
| El # de naranjas q tiene Juan | $X$  | $X + 3X = 48$ | Pedro tiene $3(12) = 36$ |
| Pedro tiene                   | $3X$ | $4X = 48$     | Juan 12 naranjas         |
| Los dos tienen                | 48   | $X = 12$      |                          |
6. Julio y su hermano tienen conjuntamente 10 \$ y Julio tiene 1 \$ más que su hermano. ¿Cuánto tiene cada uno?
- |         |         |                    |                 |
|---------|---------|--------------------|-----------------|
| Hermano | $X$     | $X + (X + 1) = 10$ | Julio 5,50 \$   |
| Julio   | $X + 1$ | $2X = 9$           | hermano 4,50 \$ |
| Los dos | 10      | $X = 4,50$         |                 |
7. La suma de las edades de un padre y su hijo es 60 años y la edad del padre es el quintuplo de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?
- |                    |      |               |               |
|--------------------|------|---------------|---------------|
| Edad del hijo      | $X$  | $X + 5X = 60$ | Padre 50 años |
| Del padre          | $5X$ | $6X = 60$     | hijo 10 años  |
| La suma de los dos | 60   | $X = 10$      |               |
8. Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 51.
- |  |                               |         |
|--|-------------------------------|---------|
| número $X$   | El número consecutivo $X + 1$ | Suma 51 |
| $X + (X + 1) = 51$ ; $2X = 50$ ; $X = 25$ Los # consecutivos son 25 y 26 |                               |         |
9. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 63.
- |   |            |            |
|---|------------|------------|
| 1º $X$  | 2º $X + 1$ | 3º $X + 2$ |
| $X + (X + 1) + (X + 2) = 63$ ; $X = 20$ 1º 20 2º 21 3º 22 |            |            |
10. La suma de dos números es 27 y su diferencia es 7. Hallar los números.
- |   |               |                           |
|---|---------------|---------------------------|
| 1º # $X$  | 2º # $27 - X$ | Diferencia $X - (27 - X)$ |
| $X - (27 - X) = 7$ ; $2X = 34$ ; $X = 17$ → los # son 10 y 17 |               |                           |
11. Hallar dos números que sumados den 131 y restados den 63.
- |          |              |  |
|----------|--------------|--|
| 1º # $X$ | 2º $131 - X$ | → $X - (131 - X) = 63$ , $X = 97$ → Los # son: 34 y 97 |
|----------|--------------|--|
12. Tres personas A, B y C reciben una herencia de 3500 \$, B recibe el triple de lo que recibe A, y C el duplo de lo que recibe B. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
- |  |
|--|
| A recibe $X$ , B recibe $3X$ , C recibe $2(3X)$                                      |
| $X + 3X + 6X = 3500$ , $10X = 3500$ ; $X = 350$ A = 350 \$; B = 1050 \$; C = 2100 \$ |
13. Un aeroplano va de la Habana a Miami y regresa en 100 minutos. A causa del viento el viaje de ida demora 12 minutos más que el de regreso. ¿Cuántos minutos demora cada viaje?
- |   |                      |                   |
|---|----------------------|-------------------|
| Viaje de ida $X + 12$                                   | Viaje de regreso $X$ | ida y regreso 100 |
| $X + 12 + X = 100$ → $X = 44$ ida 56 min regreso 44 min |                      |                   |
14. En una clase de 47 alumnos hay 9 varones más que niñas. ¿Cuántos varones y cuántas niñas hay?
- |                     |                         |                     |
|---------------------|-------------------------|---------------------|
| número de niñas $X$ | número de niños $X + 9$ | Total niños y niñas |
|---------------------|-------------------------|---------------------|

$$X + X + 9 = 47 \rightarrow X = 19 \quad \text{niñas 19 y niños 28}$$

15. En una clase de 80 alumnos el número de aprobados es 4 veces el número de suspensos. ¿Cuántos aprobados y cuántos suspensos hay?

$$\text{Suspensos } X \quad \text{Aprobados } 4X \quad \text{Total } 80$$

$$X + 4X = 80 \rightarrow X = 16 \quad \text{Suspensos } 16 \quad \text{Aprobados } 64$$

16. El cuerpo de un pez pesa 4 veces lo que pesa la cabeza y la cola 2 libras más que la cabeza. Si el pez pesa 22 libras, ¿cuál es el peso de cada parte?

$$\text{Cabeza } X \quad \text{Cuerpo } 4X \quad \text{Cola } X + 2 \quad \text{Total } 20 \quad \text{corregir no es 22 es 20 lib.}$$

$$X + 4X + X + 2 = 20 \rightarrow X = 3 \quad \text{Cabeza 3 libras ; Cuerpo 12 libras ; Cola 5 lib.}$$

17. El largo de un rectángulo es el triple del ancho y su perímetro (suma de los lados) es de 56 cm. Hallar sus dimensiones.

$$\text{ancho } X \quad \text{largo } 3X$$

$$\text{Planteo: } 2(X + 3X) = 56 \rightarrow X = 7 \Rightarrow \text{ancho } 7 \text{ cm ; largo } 21 \text{ cm}$$

18. En una batalla aérea en Corea los nortcoreanos perdieron 17 aviones más que los norteamericanos. Si en total se perdieron 25, ¿cuántos aviones perdió cada uno?

$$\text{Norteamericanos } X \quad \text{nortcoreanos } X + 17$$

$$X + X + 17 = 25 \rightarrow X = 4 \Rightarrow \text{Nortcoreanos } 21 ; \text{ Norteamericanos } 4$$

19. Una compañía ganó 30 000 dólares en 3 años. En el segundo año ganó el doble de lo que había ganado en el primero y en el tercer año ganó tanto como en los dos años anteriores juntos. ¿Cuál fue la ganancia en cada año?

$$1^{\text{er}} \text{ año } X \quad 2^{\text{do}} \text{ año } 2X \quad 3^{\text{er}} \text{ año } X + 2X$$

$$X + 2X + X + 2X = 30\,000 \rightarrow X = 5\,000 \Rightarrow 1^{\text{er}} \text{ año } 5\,000\$ ; 2^{\text{do}} \text{ año } 10\,000\$ ; 3^{\text{er}} \text{ año } 15\,000\$$$

20. Un terreno rectangular tiene de ancho 5 metros menos que de largo y su perímetro es de 95 m. Hallar sus dimensiones.

$$\text{largo } X \quad \text{ancho } X - 5$$

$$\text{Planteo: } 2(X + X - 5) = 95 \rightarrow X = 26,25 \text{ m} \Rightarrow \text{ancho } 21,25 \text{ m , largo } 26,25 \text{ m}$$

21. Hay cuatro números cuya suma es 90. El segundo número es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. ¿Cuáles son los números?

$$1^{\text{er}} \text{ número } X \quad 2^{\text{do}} \# 2X \quad 3^{\text{er}} \# 4X \quad 4^{\text{to}} \# 8X$$

$$X + 2X + 4X + 8X = 90 \rightarrow X = 6 \Rightarrow \text{Los \# son : } 6 , 12 , 24 , 48$$

22. La suma de cuatro números consecutivos es 198. Hallar los números.

$$1^{\text{er}} X \quad 2^{\text{do}} X + 1 \quad 3^{\text{er}} X + 2 \quad 4^{\text{to}} X + 3$$

$$X + (X + 1) + (X + 2) + (X + 3) = 198 \rightarrow X = 48 \Rightarrow \text{Los \# son: } 48 , 49 , 50 , 51$$

23. La suma de tres números impares consecutivos es 99. Hallar dichos números.

$$1^{\text{er}} \# \text{ impar } X \quad 2^{\text{do}} X + 2 \quad 3^{\text{er}} X + 4$$

$$X + (X + 2) + (X + 4) = 99 \rightarrow X = 31 \Rightarrow \text{Los números son: } 31 , 33 , 35$$

14. Un caballo con su silla valen 1400\$. Si el caballo vale 900\$ más que la silla, ¿cuánto vale cada uno?

silla  $x$       caballo  $x + 900$

$$x + (x + 900) = 1400 \rightarrow x = 250 \Rightarrow \text{silla } 250\$ \text{ caballo } 1150\$$$

15. Se han comprado dos piezas de una máquina de la misma medida y del mismo fabricante. Una de ellas se compró al precio de lista y la otra con rebaja del 25%. Si por las dos se pagaron 52,50 dólares, ¿cuánto se pagó por cada una?

pieza al precio de lista  $x$       pieza con rebaja  $x - 0,25x$

$$\text{Planteo: } x + (x - 0,25x) = 52,50 \rightarrow x = 30 \Rightarrow 1^{\text{a}} \text{ pieza } 30\$ \text{ } 2^{\text{da}} \text{ pieza } 22,5\$$$

### Ejercicio 43

1. A tiene doble dinero que B. Si A diese 15\$ a B entonces tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene cada uno?

# de pesos que tienen      # de pesos q' tendrían si 15\$ cambiase de mano

A       $2x$

$2x - 15$

B       $x$

$x + 15$

$$\text{Planteo A y B tienen lo mismo } 2x - 15 = x + 15 \rightarrow x = 30 \Rightarrow A \text{ } 60\$ , B \text{ } 30\$$$

2. A tiene tres veces tanto dinero como B. Si A da 25\$ a B tiene entonces el doble que B. ¿Cuánto tienen cada uno al principio?

Nº \$      Nº \$ cuando cambian

A       $3x$

$3x - 25$

B       $x$

$x + 25$

$$\text{Planteo } 3x - 25 = 2(x + 25) \rightarrow x = 75$$

A: 225\$ ; B: 75\$

3. La suma de dos números es 24. Tres veces el mayor excede en 2 unidades a cuatro veces el menor. Hallar los números.

Nº menor  $x$

$$\text{Planteo: } 3(24 - x) = 2 + 4x \rightarrow x = 10$$

Nº mayor  $24 - x$

Nº menor 10

Nº mayor 14

4. Entre Juan y Tenaro tenían 100\$. Juan duplicó su dinero y Tenaro triplicó el suyo y ahora Tenaro tiene 25\$ más que Juan. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

Juan       $x$        $2x$

$$\text{Planteo: } 2x + 25 = 3(100 - x) \rightarrow x = 55$$

Tenaro  $100 - x$        $3(100 - x)$

Juan 55\$ ; Tenaro 45\$

5. El duplo de las horas que han transcurrido de un día es igual al cuádruplo de las que quedan por transcurrir. Averiguar la hora.

Nº horas transcurridas  $x$

$$\text{Planteo: } 2x = 4(24 - x) \rightarrow x = 16$$

Nº horas por transcurrir  $24 - x$

4pm ó A las 16 hoo

6. Seis amigos van a comprar un terreno a partes iguales. A última hora dos de ellos desisten y esto hace que cada uno de los otros tenga que aportar 500\$ más. ¿Cuál es el valor del terreno?

A un principio N° 6 X      Planteo:  $6X = 4(X + 500) \rightarrow X = 1000$   
Desisten dos N° 4  $X + 500$       Valor del terreno  $6X = 6000 \$$

7. A tiene 9\$ y B tiene 6\$. B le da a A cierta cantidad y entonces A tiene el cuádruplo de lo que tiene B. ¿Cuánto le dió B a A?

$A \quad 9 \quad 9+x$        $\text{Planted: } 9+x = 4(6-x) \rightarrow x = 3 \text{ ft}$   
 $B \quad 6 \quad 6-x$

8. La edad de un padre es el triple de la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Padre	3X	3X+10	Planteo: $3X+10 = 2(X+10) \rightarrow X=10$
Hijo	X	X+10	Padre 30 años, Hijo 10 años

9. La edad de un padre es el cuádruplo de la de su hijo. Hace 3 años era el quintuplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Padre	$4x$	$4x-3$	Planteo: $4x-3 = 5(x-3) \rightarrow x=12$
Hijo	$x$	$x-3$	Padre 48 años, Hijo 12 años

10. La edad de un padre es ahora el duplo de la de su hijo, pero hace 20 años era el cuádruplo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

	Edades actuales	edades hace 10 años	Planteo: $2x - 20 = 4(x - 20) \rightarrow x = 30$
Padre	$2x$	$2x - 20$	Padre 60 años
Hijo	$x$	$x - 20$	Hijo 30 años

11. Hace 5 años la edad de un padre era el triple de la de su hijo y dentro de 5 años será el doble. ¿Cuáles es la edad actual de cada uno?

	edades hace 5 años	ed. actuales	ed. dentro de 5 años	
Padre	$3x$	$3x + 5$	$3x + 5 + 5$	Planteo: $3x + 10 = 2(x + 10)$
Hijo	$x$	$x + 5$	$x + 5 + 5$	$x = 10$
				Padre 35 años ; Hijo 15 años

12. Hace 4 años un padre tenía 8 veces la edad de su hijo. Actualmente la edad del padre es 4 veces la de su hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

	ed. hace años	ed. actuales	Planteo: $8x + 4 = 4(x + 4) \rightarrow x = 3$
Padre	$8x$	$8x + 4$	Padre 28 años
Hijo	$x$	$x + 4$	Hijo 7 años

13. La suma de las edades de dos hermanos es 25 años. La edad del menor es dos tercios de la edad del mayor. ¿Cuáles es la edad de cada uno?

hermano menor  $x$   
hermano mayor  $25 - x$

Planteo:  $x = 2/3(25 - x) \rightarrow x = 10$   
hermano menor 10 años  
hermano mayor 15 años



14. Una madre lleva a su hija 24 años. Dentro de 6 años la edad de la madre será el triple de la edad de la hija. Averiguar la edad actual de cada una.

Madre  $x+24$   $x+30$  Planteo:  $x+30 = 3(x+6) \rightarrow x=6$

Hija  $x$   $x+6$  Madre 30 años, Hija 6 años

15. Juan tiene 11 años y Pedro tiene 28 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Pedro será el doble de la de Juan?

ed. actuales ed. dentro de  $x$  años Planteo:  $28+x = 2(11+x) \rightarrow x=6$

Juan 11  $11+x$  dentro de 6 años

Pedro 28  $28+x$

16. José tiene 7 años y Luis tiene 25 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Luis será el triple de la de José?

José 7  $7+x$  Planteo:  $25+x = 3(7+x) \rightarrow x=2$

Luis 25  $25+x$  dentro de 2 años

17. La edad actual de Manuel es el triple de la edad que tenía hace 20 años. ¿Cuál es su edad actual?

edad actual  $x$  Edad hace 20 años  $(x-20)$  Planteo:  $x = 3(x-20) \rightarrow x=30$  años

18. A tiene 20 años y B tiene 12 años. ¿Cuándo la edad de A será el doble de la de B?

A 20  $20+x$  Planteo:  $20+x = 2(12+x) \rightarrow x=-4$  años

B 12  $12+x$   $x=-4$  años (hace 4 años)

19. El denominador de un quebrado excede en 2 unidades al numerador. Si se suma 1 al numerador y 1 al denominador el nuevo quebrado equivale a  $2/3$ . Hallar el quebrado primitivo.

1 términos actuales términos modificados Planteo:  $\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{3} \rightarrow x=3$

Numerador  $x$   $x+1$

Denominador  $x+2$   $x+3$  quebrado primitivo  $x/(x+2) = 3/5$

20. El denominador de un quebrado excede en 3 unidades al numerador. El triple del denominador excede al cuádruplo del numerador en 4 unidades. ¿Cuál es el quebrado?

Numerador  $x$  Planteo:  $3(x+3) = 4x+4 \rightarrow x=5$

Denominador  $x+3$  El quebrado es  $x/(x+3) = 5/8$

21. Un rectángulo tiene 20m más de largo que de ancho. Si el largo fuese 100m más y el ancho 40m menos el área sería la misma. Hallar las dimensiones del rectángulo primitivo.

dimensiones actuales dimensiones modificadas Planteo:

ancho  $x$   $x-40$   $x(x+20) = (x-40)(x+20)+1600$

largo  $x+20$   $x+20+100$  largo 100m, ancho 80m

22. El largo de un rectángulo excede al ancho en 30m. Si el largo se aumenta en 10m y el ancho se disminuye en 6m el área resulta la misma. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

ancho  $x$   $x-6$  El área es la misma  $x(x+30) = (x-6)(x+40)$

largo  $x+30$   $x+30+10$   $x=60 \Rightarrow$  largo 90m, ancho 30m

23. Un rectángulo y un cuadrado tienen la misma área. El largo del rectángulo es 6 m mayor que el lado del cuadrado y su ancho es 4 m menor que el lado del cuadrado. Hallar las dimensiones y el área del cuadrado y del rectángulo.

lado del cuadrado  $x$   
 ancho del rectángulo  $x-4$   
 largo del rectángulo  $x+6$

Planteo: Área cuadrado = área rectángulo  
 $x^2 = (x-4)(x+6) \rightarrow x = 12$  ; Área  $x^2 = 12^2$ ;  $x^2 = 144$   
 lado del cuadrado 12 m, ancho del rectángulo 8 m  
 largo del rectángulo 18 m, Área cuadrado 144 m<sup>2</sup>

24. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Hallar los números.

1<sup>er</sup> #  $X$       Planteo:  $(X+1)^2 - X^2 = 61 \rightarrow X = 30$   
siguiente # consecutivo  $X+1$       Los números son: 30 y 31

25. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos impares es 80. Hallar los números.

Número impar  $X$       Planteo:  $(X+2)^2 - X^2 = 80 \rightarrow X = 19$   
siguiente número impar  $X+2$       los números son: 19 y 21

### Ejercicio 44

1. Dividir un ángulo de  $90^\circ$  en dos partes cuyas medidas estén entre si como 7:8.

1ª parte  $7x$       Planteo:  $7x + 8x = 90 \rightarrow x = 6$

2<sup>de</sup> page gx

$\therefore 7x = 42$ ;  $8x = 48$  las partes son  $42^\circ$  y  $48^\circ$

2. Dividir un ángulo de  $180^\circ$  en dos partes cuyas medidas estén entre sí como 4:5.

1ª parte  $4X$       Planteo:  $4X + 5X = 180 \rightarrow X = 20$

2<sup>da</sup> parte 5x

$\therefore 4x = 80; 5x = 100$  las partes son:  $80^\circ$  y  $100^\circ$

3. La longitud de un rectángulo es a su anchura como 5 : 3 y su perímetro es de 112 cm. Hallar las dimensiones del rectángulo.

longitud 5x  $2(5x + 3x) = 112 \rightarrow x = 7$

anchura  $3x$  las dimensiones son: largo  $5x = 35\text{cm}$ ; ancho  $3x = 21\text{cm}$ .

4. Un ganadero tiene 518 reses que quiere poner a pastar en dos terrenos, uno de 15 ha y otro de 33 ha, de modo que haya en cada parcela el mismo número de cabezas de ganado por hectárea. ¿Cuántas reses debe poner en cada una?

terreno de 15 ha  $\rightarrow 15X$       Planteo:  $15X + 33X = 528 \rightarrow X = 11$

terreno de 33 ha  $\rightarrow 33x$  En cada terreno debe poner:  $15x = 165$  reses;  $33x = 363$  reses

5. Los ángulos  $A, B, C$  de un triángulo están entre si como  $2:3:5$ . Se sabe que  $A+B+C=180^\circ$ . Hallar el valor de cada ángulo.

$$A: 2x \quad ; \quad B: 3x \quad ; \quad C: 5x$$

$$A + B + C = 180 \quad ; \quad 2x + 3x + 5x = 180 \rightarrow x = 18 \Rightarrow A: 36^\circ, B: 54^\circ, C: 90^\circ$$

6. A tiene 3,30\$ en monedas de 10 ctvs. y de 20 ctvs. Si tiene en total 24 monedas, ¿cuántas son de cada clase?

# de monedas	Valor en ctvs	Planteo:
De 10 ctvs $x$	$10x$	$10x + 20(24 - x) = 330 \rightarrow x = 5$
De 20 ctvs $24 - x$	$20(24 - x)$	

15 de 10 ctvs  
9 de 20 ctvs

7. Un muchacho tiene 3,50\$ en piezas de 5 ctvs. y de 10 ctvs. Si el número de piezas de 5 ctvs. es el triple del número de piezas de 10 ctvs., ¿cuántas piezas tiene de cada clase?

# de monedas	valor en ctvs	\$3,50 = 350 ctvs
piezas de 5 ctvs $3x$	$15x$	$15x + 10x = 350 \rightarrow x = 14$
piezas de 10 ctvs $x$	$10x$	14 de 10 ctvs ; 42 de 5 ctvs

8. Un hombre tiene 45\$ en billetes de 5\$ y de 1\$. Si el número de billetes de 1\$ es el cuádruplo del número de billetes de 5\$, ¿cuántos billetes tiene de cada denominación?

billetes de 5\$ $x$	$5x$	Planteo $5x + 4x = 45 \rightarrow x = 5$
billetes de 1\$ $4x$	$4x$	billetes de 5\$ 5 ; billetes de 1\$ 20

9. En una alcancía hay 65 monedas que suman 8,75\$. El número de piezas de 20 ctvs. es el doble del número de piezas de 5 ctvs. y las restantes monedas son de 10 ctvs. ¿Cuántas hay de cada clase?

# de monedas			
monedas de 20 ctvs $2x$	$40x$	Planteo: $40x + 5x + 10(65 - 3x) = 875$	
monedas de 5 ctvs $x$	$5x$	$x = 15$	
monedas de 10 ctvs $65 - 3x$	$10(65 - 3x)$	15 de 5 ctvs ; 20 de 10 ctvs ; 30 de 20 ctvs.	

10. La entrada en un cine cuesta 10\$ los mayores y 6\$ los menores. Una noche entraron 320 personas y pagaron 2720\$. ¿Cuántos mayores y cuantos menores entraron?

Menores $x$	$6$	$6x$	Planteo: $6x + 10(320 - x) = 2720 \rightarrow x = 120$
Mayores $320 - x$	$10$	$10(320 - x)$	Mayores 200 ; Menores 120

11. En un número de dos cifras, la cifra de las unidades excede en 2 la cifra de las decenas. Si al número se le agrega el triple de sus unidades resulta 36. Averiguar el número.

Unidades $(x + 2)$	Decenas $x$	número $(10x + x + 2)$
Planteo: $10x + x + 2 + 3(x + 2) = 36 \rightarrow x = 2$ Unidades 4 ; Decenas 2 ; # buscado es 24		

12. La diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número de dos cifras es 6. Si al número se le agrega el duplo de la suma de los valores absolutos de sus cifras se obtiene 87. Hallar el número.

Unidades $x$	Decenas $x + 6$	número $10(x + 6) + x$
Planteo: $10(x + 6) + x + 2(x + x + 6) = 87 \rightarrow x = 1$		
Unidades 1      Decenas 7 $\Rightarrow$ El número buscado es 71		

13. En un número de dos cifras la cifra de las decenas es igual al duplo de las cifras de las unidades. Si al número se resta 27 se obtiene otro número con las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

Unidades  $x$     Decenas  $2x$     número  $(20x + x)$     # invertido  $(10x + 2x)$

Planteo:  $20x + x - 27 = 10x + 2x \rightarrow x = 3 \Rightarrow$  Unidades 3; Decenas 6, El # es 63

14. La cifra de las unidades de un número de dos cifras es igual al triplo de la cifra de las decenas. Si el número se divide entre la cifra de las unidades el cociente es 4 y el residuo es 1. Hallar el número. (Téngase en cuenta la relación  $\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{residuo}$ ).

Unidades  $3x$     Decenas  $x$     número  $10x + 3x$

Unidades 3  $\Rightarrow$  El # es 13

Planteo:  $D = dq + r$ ;  $10x + 3x = 3x(4) + 1 \rightarrow x = 1$

Decenas 1

15. La cifra de las decenas de un número de dos cifras excede en 3 a la cifra de las unidades. Si el número se divide entre la suma de sus cifras el cociente es 7 y el residuo es 3. Hallar el número.

Unidades  $x$     Decenas  $x+3$     número  $10(x+3) + x$     Suma de cifras  $2x+3$

Planteo:  $D = dq + r$ ;  $10(x+3) + x = (2x+3)7 + 3 \rightarrow x = 2$     Unidades 2, Decenas 5  $\Rightarrow$  El # es 52

16. La cifra de las decenas de un número de 3 cifras excede en 1 a la cifra de las unidades y la cifra de las centenas es igual al duplo de la cifra de las decenas. La suma de los valores absolutos de las cifras del número es 7. ¿Cuál es el número?

Unidades  $x$     Decenas  $x+1$     Centenas  $2(x+1)$

Planteo:  $x + (x+1) + 2(x+1) = 7 \rightarrow x = 1$     Unid. 1; D=2; C=4  $\Rightarrow$  El número es 421

17. En un número de 3 cifras la cifra de las unidades excede en 5 a la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en 1 a la cifra de las centenas. La cifra de las unidades es el duplo de la suma de las cifras de las decenas y centenas. ¿Cuál es el número?

Unidades  $(x+5)$     Decenas  $(x+1)$     Centenas  $x$

Planteo:  $x+5 = 2(x+1+x) \rightarrow x = 1$     Unidades 6, Decenas 2, Centenas 1  $\Rightarrow$  El # es 126

18. En un número de 3 cifras la cifra de las centenas excede en 5 unidades de la cifra de las decenas. La cifra de las decenas aumentada en 2 es igual a la cifra de las unidades. Si al número se agrega la suma de los valores absolutos de sus cifras se obtiene 851. Hallar el número.

Unidades  $(x+2)$     Decenas  $x$     Centenas  $(x+5)$     número  $100(x+5) + 10x + x+2$

Planteo:  $100(x+5) + 10x + x+2 + x+2 + x+5 = 851 \rightarrow x = 3$

Unidades 5    Decenas 3    Centenas 8  $\Rightarrow$  El número es 835

19. La cifra de las unidades de un número de tres cifras es el duplo de la cifra de las decenas; y la cifra de las decenas es el duplo de la cifra de las centenas. Si se invierte el orden de las cifras y del número resultante se resta el número primitivo se obtiene 594. ¿Cuál es el número?

Unidades $4X$ , Decenas $(2X)$ Centenas $X$ #primitivo $(100X+20X+4X)$	
# invertido $400X+20X+X$	Unidades $8$ Decenas $1$
Planteo: $400X+20X+X-(100X+20X+4X)=594 \rightarrow X=2$	Centenas $2 \Rightarrow$ El # es $218$

20. Las cifras de un número de tres cifras son tres números consecutivos, siendo la cifra de las centenas el número menor y la cifra de las unidades el número mayor. Si el número se divide por el número de dos cifras que forman las decenas y unidades el cociente es 8 y el resto es también 8. Hallar el número.

Unidades # mayor	$X+2$	Planteo: $D = dq + r$
Decenas # intermedio	$X+1$	$100X+10X+10+X+2 = (10X+10+X+2)8 + 8$
Centenas # menor	$X$	$X = 4$
número primitivo	$100X+10X+10+X+2$	Unidades $6$ Decenas $5$ Centenas $4$
número de dos cifras	$10X+10+X+2$	El número es $456$

### Ejercicio 45 (REPASO)

1. Resolver y comprobar las ecuaciones siguientes:

a.-  $4X-5=2X+7 \rightarrow 4X-2X=7+5 \rightarrow X=6$

b.-  $6-7X-14=8-2X+3X; -7X+2X-3X=8+14-6 \rightarrow X=-2$

c.-  $1,4+2,1X=6,4-1,9X; 2,1X+1,9X=6,4-1,4 \rightarrow X=1,25$

d.-  $4(2X-1)+3=6(X-1); 8X-6X=-6+4-3 \rightarrow X=-2,5$

e.-  $2(X-3)-3(X-1)=5(X+3); 2X-3X-5X=15+6-3 \rightarrow X=-3$

f.-  $X-[5-(2X-1)]=1-X; X-5+2X-1=1-X \rightarrow X=1,75$

g.-  $1-\{X-[3X-(1-X)]+1\}=X+3; 1-\{X-3X+2-X+1\}=X+3; -X+3X+X-X=3+2 \rightarrow X=2,5$

h.-  $X^2-(X+1)(X-3)=4(X-2); X^2-X^2+2X+3=4X-8; -2X=-11 \rightarrow X=5,5$

i.-  $(Y+1)(Y-3)+(Y-1)(Y+3)=2Y(Y+2); Y^2-2Y-3+Y^2+2Y-3=2Y^2+4Y; -4Y=6 \rightarrow Y=-1,5$

j.-  $(X-2)(X-3)-(X+1)(X+1)=X-[2-(X-4)]; X^2-5X+6-X^2-3X-2=X-2+X-4 \rightarrow X=1$

2. Representar algebraicamente:

a.- El duplo de un número más el cuadrado del mismo número.  $2X+X^2$

b.- Tres números impares consecutivos. número par  $2p$ , número impar  $2p+1$   
 $1^{\circ} 2p+1 \quad 2^{\circ} 2p+3 \quad 3^{\circ} 2p+5 \quad \text{ó} \quad X, X+2, X+4$

c.- La edad actual de una persona que hace  $X$  años tenía 25 años.  
 hace  $X$  años  $\rightarrow 25$  Edad actual  $\rightarrow 25+X$

d.- Un número cuya cifra de los millares es  $X$ , cuya cifra de las centenas es  $2X$ , cuya cifra de las decenas es  $X+2$  y cuya cifra de las unidades es  $X-1$ .  
 millares  $X$  ; Centenas  $2X$  ; Decenas  $X+2$  ; Unidades  $X-1$  ;

número  $1000x + 100(x) + 10(x+2) + (x-1)$

e. El número de pesos en  $m$  billetes de 10\$,  $n$  billetes de 50\$ y  $p$  billetes de 100\$.

$m$  billetes de 10\$  $\rightarrow 10m$

$n$  billetes de 50\$  $\rightarrow 50n$

$p$  billetes de 100\$  $\rightarrow 100p$

Total  $10m + 50n + 100p$

3. Seis veces un número es igual al duplo del mismo número más 28. Hallar el número.

Sea  $x$  un número ;  $6x = 2x + 28 \rightarrow x = 7$

4. A tiene cuatro veces tantas fichas como B y entre ambas tienen 160 fichas. ¿Cuántas tiene cada uno?

$A = 4x$  ;  $B = x$        $4x + x = 160 \rightarrow x = 32$        $A = 128$  Fichas ;  $B = 32$  Fichas

5. Hallar tres números pares consecutivos cuya suma es 78.      número par  $2n$

1º  $2n$  ; 2º  $2n+2$  ; 3º  $2n+4$  :  $6n+6 = 78 \rightarrow n=12 \Rightarrow$  Los números son 24, 26, 28.

6. A, B y C son socios. ¿Cómo deben repartirse una ganancia de 6600\$ si a C corresponde el triple de lo que corresponde a B y a A la mitad de lo que corresponde a C?

$A = x/2$  ;  $B = x/3$  ;  $C = x$       Planteo:  $x/2 + x/3 + x = 6600 \rightarrow x = 3600$

$A = x/2 = 1800$  ;  $B = x/3 = 1200$  ;  $C = x = 3600$

7. José tiene doble dinero que Pedro. Si José da 30\$ a Pedro entonces éste tiene 10\$ más que José. ¿Cuánto tiene cada uno?

José     $2x$        $2x-30$       Planteo:  $x+30 = 2x-30+10 \rightarrow x = 50$

Pedro     $x$        $x+30$       Pedro 50\$ ; José 100\$

8. A y B juegan uno contra otro. A empieza con doble dinero que B pero pierde 90\$ y entonces A tiene la quinta parte de lo que tiene B. ¿Con cuánto comenzó cada uno?

A     $2x$        $2x-90$       Planteo:  $2x-90 = 1/5(x+90) \rightarrow x = 60$

B     $x$        $x+90$       A-120\$ ; B-60\$

9. A, B y C van a comprar un almacén a partes iguales. Si admitiesen un socio más, cada uno tendría que aportar 6000\$ menos. ¿Cuánto vale el almacén?

Al principio son     $3x$       Planteo:  $3x = 4(x-6000) \rightarrow x = 24000$

aumentar     $4x$        $x-6000$       Valor del almacén  $3x = 72000$

10. La edad de un padre es el quintuplo de la de su hijo. Dentro de 7 años la edad del padre será el triple de la edad del hijo. Hallar la edad actual de cada uno.

Padre  $5x$   $5x+7$  Planteo:  $5x+7=3(x+7) \rightarrow x=7$

Hijo  $x$   $x+7$  Padre  $5x = 35$  años ; Hijo  $x = 7$  años

11. Un padre tiene 31 años y su hijo 4. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la del hijo?

Padre 31  $31+x$  planteo:  $31+x=2(4+x) \rightarrow x=23$  años

Hijo 4  $4+x$

12. Dividir un ángulo de  $120^\circ$  en dos partes cuyas medidas estén entre sí como 7:3.

1ª parte  $7x$ ; 2ª parte  $3x$  : Planteo:  $7x+3x=120 \rightarrow x=12 \Rightarrow$  Las partes son  $84^\circ$  y  $36^\circ$

13. El denominador de un quebrado es igual al duplo del denominador más 1. Si se suman 4 al numerador y al denominador, el nuevo quebrado se reduce a  $\frac{2}{3}$ . Hallar el quebrado primitivo.

Nº.  $x$   $x+4$  Planteo:  $\frac{x+4}{2x+5} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x+12=4x+10; x=2 \Rightarrow \frac{2}{5}$

De:  $2x+1$   $2x+1+4$

14. Un rectángulo tiene 4m más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 10m más y el ancho 8m menos el área sería la misma. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Dim. Orig. D. Mod.  $A_1 = A_2$

A  $x$   $x-8$   $x(x+4) = (x-8)(x+14); x^2+4x = x^2+6x-112 \rightarrow x=56$

L  $x+4$   $x+4+10$  A: 56m ; L: 60m

15. Tengo 280¢ en billetes de 5, 10 y 20 pesos. En total tengo 26 billetes y hay tantos billetes de 5\$ como de 20\$. ¿Cuántos tengo de cada clase?

De 5 pesos  $x$   $5x$  Planteo:  $5x+10(26-2x)+20x=280 \rightarrow x=4$

de 10 pesos  $26-2x$   $10(26-2x)$  4 billetes de 5 pesos

de 20 pesos  $x$   $20x$  18 billetes de 10 pesos ; 4 billetes de 20 pesos

16. La cifra de las decenas en un número de dos cifras es el triple de la cifra de las unidades. Si del número se resta la suma de los valores absolutos de sus cifras se obtiene 81. ¿Cuál es el número?

Unidades  $x$  Decenas  $3x$  Número  $(30x+x)$

Planteo:  $30x+x-(x+3x)=81 \rightarrow x=3 \Rightarrow$  Unidades 3; decenas 9  $\rightarrow$  El Nº es 93

17. En un número de tres cifras de las centenas es el duplo de la cifra de las unidades. La cifra de las unidades excede en 1 la cifra de las decenas. Si del número se resta 297 se obtiene otro número con las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es el número?

Unidades  $x$  decenas  $x-1$  centenas  $2x$  Número  $200x+10(x-1)+x$

Número invertido  $100x+10(x-1)+2x$

Planteo:  $200x+10x-10+x-297=100x+10x-10+2x \rightarrow x=3$  ; Un: 3; D: 2; C: 6  $\rightarrow$  El Nº es 623

18. Un estanque tiene 2000 litros de capacidad y contiene una cantidad de agua que es los dos tercios de lo que le falta para llenarse. ¿Qué cantidad de agua hay en el estanque?

Agua  $x$

falta de llenar  $2000-x$

19. Un capitalista dispone de 20000\$ que invierte parte al 3% y parte al 4% de interés anual. Si el interés total que percibe es de 680\$, determinar las cantidades que ha

invertido al 3% y al 4% respectivamente.

Al 3%  $x$   $0,03x$  Planteo:  $0,03x + 0,04(10000 - x) = 680$

Al 4%  $10000 - x$   $0,04(10000 - x)$   $x = 12000 \Rightarrow 12000\$$  al 3%;  $8000\$$  al 4%

20. En una sección del parque zoológico hay llamas y avestruces. Si hay 17 cabezas y 56 patas, ¿cuántos animales hay de cada clase?

llamas  $x$   $4x$  Planteo:  $4x + 2(17 - x) = 56 \rightarrow x = 11$

avestruces  $17 - x$   $2(17 - x)$  llamas 11 ; avestruces 6

21. Con el dinero que tiene Juan puede comprar 7 naranjas y le sobran 30 centavos, o bien comprar 4 manzanas y le sobran 20 centavos. Si cada manzana vale 40 centavos más que cada naranja, ¿cuál es el precio de cada fruta y cuánto dinero tiene Juan?

Manzana  $x + 40$   $4(x + 40) + 20$  Planteo:  $7x + 30 = 4(x + 40) + 20 \rightarrow x = 50$

Naranja  $x$   $7x + 30$  Naranjas 50cts; Manzanas 90cts; Juan  $7x + 30 = 380$ cts.

22. A empieza un juego y gana 10\$. Después duplica su dinero, pierde 25\$ y queda igual que al principio. ¿Con cuánto dinero comenzó el juego?

al inicio gana 10\$ duplica pierde 25\$ Planteo:  $2(x + 10) - 25 = x \rightarrow x = 5\$$

A  $x$   $x + 10$   $2(x + 10)$   $2(x + 10) - 25$

23. Un hombre empieza a jugar y pierde 20\$. Después duplica lo que le queda, pierde 15\$ triplica lo que le queda y sale ganando 80\$. ¿Con cuánto comenzó el juego?

al inicio pierde 20\$ duplica pierde 15\$ triplica

El Hom.  $x$   $x - 20$   $2(x - 20)$   $2(x - 20) - 15$   $3[2(x - 20) - 15]$

Planteo: Total = inicio + 80  $\rightarrow 3[2(x - 20) - 15] = x + 80 \rightarrow x = 49\$$

24. En un velódromo entraron 18 400 espectadores. Había 900 más hombres que mujeres y el número de niños era la tercera parte del número de mujeres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños entraron?

hombres  $3x + 900$  Mujeres  $3x$  Niños  $x$  Hombres 8 400

Planteo:  $3x + 900 + 3x + x = 18400 \rightarrow x = 2500$  Mujeres 7 500 ; Niños 2 500

25. Determinar la cantidad de agua que se debe agregar a 10 litros de solución de ácido nítrico al 60% para reducirla a una solución al 50%. (Se dice que una solución de ácido nítrico es al 60% cuando contiene 60 gramos de ácido nítrico en 100 cm<sup>3</sup> de solución).

Nº de litros porcentaje % Planteo:  $0,06(10) = 0,05(10 + x) \rightarrow x = 2$  litros

10 60%

10 + x 50%

26. El radiador de un automóvil contiene 16 litros de una mezcla que tiene 20% de antióxido. Se quiere sacar una parte de la mezcla y reemplazarla con antióxido puro con el fin de elevar el porcentaje de antióxido en la mezcla a 25%. ¿Qué cantidad debe reemplazarse?

$x$  cantidad que se reemplaza ;  $(16 - x)$  al 20% ;  $(16)$  al 25%

Planteo:  $0,2(16 - x) = 0,25(16) - x \rightarrow x = 1$  litro



## CAPITULO 07

## PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

## Ejercicio 46

Efectuar los productos siguientes:

Reglas:  $m(a+b+c) = ma+mb+mc$ ;  $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

1.  $a(b+c-d) = ab+ac-ad$
2.  $a^2(a-b+c) = a^3-a^2b+a^2c$
3.  $2x^2(x+y+z) = 2x^3+2x^2y+2x^2z$
4.  $a^3(a^2-a+3) = a^5-a^4+3a^3$
5.  $(p+q)(m+n) = pm+pn+qm+qn$
6.  $(p+q)(m-n) = pm-pn+qm-qn$
7.  $(x-y)(u-v) = xu-xv-yu+yv$
8.  $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
9.  $(3x-2y)(a+b) = 3ax+3bx-2ay-2by$
10.  $(2x-y)(3a-2b) = 6ax-4bx-3ay+2by$

## Ejercicio 47

Aplicar las reglas dadas anteriormente a los ejemplos siguientes:

Reglas:  $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ;  $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ;  $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

1.  $(c+d)^2 = c^2+2cd+d^2$
2.  $(3a+b)^2 = 9a^2+6ab+b^2$
3.  $(x+2y)^2 = x^2+4xy+4y^2$
4.  $(a+1)^2 = a^2+2a+1$
5.  $(3+b)^2 = 9+6b+b^2$
6.  $(4x+y)^2 = 16x^2+8xy+y^2$
7.  $(a^2+b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4$
8.  $(x^3+y^3)^2 = x^6+2x^3y^3+y^6$
9.  $(x^2+x)^2 = x^4+2x^3+x^2$
10.  $(a^3+b^3)^2 = a^6+2a^3b^3+b^6$
11.  $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$
12.  $(x-3)^2 = x^2-6x+9$
13.  $(5-a)^2 = 25-10a+a^2$
14.  $(2a-3b)^2 = 4a^2-12ab+9b^2$
15.  $(a-4b)^2 = a^2-8ab+16b^2$
16.  $(3x-1)^2 = 9x^2-6x+1$
17.  $(x^2-y^2)^2 = x^4-2x^2y^2+y^4$
18.  $(p^2-q^2)^2 = p^4-2p^2q^2+q^4$
19.  $(x^3-y^3)^2 = x^6-2x^3y^3+y^6$
20.  $(a^2-b^2)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$
21.  $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
22.  $(x-y+z)^2 = x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$
23.  $(3a+2b-c)^2 = 9a^2+4b^2+c^2+12ab-6ac-4bc$
24.  $(x^2+y^2-z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

## Ejercicio 48

Aplicar la regla anterior a los ejemplos siguientes:

Regla:  $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

1.  $(11+3)(11-3) = 11^2-3^2 = 121-9 = 112$
2.  $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

3.  $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$
4.  $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$
5.  $(x-5y)(x+5y) = x^2 - 25y^2$
6.  $(2a-b)(2a+b) = 4a^2 - b^2$
7.  $(3a+2b)(3a-2b) = 9a^2 - 4b^2$
8.  $(x+10)(x-10) = x^2 - 100$
9.  $(6-a)(6+a) = 36 - a^2$
10.  $(ab+2)(ab-2) = a^2b^2 - 4$
11.  $(a^2+b)(a^2-b) = a^4 - b^2$
12.  $(a^2+b^2)(a^2-b^2) = a^4 - b^4$
13.  $(x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6 - y^6$
14.  $(5ax+y)(5ax-y) = 25a^2x^2 - y^2$
15.  $(3p^2+2q^2)(3p^2-2q^2) = 9p^4 - 4q^4$
16.  $(0,2+a^2)(0,2-a^2) = 0,04 - a^4$
17.  $(x+y+z)(x+y-z) = (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
18.  $(ax+by+c)(ax+by-c) = (ax+by)^2 - c^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - c^2$
19.  $(1+a+b)(1+a-b) = (1+a)^2 - b^2 = 1 + 2a + a^2 - b^2$
20.  $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2) = [(a^2+b^2)-ab][(a^2+b^2)+ab] = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4$

### Ejercicio 49

Hallar los productos siguientes:

Regla:  $(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$  ;  $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

1.  $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$
2.  $(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$
3.  $(x-1)(x+4) = x^2 + 3x - 4$
4.  $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$
5.  $(x+6)(x-2) = x^2 + 4x - 12$
6.  $(a+3)(a-1) = a^2 + 2a - 3$
7.  $(a+8)(a-6) = a^2 + 2a - 48$
8.  $(a-5)(a-9) = a^2 - 14a + 45$
9.  $(y+10)(y+12) = y^2 + 22y + 120$
10.  $(b+8)(b-12) = b^2 - 4b - 96$
11.  $(x+2y)(x+3y) = x^2 + 5xy + 6y^2$
12.  $(x-4y)(x-2y) = x^2 - 6xy + 8y^2$
13.  $(a-3b)(a+5b) = a^2 + 2ab - 15b^2$
14.  $(ab+3)(ab-4) = a^2b^2 - ab - 12$
15.  $(ab+2c)(ab-4c) = a^2b^2 - 2abc - 8c^2$
16.  $(2x+3)(3x+2) = 6x^2 + (9+4)x + 6 = 6x^2 + 13x + 6$
17.  $(2x+5)(3x+4) = 6x^2 + 23x + 20$
18.  $(4x+1)(3x+5) = 12x^2 + 23x + 5$
19.  $(2x-3)(4x+1) = 8x^2 - 10x - 3$
20.  $(5a-2)(3a+4) = 15a^2 + (20-6)a - 8 = 15a^2 + 14a - 8$
21.  $(8m+3)(2m-5) = 16m^2 - 34m - 15$
22.  $(7b-2)(2b-3) = 14b^2 + (-21-4)b + 6 = 14b^2 - 25b + 6$
23.  $(9x-1)(8x+1) = 72x^2 + x - 1$
24.  $(3x+10)(2x-15) = 6x^2 - 25x - 150$
25.  $(10p-1)(2p+3) = 20p^2 + (30-2)p - 3 = 20p^2 + 28p - 3$
26.  $(3x-2y)(4x+y) = 12x^2 + (3y-8y)x + 2y^2 = 12x^2 - 5xy + 2y^2$
27.  $(2x-y)(3x+4y) = 6x^2 + (8y-3y)x - 4y^2 = 6x^2 + 5xy - 4y^2$
28.  $(a-2b)(2a+b) = 2a^2 + (b-4b)a - 2b^2 = 2a^2 - 3ab - 2b^2$
29.  $(5a-2b)(4a+3b) = 20a^2 + (15b-8b)a - 6b^2 = 20a^2 + 7ab - 6b^2$
30.  $(4a-7b)(3a-10b) = 12a^2 + (-40b-21b)a + 70b^2 = 12a^2 - 61ba + 70b^2$

## Ejercicio 50

Aplicar  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  ó  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  siguientes ejm:

- $(30+5)^3 = 30^3 + 3(30)^2 \cdot 5 + 3(30)(5)^2 + 5^3 = 27000 + 13500 + 2250 + 125 = 42875$
- $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3(x)(2)^2 + (2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- $(1+b)^3 = 1^3 + 3(1)^2(b) + 3(1)(b)^2 + b^3 = 1 + 3b + 3b^2 + b^3$
- $(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(y) + 3(2x)(y)^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
- $(a+4b)^3 = a^3 + 3(a)^2(4b) + 3(a)(4b)^2 + (4b)^3 = a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$
- $(40-5)^3 = (40)^3 - 3(40)^2(5) + 3(40)(5)^2 - (5)^3 = 42875$
- $(x-3)^3 = x^3 - 3x^2(3) + 3x(3)^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
- $(2-a)^3 = 2^3 - 3(2)^2(a) + 3(2)a^2 - a^3 = 8 - 12a + 6a^2 - a^3$
- $(x-2y)^3 = x^3 - 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
- $(2a-3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3 = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- $(x^2+y^2)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(y^2) + 3x^2(y^2)^2 + (y^2)^3 = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6$
- $(a^2-b^2)^3 = (a^2)^3 - 3(a^2)^2(b^2) + 3a^2(b^2)^2 - (b^2)^3 = a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6$
- $(2x^2+3y^2)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(3y^2) + 3(2x^2)(3y^2)^2 + (3y^2)^3 = 8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^4 + 27y^6$
- $(3x^2-5y^2)^3 = (3x^2)^3 - 3(3x^2)^2(5y^2) + 3(3x^2)(5y^2)^2 - (5y^2)^3 = 27x^6 - 135x^4y^2 + 225x^2y^4 - 125y^6$
- $(a^3+b^3)^3 = (a^3)^3 + 3(a^3)^2(b^3) + 3(a^3)(b^3)^2 + (b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$
- $(a^3-b^3)^3 = (a^3)^3 - 3(a^3)^2(b^3) + 3(a^3)(b^3)^2 - (b^3)^3 = a^9 - 3a^6b^3 + 3a^3b^6 - b^9$
- $(ab+cd)^3 = (ab)^3 + 3(ab)^2(cd) + 3(ab)(cd)^2 + (cd)^3 = a^3b^3 + 3a^2b^2cd + 3ab^2c^2d + c^3d^3$
- $(m-pq)^3 = m^3 - 3m^2pq + 3mp^2q^2 - p^3q^3$
- $(x^4+y)^3 = (x^4)^3 + 3(x^4)^2(y) + 3(x^4)(y)^2 + (y)^3 = x^{12} + 3x^8y + 3x^4y^2 + y^3$
- $(x-y^3)^3 = x^3 - 3x^2y^3 + 3x(y^3)^2 - (y^3)^3 = x^3 - 3x^2y^3 + 3xy^6 - y^9$

## Ejercicio 51

i. Aplicar  $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$  ó  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$  a los ejemplos siguientes:

- $(2+3)(2^2-2 \cdot 3+3^2) = 2^3+3^3 = 8+27 = 35$
- $(m+n)(m^2-mn+n^2) = m^3+n^3$
- $(a+2)(a^2-2a+4) = a^3+2^3$
- $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$
- $(3+b)(9-3b+b^2) = 3^3+b^3 = 27+b^3$
- $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) = 8a^3-(3b)^3 = 8a^3-27b^3$
- $(a^2+1)(a^4-2a^2+4) = a^6+8$
- $(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2) = x^6-y^3$
- $(2a^2+b^2)(4a^4-2a^2b^2+b^4) = 8a^6+b^6$
- $(5a+2b)(25a^2-10ab+4b^2) = 125a^3+8b^3$
- $(p-q)(p^2+pq+q^2) = p^3-q^3$
- $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$
- $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3-3^3 = y^3-27$
- $(2-a)(4+2a+a^2) = 8-a^3$
- $(x-5y)(x^2+5xy+25y^2) = x^3-125y^3$
- $(b^2-2)(b^4+2b^2+4) = b^6-8$
- $(a+b^2)(a^2-ab^2+b^4) = a^3+b^6$
- $(2x^2-y^2)(4x^4+2x^2y^2+y^4) = 8x^6-y^6$

$$19. (a^3 - b^3)(a^4 + a^3b^3 + b^4) = (a^3)^3 - (b^3)^3 = a^9 - b^9$$

$$20. [(x+y)+3][(x+y)^2 - 3(x+y) + 9] = (x+y)^3 + 27$$

II. Compruébese que:

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5 \quad \text{Efectuando la multiplicación:}$$

$$\begin{array}{r} a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \underline{a-b} \\ a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 \\ - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\ \hline a^5 \qquad \qquad \qquad - b^5 \text{ demostrado} \end{array}$$

III. Compruébese que:  $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$

$$\begin{array}{r} a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\ \underline{a+b} \\ a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 \\ + a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5 \\ \hline a^5 \qquad \qquad \qquad + b^5 \text{ demostrado} \end{array}$$

IV. Compruébese que:  $(a^4 + b^4)(a^8 - a^4b^4 + b^8) = a^{12} + b^{12}$

$$\begin{array}{r} a^8 - a^4b^4 + b^8 \\ \underline{a^4 + b^4} \\ a^{12} - a^8b^4 + a^4b^8 \\ + a^8b^4 - a^4b^8 + b^{12} \\ \hline a^{12} \qquad + \qquad b^{12} \text{ demostrado} \end{array}$$

### Ejercicio 52

Escribir los cocientes correspondientes teniendo en cuenta 65-1 a 65-7

$$65-1 \quad (ma + mb + mc)/m = a + b + c$$

$$65-2 \quad (a^2 + 2ab + b^2)/(a+b) = a+b$$

$$65-3 \quad (a^2 - 2ab + b^2)/(a-b) = a+b$$

$$65-4 \quad (a^3 - b^3)/(a+b) = a-b$$

$$65-5 \quad (a^2 - b^2)/(a-b) = a+b$$

$$65-6 \quad (a^3 + b^3)/(a+b) = a^2 - ab + b^2$$

$$65-7 \quad (a^3 - b^3)/(a-b) = a^2 + ab + b^2$$

$$1. (ax - ay + az)/a = x - y + z$$

$$2. (ab + bc + b^2)/b = a + c + b$$

$$3. (2am - 4bm + 10cm)/2m = a - 2b + 5c$$

$$4. (x^2yz + xy^2z + xyz^2)/xyz = x + y + z$$

$$5. (x^2 + 2x + 1)/(x+1) = x+1$$

$$6. (a^2 + 10a + 25)/(a+5) = a+5$$

$$7. (x^2 + 12xy + 36y^2)/(x+6y) = x+6y$$

$$8. (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)/(a^2 + b^2) = a^2 + b^2$$

$$9. (m^2 - 2m + 1)/(m-1) = m-1$$

$$10. (b^2 - 8b + 16)/(b-4) = b-4$$

11.  $(4p^3 - 20pq + 25q^2)/(2p - 5q) = 2p - 5q$
12.  $(a^3 - 2a^2b + b^3)/(a^2 - b^2) = a^2 - b^2$
13.  $x^3 - 1/x + 1 = x - 1$
14.  $(4 - y^3)/(2 + y) = 2 - y$
15.  $(9a^3 - 4b^3)/(3a + 2b) = 3a - 2b$
16.  $(100a^3b^3 - 1)/(10ab + 1) = 10ab - 1$
17.  $(a^3 - 16)/(a - 4) = a + 4$
18.  $(25 - b^3)/(5 - b) = 5 + b$
19.  $(49x^2 - 36y^2)/7x - 6y = 7x + 6y$
20.  $(a^3b^3 - c^3)/(ab - c) = ab + c$
21.  $(a^3 + 1)/a + 1 = a^2 - a + 1$
22.  $(a^3 + 27)/(a + 3) = a^2 - 3a + 9$
23.  $(8x^3 + y^3)/(2x + y) = 4x^2 - 2xy + y^2$
24.  $(a^3b^3 + c^3)/(ab + c) = a^2b^2 - abc + c^2$
25.  $(x^3 - 1)/(x - 1) = x^2 + x + 1$
26.  $(y^3 - 8)/y - 2 = y^2 + 2y + 4$
27.  $(125 - x^3)/(5 - x) = 25 + 5x + x^2$
28.  $(8x^3 - 27y^3)/(2x - 3y) = 4x^2 + 6xy + 9y^2$
29.  $(x^3 - y^3z^3)/(x - yz) = x^2 + xyz + y^2z^2$
30.  $[(a+b)^3 - c^3]/[(a+b) - c] = (a+b)^2 + c(a+b) + c^2$

### Ejercicio 53 (REPASO)

I. Hallar los productos siguientes:

1.  $3x^2(x - y + z) = 3x^3 - 3x^2y + 3x^2z$
2.  $2a^2(2a + 3b - 2c) = 4a^3 + 6a^2b - 4a^2c$
3.  $(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$
4.  $(m^3 + n^3)(p^3 + q^3) = m^3p^3 + m^3q^3 + n^3p^3 + n^3q^3$
5.  $(a - 3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2$
6.  $(x^2 + 2y^2)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$
7.  $(2a - 5b)^2 = 4a^2 - 20ab + 25b^2$
8.  $(3x^2 - y^2)^2 = 9x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
9.  $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
10.  $(2x - 3y + 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 10xz - 30yz$
11.  $(x + 10y)(x - 10y) = x^2 - 100y^2$
12.  $(a^2 - 3b)(a^2 + 3b) = a^4 - 9b^2$
13.  $(x - 8)(x + 6) = x^2 - 2x - 48$
14.  $(a + 12)(a - 5) = a^2 + 7a - 60$
15.  $(2x + 3)(5x + 1) = 10x^2 + 17x + 3$
16.  $(3x - 2)(4x + 6) = 12x^2 + 10x - 12$
17.  $(2a + b)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
18.  $(3x + y^2)^3 = 27x^3 + 27x^2y^2 + 9xy^4 + y^6$
19.  $(a - 2b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3a(b^2) - (2b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 8b^3$
20.  $(x^2 - y^2)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(y^2) + 3(x^2)(y^2)^2 - (y^2)^3 = x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$
21.  $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = x^3 + 125$
22.  $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) = 27x^3 + 8y^3$
23.  $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) = a^3 - 64$
24.  $(a - 3b)(a^3 + 3ab + 9b^3) = a^4 - 27b^4$

II. Hallar los cocientes siguientes:

$$1. (4a^2 + 6ab + 8ac)/2a = 2a + 3b + 4c$$

$$2. (3a^3b^2c^2 - 1abc + ab^2c)/abc = 3abc - 1 + b^2$$

$$3. (9c^2 + 6cd + d^2)/(3c + d) = 3c + d$$

$$4. (16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)/(4x^2 + y^2) = 4x^2 + y^2$$

$$5. (x^2 - 4xy + 4y^2)/(x - 2y) = x - 2y$$

$$6. (9p^2 - 24pq + 16q^2)/(3p - 4q) = 3p - 4q$$

$$7. (a^2 - 64)/a + 8 = a - 8$$

$$8. (a^4 - 16)/(a^2 + 4) = a^2 - 4$$

$$9. (25 - y^2)/(5 - y) = 5 + y$$

$$10. (81 - z^4)/(9 - z^2) = 9 + z^2$$

$$11. (c^3 + 64)/(c + 4) = c^2 - 4c + 16$$

$$12. (1 + x^3y^3)/(1 + xy) = 1 - xy + x^2y^2$$

$$13. (216x^3 - 1)/(6x - 1) = 36x^2 + 6x + 1$$

$$14. (x^6 - y^6)/(x^3 - y^3) = x^3 + x^2y^2 + y^3$$

$$15. \frac{(x-y)^3 + z^3}{(x-y) + z} = (x-y)^2 - (x-y)z + z^2$$

$$16. \frac{(a+b)^3 - (c+d)^3}{(a+b) - (c+d)} = (a+b)^2 + (a+b)(c+d) + (c+d)^2$$

## CAPITULO 08

## DESCOMPOSICION EN FACTORES

## Ejercicio 54

Descomponer en factores :

1.  $a^2 - 2a = a(a-2)$
2.  $x^2 + x = x(x+1)$
3.  $6x^2 - 3x = 3x(2x-1)$
4.  $ay - by = y(a-b)$
5.  $a^2 + ab^2 = a(a+b^2)$
6.  $x^3 + 5x = x(x^2+5)$
7.  $x^2y^2 - xy^3 = xy^2(x-y)$
8.  $2x^3 - 4x^2 + 4x = 2x(x^2 - 2x + 2)$
9.  $x^3 + x^2 + 2x = x(x^2 + x + 2)$
10.  $a^3 - 3a^2 + a = a(a^2 - 3a + 1)$
11.  $5p^3q - 10p^2q^2 + 5p^2q^3 = 5pq(p^2 - 2q + pq)$
12.  $2b^3 - 8b^2 + 4b = 2b(b^2 - 4b + 2)$
13.  $x^4 - x^3y + x^2y^2 = x^2(x^2 - xy + y^2)$
14.  $8ab^3 - 4a^2b + 4a^3b^2 = 4ab(b^2 - a + ab)$
15.  $pqr - p^2qr + pqr^2 = pqr(1 - p + r)$
16.  $24x^3 + 16x^4 + 40x^5 = 8x^3(3 + 2x + 5x^2)$
17.  $a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^3 - a^2b^4x^4 = a^2b^2x^2(a^2 + 2abx - b^2x)$
18. corregir el ejercicio no es  $3a^2$  es  $3b^2$ :  $t^4 + 3b^2t^3 - t^4 = t^2(t^2 + 3 - t^4)$
19.  $x^5 - x^3 + x^1 = x^1(x^3 - x + 1)$
20.  $x^3y^3z^4 - 2xy^3z^3 + 3y^3z^3 = y^3z^3(x^3y^3 - 2x + 3z)$
21.  $7m^2n^3 + 14m^3n^2 - 21m^3n^4 = (m + 2m - 3m^2)7m^2n^3$
22.  $9a^4 - 6a^3x + 3a^2x^2 = 3a^2(3a^2 - 2x + ax^2)$
23.  $a^5 - a^4 + a^3 - a^2 = a^2(1 - a + a^2 - a^3)$
24.  $4a^4b^2c^4 + 8a^5b^3c^4 + 12a^6b^4c^3 = 4a^5b^3c^3(ac + 2bc + 3ab^2)$
25.  $(a+b)x + (a+b)y = (a+b)(x+y)$
26.  $(m+n)x - (m+n)y = (m+n)(x-y)$
27.  $(a+b)x + (a+b)y - (a+b)z = (a+b)(x+y-z)$
28.  $(a+3)x^2 + (a+3)y^2 = (a+3)(x^2+y^2)$
29.  $(x-z)a^2 + (x-y)b^2 + (x-y)c^2 = (x-y)(a^2+b^2+c^2)$
30.  $(a+b+c)x + (a+b+c)y = (a+b+c)(x+y)$

## Ejercicio 55

Descomponer en factores :

1.  $ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$
2.  $am - bm + an - bn = m(a-b) + n(a-b) = (m+n)(a-b)$
3.  $ap - bp - aq + bq = p(a-b) - q(a-b) = (p-q)(a-b)$
4.  $ax - my - ay + mx = x(a+m) - y(a+m) = (a+m)(x-y)$
5.  $x^2 + xz - bx - bz = x(x+z) - b(x+z) = (x+z)(x-b)$
6.  $y^2 + ay - by - ab = y(y+a) - b(y+a) = (y+a)(y-b)$
7.  $x^2 - xy - 4x + 4y = (x^2 - xy) - (4x - 4y) = x(x-y) - 4(x-y) = (x-y)(x-4)$
8.  $3xy - 2xz - 3ay + 2az = x(3y - 2z) - a(3y - 2z) = (3y - 2z)(x-a)$

9.  $ac + 2bc - ad - 2bd = c(a+2b) - d(a+2b) = (a+2b)(c-d)$
10.  $ux + vx - vx - ux = x(u-v) - v(u-v) = (u-v)(x-v)$
11.  $3ax - 3ay - 5bx + 5by = 3a(x-y) - 5b(x-y) = (x-y)(3a-5b)$
12.  $-2ax - 2ay - abx - aby = -a(2x+2y+bx+by) = -a[2(x+y)+b(x+y)] = -a(x+y)(2+b)$
13.  $am + 6bn + 3bm + 2an = m(a+3b) + 2n(a+3b) = (a+3b)(m+2n)$
14.  $ab - 3bm - 2am + 6m^2 = b(a-3m) - 2m(a-3m) = (a-3m)(b-2m)$
15.  $x^3 + x - ax^2 - a = x(x^2+1) - a(x^2+1) = (x^2+1)(x-a)$
16.  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = x^2(x+2) + 4(x+2) = (x+2)(x^2+4)$
17.  $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x^2+2)$
18.  $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = x^2(x-4) - 5(x-4) = (x-4)(x^2-5)$
19.  $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 9x = x(2x^3 + 3x^2 - 6x - 9) = x[x^2(2x+3) - 3(2x+3)] = x(2x+3)(x^2-3)$
20.  $az^4 + bz^3 - 2az - 2b = z^3(az+b) - 2(az+b) = (az+b)(z^3-2)$
21.  $m^4 - m^3 + 1 - m = (m^4 - m^3) + (1-m) = m^3(1-m) + (1-m) = (1-m)(m^3+1)$
22.  $a^2b + ac^2 - abd - c^2d = a(ab+c^2) - d(ab+c^2) = (ab+c^2)(a-d)$
23.  $2xy - yz + 6x^2 - 3xz = y(2x-z) + 3x(2x-z) = (2x-z)(y+3x)$
24.  $abx^2 + ab^2c - x^2cy - bc^2y = ab(x^2+bc) - cy(x^2+bc) = (x^2+bc)(ab-cy)$
25.  $3a^3 - 7b^3 - 9a^2 + 21ab^2 = 3a^2(1-3a) - 7b^2(1-3a) = (1-3a)(3a^2-7b^2)$
26.  $1+x - x^2yz - x^3yz = (1+x) - x^2yz(1+x) = (1+x)(1-x^2yz)$
27.  $ax + bx + ay + by + az + bz = x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = (a+b)(x+y+z)$
28.  $ax - bx + cy + ay^2 - by^2 + cy^2 = x(a-b+c) + y^2(a-b+c) = (a-b+c)(x+y^2)$
29.  $3am + 2bm - m^2 - 6an - 4bn + 2mn = m(3a+2b-m) - 2n(3a+2b-m) = (3a+2b-m)(m-2n)$
30.  $ax + ay + a - x - y - 1 = a(x+y+1) - (x+y+1) = (x+y+1)(a-1)$

### Ejercicio 56

Descomponer en factores:

1.  $9a^2 + 6ab + b^2 = (3a+b)^2$
2.  $a^2 - 4ab + 4b^2 = (a-2b)^2$
3.  $x^2 + 8xy + 16y^2 = (x+4y)^2$
4.  $x^2 - 10xz + 25z^2 = (x-5z)^2$
5.  $4a^2 - 12ac + 9c^2 = (2a-3c)^2$
6.  $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$
7.  $b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$
8.  $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$
9.  $25 - 10y + y^2 = (5-y)^2$
10.  $100x^2 + 20x + 1 = (10x+1)^2$
11.  $81a^2 - 90ab + 25b^2 = (9a-5b)^2$
12.  $64 - 48z + 9z^2 = (8-3z)^2$
13.  $121a^2 + 88ax + 16x^2 = (11a+4x)^2$
14.  $1 - 12m + 36m^2 = (1-6m)^2$
15.  $x^2 + x + 1/4 = (x+1/2)^2$
16.  $a^2 - 0,5a + 0,0625 = (a-0,25)^2$
17.  $x^2y^2 - 4xy^2z + 4z^2 = (xy-2z)^2$
18.  $4a^2 + 28abc + 49b^2c^2 = (2a+7bc)^2$
19.  $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2$
20.  $a^4 - 10a^2b^2 + 25b^4 = (a^2-5b^2)^2$



$$\begin{array}{ll}
 21. a^6 + 6a^3 + 9 = (a^3 + 3)^2 & 22. a^6 - 4a^3x^3 + 4x^6 = (a^3 - 2x^3)^2 \\
 23. z^8 + 2z^4 + 1 = (z^4 + 1)^2 & 24. a^4b^6 - 2a^2b^3c + c^2 = (a^2b^3 - c)^2 \\
 25. 4a^4 - 36a^2b^2 + 81b^4 = (2a^2 - 9b^2)^2 & 26. 0,01 - 0,2x^2 + x^4 = (0,1 - x^2)^2 \\
 27. (a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2 = (a+b-c)^2 & 28. (x+y)^2 + 4(x+y) + 4 = (x+y+2)^2 \\
 29. 16 - 8(x-z) + (x-z)^2 = [4 - (x-z)]^2 = (4-x+z)^2 \\
 30. (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 = (a+b+c+d)^2
 \end{array}$$

### Ejercicio 57

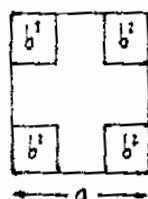
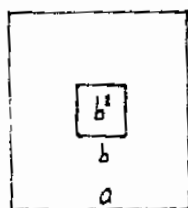
Descomponer en factores:

$$\begin{array}{ll}
 1. 80^2 - 20^2 = (80+20)(80-20) = (100)(60) = 6000 & 2. a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b) \\
 3. b^2 - 1 = (b+1)(b-1) & 4. 9x^2 - y^2 = (3x+y)(3x-y) \\
 5. 4a^2 - 9c^2 = (2a+3c)(2a-3c) & 6. 4x^2 - 25y^2 = (2x+5y)(2x-5y) \\
 7. 16 - 81a^2 = (4+9a)(4-9a) & 8. 100 - 36x^2 = (10+6x)(10-6x) \\
 9. x^2 - 0,25 = (x+0,5)(x-0,5) & 10. a^2 - 0,0001b^2 = (a+0,01b)(a-0,01b) \\
 11. a^2b^2 - 9x^2 = (ab+3x)(ab-3x) & 12. 4a^4 - b^2c^2 = (2a^2+bc)(2a^2-bc) \\
 13. a^6 - b^4 = (a^3+b^2)(a^3-b^2) & 14. x^8 - 49y^4 = (x^4+7y^2)(x^4-7y^2) \\
 15. 1000a^4 - b^4 = (20a^2+b)(20a^2-b) & 16. 4x^8 - y^{10} = (2x^4+y^5)(2x^4-y^5) \\
 17. 121m^6 - 900n^4 = (11m^3+30n^2)(11m^3-30n^2) & 18. 64x^{14} - 0,36a^{10} = (8x^7+0,6a^5)(8x^7-0,6a^5) \\
 19. 4x^2y^2z^2 - b^4 = (2xyz+b^2)(2xyz-b^2) & 20. 144x^2y^4 - z^4 = (12xy^2+z^2)(12xy^2-z^2) \\
 21. a^4 - x^4 = (a^2+x^2)(a+x)(a-x) & 22. (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c) \\
 23. 16 - b^4 = (4+b^2)(4-b^2) = (4+b^2)(2+b)(2-b) & 24. (a-b)^2 - c^2 = (a-b+c)(a-b-c) \\
 25. 1 - x^8 = (1-x^4)(1+x^4) = (1+x^4)(1+x^2)(1-x^2) = (1+x^4)(1+x^2)(1+x)(1-x) \\
 26. x^2 - (y+z)^2 = [x+(y+z)][x-(y+z)] = (x+y+z)(x-y-z) \\
 27. a^8 - 256 = (a^4+16)(a^4-16) = (a^4+16)(a^2+4)(a^2-4) = (a^4+16)(a^2+4)(a+2)(a-2) \\
 28. x^2y^2 - (a-z)^2 = [xy+(a-z)][xy-(a-z)] = (xy+a-z)(xy-a+z) \\
 29. a^{16} - 1 = (a^8+1)(a^8-1) = (a^8+1)(a^4+1)(a^4-1) = (a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1) \\
 30. (2x-y)^2 - z^2 = [(2x-y)+z][(2x-y)-z] = (2x-y+z)(2x-y-z) \\
 31. x^4 - y^8 = (x^2+y^4)(x^2-y^4) = (x^2+y^4)(x+y^2)(x-y^2) \\
 32. (x+y)^2 - (a-b)^2 = [(x+y)+(a-b)][(x+y)-(a-b)] = (x+y+a-b)(x+y-a+b) \\
 33. a^4 - 81 = (a^2+9)(a^2-9) = (a^2+9)(a^2+3)(a^2-3) \\
 34. (a-2b)^2 - (2a+b)^2 = [(a-2b)+(2a+b)][(a-2b)-(2a+b)] = -(3a-b)(a+3b) \\
 35. (x+y)^4 - 1 = [(x+y)^2+1][(x+y)^2-1] = [(x+y)^2+1][x+y+1][x+y-1] \\
 36. (2a+1)^2 - (a+2)^2 = [(2a+1)+(a+2)][(2a+1)-(a+2)] = (2a+1+a+2)(2a+1-a-2) = 3(a+1)(a-1) \\
 37. (x-2)^2 - (a+x-3)^2 = [(x-2)+(a+x-3)][(x-2)-(a+x-3)] = (2x+a-5)(1-a) \\
 38. (x-y+z)^2 - (x+y-z)^2 = [(x-y+z)+(x+y-z)][(x-y+z)-(x+y-z)] \\
 \quad = (x-y+z+x+y-z)(x-y+z-x-y+z) = 4x(-y+z) = 4x(z-y)
 \end{array}$$

$$39. (2a+2b-c)^2 - (a-b+3c)^2 = [(2a+2b-c) + (a-b+3c)][(2a+2b-c) - (a-b+3c)] \\ = (3a+b+2c)(a+3b-4c)$$

$$40. (a^2-a+1)^2 - (a^2+a+1)^2 = [(a^2-a+1) + (a^2+a+1)][(a^2-a+1) - (a^2+a+1)] = 2(a^2+1)(-2a) = -4a(a^2+1)$$

41. En la figura de la izquierda se tiene  $a = 7,7 \text{ cm}$  y  $b = 2,3 \text{ cm}$ . Hallar el área comprendida entre los dos cuadrados evaluando: 1) la expresión  $a^2 - b^2$ ; 2) la expresión  $(a+b)(a-b)$



$$1^{\text{a}} \quad a^2 - b^2 = (7,7)^2 - (2,3)^2 = 54 \text{ cm}^2$$

$$2^{\text{a}} \quad (a+b)(a-b) = (7,7+2,3)(7,7-2,3) \\ = 54 \text{ cm}^2$$

42. Hallar el área que queda de un cuadrado de lado  $a = 7,5 \text{ m}$  al cual se le ha cortado en cada esquina un cuadrado de lado  $b = 2,25 \text{ m}$  (Figura de la derecha).

$$A_T = A_1 - A_2 ; A_1 = a^2 ; A_2 = 4b^2$$

$$A_T = a^2 - 4b^2 \rightarrow A_T = (7,5)^2 - 4(2,25)^2 \rightarrow A_T = 36 \text{ m}^2$$

### Ejercicio 58

Descomponer en factores:

$$1. a^2 - 2ab + b^2 - 4x^2 = (a^2 - 2ab + b^2) - 4x^2 = [(a-b) + 2x][(a-b) - 2x] = (a-b+2x)(a-b-2x)$$

$$2. x^2 + 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - a^2 = (x+y)^2 - a^2 = (x+y+a)(x+y-a)$$

$$3. x^2 + y^2 - z^2 - 2xz = (x^2 - 2xz + z^2) - z^2 = (x-z)^2 - z^2 = (x-z+z)(x-z-z)$$

$$4. 4a^2 - 4ab + b^2 - c^2 = (4a^2 - 4ab + b^2) - c^2 = (2a-b)^2 - c^2 = (2a-b+c)(2a-b-c)$$

$$5. 9a^2 - 4c^2 + 6ab + b^2 = (9a^2 + 6ab + b^2) - 4c^2 = (3a+b)^2 - 4c^2 = (3a+b+2c)(3a+b-2c)$$

$$6. 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 16a^2 + 9y^2 = (4x^2 - 12xy + 9y^2) - 16a^2 = (2x-3y)^2 - 16a^2 = (2x-3y+4a)(2x-3y-4a)$$

$$7. a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)$$

$$8. x^2 + 2yz - y^2 - z^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) = x^2 - (y-z)^2 = (x+y-z)(x-y+z)$$

$$9. 1 - a^2 - 4ax - 4x^2 = 1 - (a^2 + 4ax + 4x^2) = 1 - (a+2x)^2 = (1+a+2x)(1-a-2x)$$

$$10. 25 - m^2 - n^2 + 2mn = 25 - (m^2 - 2mn + n^2) = 25 - (m-n)^2 = (5+m-n)(5-m+n)$$

$$11. 6xy - 9x^2 - y^2 + z^2 = z^2 - (9x^2 - 6xy + y^2) = z^2 - (3x-y)^2 = (z+3x-y)(z-3x+y)$$

$$12. 30ab - 25a^2 + 4c^2 - 9b^2 = 4c^2 - (25a^2 - 30ab + 9b^2) = 4c^2 - (5a-3b)^2 = (2c+5a-3b)(2c-5a+3b)$$

$$13. 100x^2 - y^2 - 14yz - 49z^2 = 100x^2 - (y^2 + 14yz + 49z^2) = 100x^2 - (y+7z)^2 = (10x+y+7z)(10x-y-7z)$$

$$14. 48ax - 36a^2 + y^2 - 16x^2 = y^2 - (36a^2 - 48ax + 16x^2) = y^2 - (6a-4x)^2 = (y+6a-4x)(y-6a+4x)$$

$$15. a^2 + b^2 - 2ab + 2cd - c^2 - d^2 = (a^2 - 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2) = (a-b)^2 - (c-d)^2 = (a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

$$16. x^2 - y^2 + z^2 - t^2 - 2xz - 2yt = (x^2 - 2xz + z^2) - (y^2 + 2yt + t^2) = (x-z)^2 - (y+t)^2 = (x-z+y+t)(x-z-y-t)$$

$$17. 4a^2 - 4b^2 + c^2 - 4ac + 4b - 1 = (4a^2 - 4ac + c^2) - (4b^2 - 4b + 1) = (2a-c)^2 - (2b-1)^2 = (2a-c+2b-1)(2a-c-2b+1)$$

18.  $9 - 6a - b^2 + a^3 - 10bc - 25c^2 = (9 - 6a + a^3) - (b^2 + 10bc + 25c^2) = (3 - a)^3 - (b + 5c)^2 = (3 - a + b + 5c)(3 - a - b - 5c)$
19.  $25a^2 - 16y^4 + 9x^2 + 30ax - z^2 - 8yz = (25a^2 + 30ax + 9x^2) - (16y^2 + 8yz + z^2) = (5a + 3x)^2 - (4y + z)^2 = (5a + 3x + 4y + z)(5a + 3x - 4y - z)$
20.  $4a^3 + 9m^2 - 10bc - 12am - 4c^2 - 25b^2 = (4a^3 - 12am + 9m^2) - (25b^2 + 10bc + 4c^2) = (2a - 3m)^3 - (5b + 2c)^2 = (2a - 3m + 5b + 2c)(2a - 3m - 5b - 2c)$
21.  $x^3 - y^3 - 2x - z^2 + 1 - 2yz = (x^3 - 2x + 1) - (y^3 + 2yz + z^2) = (x - 1)^3 - (y + z)^2 = (x - 1 + y + z)(x - 1 - y - z)$
22.  $6ax - 4y^4 + a^3 + 9x^3 - y^4 - 4 = (a^3 + 6ax + 9x^3) - (y^4 + 4y^2 + 4) = (a + 3x)^3 - (y^2 + 2)^2 = (a + 3x + y^2 + 2)(a + 3x - y^2 - 2)$
23.  $1 - 2x^2 + x^4 - 4y^4 - 12yz + 9z^2 = (1 - 2x^2 + x^4) - (4y^2 + 12yz + 9z^2) = (1 - x^2)^2 - (2y + 3z)^2 = (1 - x^2 + 2y + 3z)(1 - x^2 - 2y - 3z)$
24.  $25x^4 + 12x^3 + 10a^2x^2 - 9x^4 + a^4 - 4 = (25x^4 + 10a^2x^2 + a^4) - (9x^4 - 12x^3 + 4) = (5x^2 + a^2)^2 - (3x^2 - 2)^2 = (5x^2 + a^2 + 3x^2 - 2)(5x^2 + a^2 - 3x^2 + 2)$
25.  $x^2y^2 - z^4 - 2xy + 1 - 4z^2b^2 - 4b^4 = (x^2y^2 - 2xy + 1) - (z^4 + 4z^2b^2 + 4b^4) = (xy - 1)^2 - (z^2 + 2b^2)^2 = (xy - 1 + z^2 + 2b^2)(xy - 1 - z^2 - 2b^2)$
26.  $x^2 - 2xz - 1 - y^2 + 2z + z^2 = (x^2 - 2xz + z^2) - (1 - 2z + y^2) = (x - z)^2 - (1 - y)^2 = (x - z + 1 - y)(x - z - 1 + y)$
27.  $x^4 + y^4 - a^4 - b^4 - 2x^2y^2 - 2a^2b^2 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = (x^2 - y^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = (x^2 - y^2 + a^2 - b^2)(x^2 - y^2 - a^2 + b^2)$
28.  $9a^4 - 8a^3 + 6a^2b^2 - 16a^4 - 1 + b^4 = (9a^4 + 6a^2b^2 + b^4) - (16a^4 - 8a^3 + 1) = (3a^2 + b^2)^2 - (4a^2 - 1)^2 = (3a^2 + b^2 + 4a^2 - 1)(3a^2 + b^2 - 4a^2 + 1)$
29.  $4xy - 4 - a^2 - 4a + x^2 + 4y^2 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - (a^2 + 4a + 4) = (x + 2y)^2 - (a + 2)^2 = (x + 2y + a + 2)(x + 2y - a - 2)$
30.  $2a^3x^3 - x^6 - a^6 + 2b^3y^3 + b^6 + y^6 = (b^6 + 2b^3y^3 + y^6) - (x^6 - 2a^3x^3 + a^6) = (b^3 + y^3)^2 - (x^3 - a^3)^2 = (b^3 + y^3 + x^3 - a^3)(b^3 + y^3 - x^3 + a^3)$

### Ejercicio 59

Descomponer en factores: Sumando y restando

1.  $1 + x^3 + x^4$   
 $\frac{+x^3 - x^3}{1 + x^3 + x^4 - x^3}$   
 $(1 + x^3)^2 - x^3$   
 $(1 + x^3 + x)(1 + x^3 - x)$
2.  $a^4 + a^3b^2 + b^4$   
 $(a^4 + 2a^3b^2 + b^4) - a^3b^2$   
 $(a^2 + b^2)^2 - a^3b^2$   
 $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
3.  $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$   
 $(x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4) - 4x^2y^2$   
 $(x^2 + 3y^2)^2 - 4x^2y^2$   
 $(x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy)$
4.  $25x^4 + x^2y^2 + y^4 = (25x^4 + 10x^2y^2 + y^4) - 9x^2y^2 = (5x^2 + y^2)^2 - 9x^2y^2 = (5x^2 + y^2 + 3xy)(5x^2 + y^2 - 3xy)$
5.  $16a^4 + 8a^3b^2 + 9b^4 = (16a^4 + 24a^3b^2 + 9b^4) - 16a^3b^2 = (4a^2 + 3b^2)^2 - 16a^3b^2 = (4a^2 + 3b^2 + 4ab)(4a^2 + 3b^2 - 4ab)$
6.  $9a^4 - 21a^3b^2 + 4b^4 = (9a^4 - 12a^3b^2 + 4b^4) - 9a^3b^2 = (3a^2 - 2b^2)^2 - 9a^3b^2 = (3a^2 - 2b^2 + 3ab)(3a^2 - 2b^2 - 3ab)$
7.  $9x^4 + 26x^2 + 25 = (9x^4 + 30x^2 + 25) - 4x^2 = (3x^2 + 5)^2 - 4x^2 = (3x^2 + 5 + 2x)(3x^2 + 5 - 2x)$
8.  $m^4 - 17m^2 + 16 = (m^4 - 8m^2 + 16) - 9m^2 = (m^2 - 4)^2 - 9m^2 = (m^2 - 4 + 3m)(m^2 - 4 - 3m)$
9.  $a^4 - 7a^3b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^3b^2 + b^4) - 9a^3b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 9a^3b^2 = (a^2 + b^2 + 3ab)(a^2 + b^2 - 3ab)$
10.  $x^4 - 19x^2y^2 + 9y^4 = (x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4) - 25x^2y^2 = (x^2 + 3y^2)^2 - 25x^2y^2 = (x^2 + 3y^2 + 5xy)(x^2 + 3y^2 - 5xy)$
11.  $4 + a^4 = (4 + 4a^2 + a^4) - 4a^2 = (2 + a^2)^2 - 4a^2 = (2 + a^2 + 2a)(2 + a^2 - 2a)$

12.  $X^4 + 64 = (X^4 + 16X^2 + 64) - 16X^2 = (X^2 + 8)^2 - 16X^2 = (X^2 + 8 + 4X)(X^2 + 8 - 4X)$
13.  $64X^4 + 9^8 = (64X^4 + 16X^2Y^4 + Y^8) - 16X^2Y^4 = (8X^2 + Y^4)^2 - 16X^2Y^4 = (8X^2 + Y^4 + 4XY^2)(8X^2 + Y^4 - 4XY^2)$
14.  $b^4 + 1024 = (b^4 + 64b^2 + 1024) - 64b^2 = (b^2 + 32)^2 - 64b^2 = (b^2 + 32 + 8b)(b^2 + 32 - 8b)$
15.  $100X^4 + 59X^2Y^2 + 49Y^4 = (100X^4 + 140X^2Y^2 + 49Y^4) - 81X^2Y^2 = (10X^2 + 7Y^2)^2 - 81X^2Y^2$   
 $= (10X^2 + 7Y^2 + 9XY)(10X^2 + 7Y^2 - 9XY)$
16.  $36a^4 - 69a^2b^2 + 25b^4 = (36a^4 - 60a^2b^2 + 25b^4) - 9a^2b^2 = (6a^2 - 5b^2)^2 - 9a^2b^2$   
 $= (6a^2 - 5b^2 + 3ab)(6a^2 - 5b^2 - 3ab)$
17.  $a^4 + 31a^2x^2 + 400x^4 = (a^4 + 40a^2x^2 + 400x^4) - 9a^2x^2 = (a^2 + 20x^2)^2 - 9a^2x^2 = (a^2 + 20x^2 + 3ax)(a^2 + 20x^2 - 3ax)$
18.  $a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4 = (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4) - 25a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 25a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 - 5ab)(a^2 + 2b^2 + 5ab)$
19.  $a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2bc - b^2c^2 = (a^4 - 2a^2bc + b^2c^2) - (b^4 + b^2c^2 + c^4)$   

$$\frac{b^2c^2}{+ b^2c^2}$$

$$(a^4 - 2a^2bc + b^2c^2) - (b^4 + 2b^2c^2 + c^4)$$

$$(a^2 - bc)^2 - (b^2 + c^2)^2 = [(a^2 - bc) + (b^2 + c^2)][(a^2 - bc) - (b^2 + c^2)] = (a^2 - bc + b^2 + c^2)(a^2 - bc - b^2 - c^2)$$
20.  $1 + 2xy - x^2y^2 - x^4 - y^4 = (1 + 2xy + x^2y^2) - (x^4 + x^2y^2 + y^4)$   

$$\frac{x^2y^2}{+ x^2y^2}$$

$$(1 + 2xy + x^2y^2) - (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$(1 + xy)^2 - (x^2 + y^2)^2 = [(1 + xy) + (x^2 + y^2)][(1 + xy) - (x^2 + y^2)] = (1 + xy + x^2 + y^2)(1 + xy - x^2 - y^2)$$

### Ejercicio 60

#### Descomponer en factores

1.  $X^2 + 7X + 12 = (X + 4)(X + 3)$
2.  $X^2 + 8X + 15 = (X + 5)(X + 3)$
3.  $X^2 + 9X + 20 = (X + 5)(X + 4)$
- \* 4.  $X^2 + 7X + 10 = (X + 5)(X + 2)$
5.  $X^2 - 5X + 6 = (X - 3)(X - 2)$
6.  $X^2 - 9X + 20 = (X - 5)(X - 4)$
7.  $a^2 - 3a + 2 = (a - 2)(a - 1)$
8.  $a^2 - 6a + 5 = (a - 5)(a - 1)$
9.  $b^2 + 3b - 10 = (b + 5)(b - 2)$
10.  $b^2 + 4b - 5 = (b + 5)(b - 1)$
11.  $y^2 + 3y - 18 = (y + 6)(y - 3)$
12.  $z^2 + 3z - 4 = (z + 4)(z - 1)$
13.  $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$
14.  $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$
15.  $a^2 - 5a - 14 = (a - 7)(a + 2)$
16.  $a^2 - 2a - 24 = (a - 6)(a + 4)$
17.  $c^2 + 9c + 8 = (c + 8)(c + 1)$
18.  $c^2 - 9c + 8 = (c - 8)(c - 1)$
19.  $x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$
20.  $x^2 + 9x - 22 = (x + 11)(x - 2)$
21.  $a^2 - 15a + 36 = (a - 12)(a - 3)$
22.  $a^2 + 19a + 60 = (a + 15)(a + 4)$
23.  $m^2 + 13m - 90 = (m + 18)(m - 5)$
24.  $c^2 - 7c - 120 = (c - 15)(c + 8)$
25.  $x^2 - 7xy + 10y^2 = (x - 5y)(x - 2y)$
26.  $x^2 + 7xy + 12y^2 = (x + 4y)(x + 3y)$
27.  $a^2 + 4ab - 21b^2 = (a + 7b)(a - 3b)$
28.  $a^2 - 2ab - 48b^2 = (a - 8b)(a + 6b)$
29.  $a^2 - 20ax + 51x^2 = (a - 17x)(a - 3x)$
30.  $y^2 + 10yz - 75z^2 = (y + 15z)(y - 5z)$

31.  $a^4 - 11a^2 + 24 = (a^2 - 8)(a^2 - 3)$   
 33.  $a^3b^3 + 16ab - 36 = (ab + 18)(ab - 2)$   
 35.  $x^2 - 0,8x + 0,15 = (x - 0,5)(x - 0,3)$   
 37.  $a^3x^2 + 5ax - 36 = (ax + 9)(ax - 4)$   
 39.  $c^4 - 20c^2 + 64 = (c^2 - 16)(c^2 - 4)$   
 41.  $x^4 - 28x^2 + 115 = (x^2 - 23)(x^2 - 5)$   
 43.  $a^4 + 14a^2b - 120b^2 = (a^2 + 10b)(a^2 - 6b)$   
 45.  $a^3b^3 - 48abc - 100c^2 = (ab - 50c)(ab + 2c)$   
 47.  $x^4 - 20x^2y^2 - 96y^4 = (x^2 - 24y^2)(x^2 + 4y^2)$   
 49.  $x^{2n} - 19x^n - 120 = (x^n - 24)(x^n + 5)$   
 32.  $x^4 - 8x^2 - 33 = (x^2 - 11)(x^2 + 3)$   
 34.  $a^2b^3 - 6abc - 72c^2 = (ab - 12c)(ab + 6c)$   
 36.  $a^2 + 0,29a + 0,01 = (a + 0,25)(a + 0,04)$   
 38.  $a^3x^2 - 6ax^2 - 40x^2 = (ax - 10x^2)(ax + 4x)$   
 40.  $a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2 - 4)(a^2 - 1) = (a + 2)(a - 2)(a + 1)(a - 1)$   
 42.  $x^4 - 23x^2 - 108 = (x^2 - 27)(x^2 + 4)$   
 44.  $x^3 + 35x^2y^2 + 150y^4 = (x + 30y^2)(x + 5y^2)$   
 46.  $y^2 - 5/6y + 1/6 = (y - 1/2)(y - 1/3)$   
 48.  $a^4 - 3a^2b - 180b^2 = (a^2 - 15b)(a^2 + 12b)$   
 50.  $a^{2n} + 40a^n + 144 = (a^n + 36)(a^n + 4)$

### Ejercicio 61

Descomponer en factores:

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| 1. $2x^2 + 3x + 1$<br>$(2x)^2 + 3(2x) + 2/2$<br>$(2x + 1)(2x + 1)/2$<br>$2(x + 1)(2x + 1)/2$<br>$(x + 1)(2x + 1)$ | 2. $2x^2 + 5x + 2$<br>$(2x + 4)(2x + 1)/2$<br>$2(x + 2)(2x + 1)/2$<br>$(x + 2)(2x + 1)$              | 3. $2x^2 + 7x + 3$<br>$(2x + 6)(2x + 1)/2$<br>$2(x + 3)(2x + 1)/2$<br>$(x + 3)(2x + 1)$        | 4. $3x^2 + 5x + 2$<br>$(3x + 3)(3x + 2)/3$<br>$3(x + 1)(3x + 2)/3$<br>$(x + 1)(3x + 2)$     |
| 5. $4a^2 + 13a + 3$<br>$(4a + 12)(4a + 1)/4$<br>$4(a + 3)(4a + 1)/4$<br>$(a + 3)(4a + 1)$                         | 6. $2a^2 - 7a + 3$<br>$(2a - 6)(2a - 1)/2$<br>$2(a - 3)(2a - 1)/2$<br>$(a - 3)(2a - 1)$              | 7. $2b^2 - 7b + 6$<br>$(2b - 4)(2b - 3)/2$<br>$2(b - 2)(2b - 3)/2$<br>$(b - 2)(2b - 3)$        | 8. $6x^2 - 7x + 2$<br>$(6x - 4)(6x - 3)/6$<br>$2(3x - 2)3(x - 1)/6$<br>$(3x - 2)(x - 1)$    |
| 9. $6a^2 - 13a + 6$<br>$(6a - 9)(6a - 4)/6$<br>$3(2a - 3)2(3a - 2)/6$<br>$(2a - 3)(3a - 2)$                       | 10. $4a^2 - 12a + 5$<br>$(4a - 10)(4a - 2)/4$<br>$2(2a - 5)2(2a - 1)/4$<br>$(2a - 5)(2a - 1)$        | 11. $4x^2 - 16x + 15$<br>$(4x - 10)(4x - 6)/4$<br>$2(2x - 5)2(2x - 3)/4$<br>$(2x - 5)(2x - 3)$ | 12. $2b^2 - 11b + 12$<br>$(2b - 8)(2b - 3)/2$<br>$2(b - 4)(2b - 3)/2$<br>$(b - 4)(2b - 3)$  |
| 13. $6a^2 - 19a + 10$<br>$(6a - 15)(6a - 4)/6$<br>$3(2a - 5)2(3a - 2)/6$<br>$(2a - 5)(3a - 2)$                    | 14. $24x^2 - 38x + 15$<br>$(24x - 20)(24x - 18)/24$<br>$4(6x - 5)6(4x - 3)/24$<br>$(6x - 5)(4x - 3)$ | 15. $4x^2 + 4x - 3$<br>$(4x + 6)(4x - 2)/4$<br>$2(2x + 3)2(2x - 1)/4$<br>$(2x + 3)(2x - 1)$    | 16. $4x^2 - 4x - 3$<br>$(4x - 6)(4x + 2)/4$<br>$2(2x - 3)2(2x + 1)/4$<br>$(2x - 3)(2x + 1)$ |
| 17. $2a^2 + 5a - 12$<br>$(2a + 8)(2a - 3)/2$<br>$2(a + 4)(2a - 3)/2$<br>$(a + 4)(2a - 3)$                         | 18. $12b^2 - b - 1$<br>$(12b - 4)(12b + 3)/12$<br>$4(3b - 1)3(4b + 1)/12$<br>$(3b - 1)(4b + 1)$      | 19. $6a^2 + 5a - 4$<br>$(6a + 8)(6a - 3)/6$<br>$2(3a + 4)3(2a - 1)/6$<br>$(3a + 4)(2a - 1)$    | 20. $2x^2 + 5x - 3$<br>$(2x + 6)(2x - 1)/2$<br>$2(x + 3)(2x - 1)/2$<br>$(x + 3)(2x - 1)$    |

21.  $6x^2 - 11x - 10$   
 $(6x-15)(x+4)/6$   
 $3(2x-5)2(3x+2)/6$   
 $(2x-5)(3x+2)$
22.  $4a^2 + 19a - 5$   
 $(4a+20)(a-1)/4$   
 $4(a+5)(a-1)/4$   
 $(a+5)(a-1)$
23.  $4b^2 - 16b + 15$   
 $(4b-10)(b-4)/4$   
 $2(2b-5)2(2b-3)/4$   
 $(2b-5)(2b-3)$
24.  $2x^2 - 3x - 9$   
 $(2x-6)(x+3)/2$   
 $2(x-3)(x+3)/2$   
 $(x-3)(x+3)$
25.  $6x^2 - 5x - 21$   
 $(6x-14)(x+9)/6$   
 $2(3x-7)3(2x+3)/6$   
 $(3x-7)(2x+3)$
26.  $6x^2y^2 + xy - 1$   
 $(6xy+3)(xy-2)/6$   
 $3(2xy+1)2(3xy-1)/6$   
 $(2xy+1)(3xy-1)$
27.  $6x^2 - 25x - 25$   
 $(6x-30)(x+5)/6$   
 $6(x-5)(x+5)/6$   
 $(x-5)(x+5)$
28.  $8y^2 - 37y - 15$   
 $(8y-40)(y+3)/8$   
 $8(y-5)(y+3)/8$   
 $(y-5)(y+3)$
29.  $4x^2 + 23x - 35$   
 $(4x+28)(x-5)/4$   
 $4(x+7)(x-5)/4$   
 $(x+7)(x-5)$
30.  $6x^2 + 49x - 45$   
 $(6x+54)(x-5)/6$   
 $6(x+9)(x-5)/6$   
 $(x+9)(x-5)$
31.  $6x^2 - 7ax - 3a^2$   
 $(6x-9a)(x+2a)/6$   
 $3(2x-3a)(3x+a)/6$   
 $(2x-3a)(3x+a)$
32.  $2a^2 - 13ab + 6b^2$   
 $(2a-12b)(a-b)/2$   
 $2(a-6b)(a-b)/2$   
 $(a-6b)(a-b)$
33.  $9a^2 + 6ab - 8b^2$   
 $(9a+12b)(a-6b)/9$   
 $3(3a+4b)3(a-2b)/9$   
 $(3a+4b)(3a-2b)$
34.  $8x^2 + 6xy - 35y^2$   
 $(8x+20y)(x-14y)/8$   
 $4(2x+5y)2(x-7y)/8$   
 $(2x+5y)(x-7y)$
35.  $10x^2 - 23xy - 5y^2$   
 $(10x-25)(x+2)/10$   
 $5(2x-5)2(5x+1)/10$   
 $(2x-5)(5x+1)$
36.  $10y^2 - 21yz - 10z^2$   
 $(10y-15z)(y+4z)/10$   
 $5(2y-3z)2(y+2z)/10$   
 $(2y-3z)(y+2z)$
37.  $31xy - 5x^2 - 6y^2$   
 $-(5x^2 - 31xy + 6y^2)$   
 $-(5x-30y)(x-y)/5$   
 $-(x-6y)(5x-y)$
38.  $2ab - 24a^2 + 15b^2$   
 $-(24a^2 - 2ab + 15b^2)$   
 $-(24a-20b)(24a+18b)/24$   
 $-(6a-5b)(4a+3b)$
39.  $15a^2 + 8x^2 - 26ax$   
 $8x^2 - 26ax + 15a^2$   
 $(8x-20a)(8x-6a)/8$   
 $(2x-5a)(4x-3a)$
40.  $30x^2 - 7xy - 15y^2$   
 $(30x-25y)(x+18y)/30$   
 $5(6x-5y)6(5x+3y)/30$   
 $(6x+5y)(5x+3y)$

## Ejercicio 62

Descomponer en Factores:

- \* 1.  $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
2.  $a^3b^3 + c^3 = (ab+c)(a^2b^2 - abc + c^2)$
3.  $1 + b^3 = (1+b)(1-b+b^2)$
4.  $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$
5.  $a^3 + 125 = (a+5)(a^2 - 5a + 25)$
6.  $27x^3 + 1 = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$
7.  $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
8.  $a^5 + 1 = (a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$
- \* 9.  $32x^5 + y^5 = (2x+y)[(2x)^4 - (2x)^3y + (2x)^2y^2 - (2x)y^3 + y^4]$   
 $= (2x+y)(16x^4 - 8x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^4)$
10.  $32a^5 + 243b^5 = (2a+3b)[(2a)^4 - (2a)^3(3b) + (2a)^2(3b)^2 - (2a)(3b)^3 + (3b)^4]$   
 $= (2a+3b)(16a^4 - 24a^3b + 36a^2b^2 - 54ab^3 + 81b^4)$

$$11. x^3 + y^6 = (x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$$

$$12. x^5 + y^{10} = (x + y^2)(x^4 - x^3y^2 + x^2y^4 - xy^6 + y^8)$$

### Ejercicio 63

Descomponer en factores:

$$1. x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$2. a^3 - b^3c^3 = (a - bc)(a^2 + abc + b^2c^2)$$

$$3. a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$4. x^3 - 125 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$5. y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$$

$$6. 8x^3 - 125y^3 = (2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$$

$$7. x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$8. (a^5 - 32) = (a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)$$

$$9. 32x^5 - 1 = (2x - 1)(16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1)$$

$$10. 243a^5 - 32b^5 = (3a - 2b)[(3a)^4 + (3a)^3(2b) + (3a)^2(2b)^2 + (3a)(2b)^3 + (2b)^4]$$

$$= (3a - 2b)(81a^4 + 54a^3b + 36a^2b^2 + 24ab^3 + 16b^4)$$

$$* 11. x^3 - y^3 = (x - y^3)(x^2 + xy^3 + y^6)$$

$$12. x^{10} - a^5 = (x^2 - a)(x^8 + ax^6 + a^2x^4 + a^3x^2 + a^4)$$

### Ejercicio 64

Descomponer en factores:

$$1. a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

$$2. a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$3. x^4 + 64y^4 = (x^2 + 4y^2)[(x^2)^2 - (x^2)(4y^2) + (4y^2)^2] = (x^2 + 4y^2)(x^4 - 4x^2y^2 + 16y^4)$$

$$4. x^6 - 64y^6 = (x^3 + 8y^3)(x^3 - 8y^3) = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$5. x^{12} - y^{12} = (x^4 + y^4)[(x^4)^2 - (x^4)(y^4) + (y^4)^2] = (x^4 + y^4)(x^8 - x^4y^4 + y^8)$$

$$6. x^{12} - y^{12} = (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x - y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$7. a^{10} - x^{10} = (a^2 + x^2)(a^8 - a^6x^2 + a^4x^4 - a^2x^6 + x^8)$$

$$8. a^{10} - x^{10} = (a^5 + x^5)(a^5 - x^5) = (a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)(a - x)(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)$$

$$9. x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

$$10. a^8 - 1 = (a^4 + 1)(a^4 - 1) = (a^4 + 1)(a^2 + 1)(a^2 - 1) = (a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$$

$$11. x^{10} + y^{10} = (x^4 + y^4)[(x^4)^2 - (x^4)^3y^2 + (x^4)^2(y^4)^2 - (x^4)(y^4)^3 + (y^4)^4]$$

$$= (x^4 + y^4)(x^{16} - x^{11}y^4 + x^8y^8 - x^4y^{12} + y^{16})$$

$$12. x^{10} - 1 = (x^5 + 1)(x^5 - 1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$13. x^{12} - y^6 = (x^4 + y^2)(x^8 - x^4y^2 + y^4)$$

$$14. x^{12} - y^4 = (x^4 + y^3)(x^4 - y^3) = (x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2)(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$$

$$15. a^8 + 729 = (a^4 + 9)[(a^4)^2 - (a^4)(9) + (9)^2] = (a^4 + 9)(a^8 - 9a^4 + 81)$$

$$16. a^{18} - 729b^{18} = (a^6)^3 - (3b^3)^3 = [(a^6)^3 + (3b^3)^3][a^6 - 3b^3]$$

$$= (a^2 + 3b^2)(a^4 - 3a^2b^2 + 9b^4)(a^2 - 3b^2)(a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4)$$

17.  $x^4y^4 + z^{12} = (x^2y^2 + z^6)[(x^2y^2)^2 - (x^2y^2)(z^6) + (z^6)^2] = (x^2y^2 + z^6)(x^4y^4 - x^2y^2z^6 + z^{12})$   
 18.  $a^{12} - b^6 = (a^4 + b^2)(a^8 - a^4b^2 + b^4) = (a^4 + b^2)(a^4 - a^2b + b^2)(a^4 - b^2)(a^4 + a^2b + b^2)$   
 19.  $(a+b)^4 + c^4 = [(a+b)^2]^2 + (c^2)^2 = [(a+b)^2 + c^2][(a+b)^2 - (a+b)c^2 + c^4]$   
 \* 20.  $a^6 - (b+c)^6 = [a^3 + (b+c)^3][a^3 - (b+c)^3]$   
 $= [a + (b+c)][a^2 - a(b+c) + (b+c)^2][a - (b+c)][a^2 + a(b+c) + (b+c)^2]$   
 $= (a+b+c)[a^2 - a(b+c) + (b+c)^2](a-b-c)[a^2 + a(b+c) + (b+c)^2]$

## Ejercicio 65

Descomponer en factores:

1.  $X^3 + 3X^2 + 3X + 2$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 3 & 2 & \\ & -2 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \quad \underline{-2}$$
  
 $(X+2)(X^2+X+1)$
2.  $X^3 - 4X^2 + 4X - 3$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -4 & 4 & -3 & \\ & 3 & -3 & +3 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & \end{array} \quad \underline{3}$$
  
 $(X-3)(X^2-X+1)$
3.  $X^3 - 4X^2 + X + 6$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -4 & 1 & 6 & \\ & -1 & +5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array} \quad \underline{-1}$$
  
 $(X+1)(X^2-5X+6) = (X+1)(X-3)(X-2)$
4.  $X^3 + 4X^2 + X - 6$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 1 & -6 & \\ & 1 & 5 & +6 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array} \quad \underline{1}$$
  
 $(X-1)(X^2+5X+6)$   
 $(X-1)(X+3)(X+2)$
5.  $X^3 - 8X^2 + 16X - 5$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -8 & 16 & -5 & \\ & +5 & -15 & +5 & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & \end{array} \quad \underline{+5}$$
  
 $(X-5)(X^2-3X+1)$
6.  $X^3 - 10X - 3$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -10 & -3 & \\ & -3 & +9 & +3 & \\ \hline 1 & -3 & -1 & 0 & \end{array} \quad \underline{-3}$$
  
 $(X+3)(X^2-3X-1)$
7.  $X^3 - 8X + 3$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -8 & 3 & \\ & -3 & +9 & -3 & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & \end{array} \quad \underline{-3}$$
  
 $(X+3)(X^2-3X+1)$
8.  $X^3 + 7X^2 + 12X + 4$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 7 & 12 & 4 & \\ & -2 & -10 & -4 & \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & \end{array} \quad \underline{-2}$$
  
 $(X+2)(X^2+5X+2)$
9.  $X^3 - 3X^2 + 4$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -3 & 0 & 4 & \\ & -1 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -4 & 4 & 0 & \end{array} \quad \underline{-1}$$
  
 $(X+1)(X^2-4X+4) = (X+1)(X-2)^2$
10.  $X^3 + 4X^2 - 5$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & -5 & \\ & 1 & 5 & +5 & \\ \hline 1 & 5 & 5 & 0 & \end{array} \quad \underline{+1}$$
  
 $(X-1)(X^2+5X+5)$
11.  $X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 3$   

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -4 & 3 & 1 & -3 & \\ & +3 & -3 & 0 & +3 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \quad \underline{+3}$$
  
 $(X-3)(X^3 - X^2 + 1)$
12.  $4X^3 - 12X^2 + 11X - 6$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -12 & 11 & -6 & \\ & 8 & -8 & +6 & \\ \hline 4 & -4 & 3 & 0 & \end{array} \quad \underline{+2}$$
  
 $(X-2)(4X^2 - 4X + 3)$
- \* 13.  $X^4 - 3X^3 + X^2 - X - 6$   

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -3 & 1 & -1 & -6 & \\ & +3 & 0 & +3 & +6 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & \end{array} \quad \underline{+3}$$
  
 $(X-3)(X^3 + X + 2)$
14.  $2X^3 - 9X^2 - 7X + 10$   

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -9 & -7 & 10 & \\ & 10 & +5 & -10 & \\ \hline 2 & 1 & -2 & 0 & \end{array} \quad \underline{+5}$$
  
 $(X-5)(2X^2 + X - 2)$
15.  $X^4 + 2X^3 - 4X^2 - 5X - 6$   

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -4 & -5 & -6 & \\ & 2 & +8 & 8 & +6 & \\ \hline 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & \\ & -3 & -3 & -3 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{2} \\ \underline{-3} \end{array}$$
  
 $(X-2)(X+3)(X^2+X+1)$



$$16. \begin{array}{r} X^3 + 2X^2 + 9 \\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 9 \quad | -3 \\ \underline{-3 \quad +3 \quad -9} \\ 1 \quad -1 \quad +3 \quad 0 \end{array}$$

$$(X+3)(X^2-X+3)$$

$$17. \begin{array}{r} X^4 - 8X^3 + 20X^2 - 19X + 12 \\ 1 \quad -8 \quad +20 \quad -19 \quad 12 \quad | +3 \\ \underline{\phantom{1} 3 \quad -15 \quad 15 \quad -12} \\ 1 \quad -5 \quad 5 \quad -4 \quad 0 \quad | +4 \\ \underline{\phantom{1} 4 \quad -4 \quad +4} \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

$$(X-3)(X-4)(X^2-X+1)$$

$$18. \begin{array}{r} X^3 - 24X + 5 \\ 1 \quad 0 \quad -24 \quad 5 \quad | -5 \\ \underline{-5 \quad +25 \quad -5} \\ 1 \quad -5 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

$$(X+5)(X^2-5X+1)$$

$$19. \begin{array}{r} X^3 - 14X + 8 \\ 1 \quad 0 \quad -14 \quad 8 \quad | -4 \\ \underline{-4 \quad +16 \quad -8} \\ 1 \quad -4 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

$$(X+4)(X^2-4X+2)$$

$$20. \begin{array}{r} X^4 - 10X^3 + 35X^2 - 50X + 24 \\ 1 \quad -10 \quad +35 \quad -50 \quad +24 \quad | 1 \\ \underline{\phantom{1} 1 \quad -9 \quad 26 \quad -24 \quad -24} \\ 1 \quad -9 \quad 26 \quad -24 \quad | 2 \\ \underline{\phantom{1} 2 \quad -14 \quad +24} \\ 1 \quad -7 \quad 12 \quad 1 \end{array}$$

$$= (X-2)(X^3-7X+12)$$

$$= (X-1)(X-2)(X-4)(X-3)$$

### Ejercicio 66

I. Verificar el teorema del resto en los siguientes casos, es decir, hallar el resto por división directa y luego mediante la evaluación del polinomio correspondiente:

1.  $X^2 - 7X + 9$  por  $X-1$

$$a) \begin{array}{r} 1 \quad -7 \quad 9 \quad | 1 \\ \underline{1 \quad -6} \\ 1 \quad -6 \quad 3 \rightarrow R \end{array}$$

$$b) P(1) = 1^2 - 7(1) + 9$$

$$P(1) = 3$$

2.  $X^2 + 3X + 1$  por  $X-2$

$$a) \begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 1 \quad | +2 \\ \underline{2 \quad 10} \\ 1 \quad 5 \quad 11 \rightarrow R \end{array}$$

$$b) P(2) = 2^2 + 3(2) + 1$$

$$P(2) = 11$$

3.  $X^3 + X^2 + 5$  por  $X+1$

$$a) \begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \quad 5 \quad | -1 \\ \underline{-1 \quad 0 \quad 0} \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \rightarrow R \end{array}$$

$$b) P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 5$$

$$P(-1) = 5$$

4.  $X^3 - 2X + 8$  por  $X+2$

$$a) \begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -2 \quad 8 \quad | -2 \\ \underline{-2 \quad +4 \quad -4} \\ 1 \quad -2 \quad 2 \quad 4 \rightarrow R \end{array}$$

$$b) P(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 8$$

$$P(-2) = 4$$

5.  $X^3 + X^2 - 2X + 6$  por  $X-3$

$$a) \begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad -2 \quad 6 \quad | +3 \\ \underline{3 \quad 12 \quad 30} \\ 1 \quad 4 \quad 10 \quad 36 \rightarrow R \end{array}$$

$$b) P(3) = (3)^3 + (3)^2 - 2(3) + 6$$

$$P(3) = 36$$

II. En los siguientes ejemplos determinar el resto sin efectuar la división, hallando el valor correspondiente del polinomio:

1.  $X^2 + 4X + 1$  por  $X-2$  ;  $P(2) = 2^2 + 4(2) + 1$  ;  $P(2) = 13$

2.  $X^2 - 3X + 7$  por  $X-1$  ;  $P(1) = 1^2 - 3(1) + 7$  ;  $P(1) = 5$

3.  $X^3 + 2$  por  $X+1$  ;  $P(-1) = (-1)^3 + 2$  ;  $P(-1) = 1$

4.  $X^3 - 2X - 4$  por  $X-2$  ;  $P(2) = (2)^3 - 2(2) - 4$  ;  $P(2) = 0$

5.  $X^4 + 16$  por  $X+2$  ;  $P(-2) = (-2)^4 + 16$  ;  $P(-2) = 32$

## III. Decir si:

1.  $X^3 - Y^3$  es divisible por  $X+Y$  ;  $P(-Y) = (-Y)^3 - Y^3 = -2Y^3$  No
2.  $X^6 - Y^6$  es divisible por  $X+Y$  ;  $P(-Y) = (-Y)^6 - Y^6 = 0$  si
3.  $X^6 - Y^6$  es divisible por  $X-Y$  ;  $P(Y) = Y^6 - Y^6 = 0$  si
4.  $X^5 - Y^5$  es divisible por  $X-Y$  ;  $P(Y) = Y^5 - Y^5 = 0$  si
5.  $X^3 + Y^3$  es divisible por  $X-Y$  ;  $P(Y) = Y^3 + Y^3 = 2Y^3$  No
6.  $X^3 + Y^3$  es divisible por  $X+Y$  ;  $P(-Y) = (-Y)^3 + Y^3 = 0$  si
7.  $X^4 + Y^4$  es divisible por  $X-Y$  ;  $P(Y) = Y^4 + Y^4 = 2Y^4$  No
8.  $X^4 + Y^4$  es divisible por  $X+Y$  ;  $P(-Y) = (-Y)^4 + Y^4 = 2Y^4$  No
9.  $X^4 - 16$  es divisible por  $X+2$  ;  $P(-2) = (-2)^4 - 16 = 0$  si
10.  $X^4 - 16$  es divisible por  $X-2$  ;  $P(2) = (2)^4 - 16 = 0$  si

## IV. Descomponer en factores las expresiones siguientes:

1.  $YZ(Y-Z) + ZX(Z-X) + XY(X-Y)$  es una expresión cíclica porque se transforma en una expresión equivalente sustituyendo  $X$  por  $Y$  ;  $Y$  por  $Z$  ;  $Z$  por  $X$ .

Se analiza si es divisible por  $X-Y$  es decir  $X=Y$

$$= YZ(Y-Z) + ZY(Z-Y) + Y^2(Y-Y) = YZ(Y-Z) - YZ(Y-Z) + 0 = 0 \text{ si es divisible por } X-Y$$

Como la expresión es cíclica, también será divisible por  $Y-Z$  y  $Z-X$

Puesto que la expresión es de 3º grado puede contener tres factores:

$(X-Y)(Y-Z)(Z-X)$  que puede definir de la expresión dada en un factor numérico. Entonces

$$YZ(Y-Z) + ZX(Z-X) + XY(X-Y) = A(X-Y)(Y-Z)(Z-X) ; \text{ si } X=1 ; Y=2 ; Z=3$$

$$2(3)(2-3) + 3(1)(3-1) + 1(2)(1-2) = A(1-2)(2-3)(3-1) ; -6 + 6 - 2 = A(2) \Rightarrow A = -1$$

$$\text{Por tanto } YZ(Y-Z) + ZX(Z-X) + XY(X-Y) = -(X-Y)(Y-Z)(Z-X)$$

2.  $X(Y+Z)^2 + Y(Z+X)^2 + Z(X+Y)^2 - 4XYZ$  es cíclica y 3º grado

si es divisible por  $X+Y$  ;  $X=-Y$

$$-Y(Y+Z)^2 + Y(Z-Y)^2 + Z(-Y+Y)^2 - 4(-Y)YZ = -Y(Y^2 + 2YZ + Z^2) + Y(Z^2 - 2YZ + Y^2) + 4Y^2Z$$

$$= -Y^3 - 2Y^2Z - YZ^2 + YZ^2 - 2Y^2Z + Y^3 + 4Y^2Z = 0 \text{ si es}$$

Los factores serán  $(X+Y)(Y+Z)(Z+X)$

Hallando el valor de  $A$  ; si  $X=1$  ;  $Y=2$  ;  $Z=3$

$$1(2+3)^2 + 2(3+1)^2 + 3(1+2)^2 - 4(1)(2)(3) = A(1+2)(2+3)(3+1) ; 60 = A(60) \rightarrow A=1$$

$$X(Y+Z)^2 + Y(Z+X)^2 + Z(X+Y)^2 - 4XYZ = (X+Y)(Y+Z)(Z+X)$$

3.  $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$  divisible para  $a+b$  ;  $a=-b$

$$-b(b-c)^2 + b(c+b)^2 + c(-b-b)^2 + 8(-b)bc = -b^3 + 2b^2c - bc^2 + bc^2 + 2b^2c + b^3 + 4b^2c - 8b^2c = 0 \text{ si}$$

Será también para  $b+c$  ;  $c+a$

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc = A(a+b)(b+c)(c+a) \text{ si } a=0 ; b=1 ; c=2$$

$$0(1-2)^2 + 1(2-0)^2 + 2(0-1)^2 + 8(0)(1)(2) = A(0+1)(1+2)(2+0) ; 6 = A(6) \Rightarrow A=1$$

$$\rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + 8abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

4.  $a^4(b^3-c^3) + b^4(c^3-a^3) + c^4(a^3-b^3)$  divisible para  $a^3-b^3$ ;  $a^3=b^3$   
 $b^4(b^3-c^3) + b^4(c^3-b^3) + c^4(b^3-b^3) = 0$  si es  
 Será divisible también para  $b^3-c^3$ ;  $c^3-a^3$   
 $a^4(b^3-c^3) + b^4(c^3-a^3) + c^4(a^3-b^3) = A(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$  si  $a=0$ ;  $b=1$ ;  $c=2$   
 $0(1-4) + 1(4-0) + 16(0-1) = A(0-1)(1-4)(4-0)$ ;  $-12 = A(12) \rightarrow A = -1$   
 $a^4(b^3-c^3) + b^4(c^3-a^3) + c^4(a^3-b^3) = -(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$   
 $= -(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$

5.  $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$  divisible por  $x+y$ ;  $X=-y$   
 $(-y+y+z)^3 - (-y)^3 - y^3 - z^3 = 0$  si es divisible; también será para  $y+z$ ;  $z+x$   
 $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = A(x+y)(y+z)(z+x)$  si  $x=0$ ;  $y=1$ ;  $z=2$   
 $(0+1+2)^3 - 0 - 1 - 8 = A(0+1)(1+2)(2+0)$ ;  $18 = A(6) \rightarrow A = 3$   
 $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

### Ejercicio 67

Calcular el discriminante y averiguar si los trinomios siguientes admiten factores con coeficientes racionales:

1.  $x^2 - 4x - 5$   $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-5) = 36$  si  $= (x-5)(x+1)$
2.  $x^2 + 2x - 15$   $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-15) = 64$  si  $= (x+5)(x-3)$
3.  $x^2 - 3x - 18$   $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-18) = 81$  si  $= (x-6)(x+3)$
4.  $x^2 + x + 2$   $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(2) = -7$  no
5.  $x^2 - 3x + 4$   $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(4) = -7$  no
6.  $3x^2 - x - 2$   $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 25$  si  $= (x-1)(3x+2)$
7.  $6x^2 - x - 2$   $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 49$  si  $= (3x-2)(2x+1)$
8.  $4x^2 + 13x + 3$   $b^2 - 4ac = (13)^2 - 4(4)(3) = 145$  si  $= (x+3)(4x+1)$
9.  $3x^2 - x - 1$   $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-1) = 13$  no
10.  $5x^2 + 6x + 3$   $b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(5)(3) = -24$  no
11.  $6x^2 + 17x + 12$   $b^2 - 4ac = (17)^2 - 4(6)(12) = 1$  si  $= (2x+3)(3x+4)$
12.  $12x^2 - x - 1$   $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(12)(-1) = 49$  si  $= (3x-1)(4x+1)$
- \* 13.  $4x^2 + 7x - 15$   $b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(4)(-15) = 289$  si  $= (x+3)(4x-5)$
14.  $10x^2 - 3x - 15$   $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(10)(-15) = 609$  no
- \* 15.  $8x^2 + 21x - 9$   $b^2 - 4ac = (21)^2 - 4(8)(-9) = 729$  si  $= (x+3)(8x-3)$
16.  $x^2 + xy + y^2$   $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3$  no

17.  $x^2 - 4xy + 4y^2$      $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$  si  $= (x - 2y)^2$   
 18.  $6x^2 + 19xy - 7y^2$      $b^2 - 4ac = 19^2 - 4(6)(-7) = 529$  si  $= (2x + 7y)(3x - y)$   
 19.  $6x^2 - xy - 35y^2$      $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-35) = 841$  si  $= (2x - 5y)(3x + 7y)$   
 20.  $15x^2 + 8xz - 16z^2$      $b^2 - 4ac = 8^2 - 4(15)(-16) = 1024$  si  $= (3x + 4z)(5x - 4z)$

### Ejercicio 68 (REPASO)

Descomponer en factores:

1.  $3a^2 - 5a = a(3a - 5)$
2.  $x^3 + x^2y + 2xy^2 = x(x^2 + xy + 2y^2)$
3.  $2x^5 - 4x^3 + 5x^2 = x^2(2x^3 - 4x + 5)$
4.  $a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 = a^2b(a^2 - ab + b^2)$
5.  $2x^2y - 6xy^2 + 3xy = xy(2x - 4y + 3)$
6.  $5a^3x + 10a^2x^2 - 20a^3x^3 = 5a^2x(1 + 2x - 4x^2)$
7.  $3a^2b^2c^2 - 6abc + 9a^3b^2c^3 = 3abc(ab^2c^2 - 2 + 3a^2b^2c^3)$
8.  $4x^2y^2 - 8x^2y^2z^2 + 12xy^2z = 4xy(x^2y^2 - 2xy^2z^2 + 3yz)$
9.  $2a^2y + 4a^2y^2 + 8a^2 = 2a^2(y + 2y^2 + 4)$
10.  $6a^2c - 12ac^2 - 3a^2c^3 = 3ac(2a - 4c - ac^2)$
11.  $2x^2 - 5xy + 4ax - 10ay = (2x^2 - 5xy) + (4ax - 10ay) = x(2x - 5y) + 2a(2x - 5y) = (2x - 5y)(x + 2a)$
12.  $x^2 + xy - ax - ay = (x^2 + xy) - (ax + ay) = x(x + y) - a(x + y) = (x + y)(x - a)$
13.  $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x^3 + 3x^2) + (4x + 12) = x^2(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 4)$
14.  $a^4 - a^3 - a + 1 = (a^4 - a^3) - (a - 1) = (a - 1)(a^3 - 1) = (a - 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)$
15.  $1 + 20x^4 - 4x^3 - 5x = (20x^4 - 4x^3) - (5x - 1) = 4x^3(5x - 1) - (5x - 1) = (5x - 1)(4x^3 - 1)$
16.  $1 + a - a^3mn - a^2mn = (1 + a) - (a^3mn + a^2mn) = (1 + a) - a^2mn(a + 1) = (1 + a)(1 - a^2mn)$
17.  $ax + bx + ay + by + az + bz = a(x + y + z) + b(x + y + z) = (x + y + z)(a + b)$
18.  $a^2 - ab + ac - a + b - c = a(a - b + c) - (a - b + c) = (a - b + c)(a - 1)$
19.  $ax - ay + az + x - y + z = a(x - y + z) + (x - y + z) = (x - y + z)(a + 1)$
20.  $x^{2n} + x^{n+3} - x^{n+1} - x^4$  ( $n > 3$ )    si:  $n = 4 \rightarrow x^8 + x^7 - x^5 - x^4$   
 $x^4(x^{2n-4} + x^{n-1} - x^{n-3} - 1) = x^4[(x^{2n-4} - x^{n-3}) + (x^{n-1} - 1)]$   
 $x^4[x^{n-3}(x^{n-1} - 1) + (x^{n-1} - 1)] = x^4(x^{n-1} - 1)(x^{n-3} + 1)$
21.  $a^2 - 6ab + 9b^2 = (a - 3b)^2$
22.  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$
23.  $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
24.  $1 - 20y + 100y^2 = (1 - 10y)^2$
25.  $121a^2 - 110a + 25 = (11a - 5)^2$
26.  $x^6 + 14x^3 + 49 = (x^3 + 7)^2$
27.  $36x^2 - 84xy + 49y^2 = (6x - 7y)^2$
28.  $25a^2b^2 - 40abc + 16c^2 = (5ab - 4c)^2$
29.  $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4 = (2x^2 + 3y^2)^2$
30.  $(x + y)^2 - 6a(x + y) + 9a^2 = (x + y - 3a)^2$
31.  $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$

$$32. x - x^5 = x(1 - x^4) = x(1 + x)(1 - x^2) = x(1 + x)(1 + x)(1 - x)$$

$$33. 25 - 100a^2 = 25(1 - 4a^2) = 25(1 + 2a)(1 - 2a) \text{ or } (5 + 10a)(5 - 10a)$$

$$34. a^2b^2 - 16c^2 = (ab + 4c)(ab - 4c)$$

$$35. x^2 - 25/4y^2 = (x + 5/2y)(x - 5/2y)$$

$$36. x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$$

$$37. 3a^5 - 12a^3b^2 = 3a^3(a^2 - 4b^2) = 3a^3(a + 2b)(a - 2b)$$

$$38. x^8 - 256 = (x^4 + 16)(x^4 - 16) = (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

$$39. (x - 3y)^2 - 16z^2 = (x - 3y + 4z)(x - 3y - 4z)$$

$$40. (x + 2)^2 - (2x - 3)^2 = [(x + 2) + (2x - 3)][(x + 2) - (2x - 3)] = (3x - 1)(-x + 5)$$

$$41. x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 4z^2 = (x + y)^2 - 4z^2 = (x + y + 2z)(x + y - 2z)$$

$$42. x^2 - y^2 - z^2 - 2yz = x^2 - (y^2 + 2yz + z^2) = x^2 - (y + z)^2 = (x + y + z)(x - y - z)$$

$$43. 9x^2 - 4a^2 + 4a - 1 = 9x^2 - (4a^2 - 4a + 1) = 9x^2 - (2a - 1)^2 = (3x + 2a - 1)(3x - 2a + 1)$$

$$44. 1 - a^2 + 6ab - 9b^2 = 1 - (a^2 - 6ab + 9b^2) = 1 - (a - 3b)^2 = (1 + a - 3b)(1 - a + 3b)$$

$$45. 2a + c^2 - 1 - a^2 = c^2 - (a^2 - 2a + 1) = c^2 - (a - 1)^2 = (c + a - 1)(c + a - 1)$$

$$46. x^2 + y^2 - 2xy - 2a - a^2 - 1 = (x^2 - 2xy + y^2) - (a^2 + 2a + 1) = (x - y)^2 - (a + 1)^2 = (x - y + a + 1)(x - y - a - 1)$$

$$47. x^2 - 2x + 1 - a^2 + 2ay - y^2 = (x^2 - 2x + 1)(a^2 - 2ay + y^2) = (x - 1)^2 - (a - y)^2 = (x - 1 + a - y)(x - 1 - a + y)$$

$$48. a^4 - a^2 - 9 + b^4 - 2a^2b^2 + 6a = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) - (a^2 - 6a + 9) = (a^2 - b^2)^2 - (a - 3)^2 \\ = (a^2 - b^2 + a - 3)(a^2 - b^2 - a + 3)$$

$$49. 25x^2 - 1 - 10ax - 4y^2z^2 + a^2 + 4yz = (25x^2 - 10ax + a^2) - (4y^2z^2 - 4yz + 1) = (5x - a)^2 - (2yz - 1)^2 \\ = (5x - a + 2yz - 1)(5x - a - 2yz + 1)$$

$$50. a^4 - 2a^2x - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 + x^2 = (a^4 - 2a^2x + x^2) - (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = (a^2 - x)^2 - (x^2 + y^2)^2 \\ = (a^2 - x + x^2 + y^2)(a^2 - x - x^2 - y^2)$$

$$51. \frac{b^4 + b^2 + 1}{+ b^2 - b^2}$$

$$(b^4 + 2b^2 + 1) - b^2$$

$$(b^2 + 1)^2 - b^2$$

$$(b^2 + 1 + b)(b^2 + 1 - b)$$

$$53. a^4 + a^2b^2 + 25b^4$$

$$+ 9a^2b^2 - 9a^2b^2$$

$$(a^4 + 10a^2b^2 + 25b^4) - 9a^2b^2$$

$$(a^2 + 5b^2)^2 - 9a^2b^2$$

$$(a^2 + 5b^2 + 3ab)(a^2 + 5b^2 - 3ab)$$

$$55. 4a^4 + b^4$$

$$+ 4a^2b^2 - 4a^2b^2$$

$$(4a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2$$

$$(2a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$(2a^2 + b^2 + 2ab)(2a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$52. \frac{a^4 - 3a^2x^2 + x^4}{+ a^2x^2 - a^2x^2}$$

$$(a^4 - 2a^2x^2 + x^4) - a^2x^2$$

$$(a^2 - x^2)^2 - a^2x^2$$

$$(a^2 - x^2 + ax)(a^2 - x^2 - ax)$$

$$54. 25a^4 + 24a^2b^2 + 16b^4$$

$$+ 16a^2b^2 - 16a^2b^2$$

$$(25a^4 + 40a^2b^2 + 16b^4) - 16a^2b^2$$

$$(5a^2 + 4b^2)^2 - 16a^2b^2$$

$$(5a^2 + 4b^2 + 4ab)(5a^2 + 4b^2 - 4ab)$$

$$56. x^8 + 64y^8$$

$$+ 16x^4y^4 - 16x^4y^4$$

$$(x^8 + 16x^4y^4 + 64y^8) - 16x^4y^4$$

$$(x^4 + 8y^4)^2 - 16x^4y^4$$

$$(x^4 + 8y^4 + 4x^2y^2)(x^4 + 8y^4 - 4x^2y^2)$$

$$57. x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$$

$$58. x^2 - 7x - 8 = (x-8)(x+1)$$

$$59. x^2 - 3xy - 4y^2 = (x-4y)(x+y)$$

$$60. a^2 + 4ab - 21b^2 = (a+7b)(a-3b)$$

$$61. 5x^2 - 8x + 3 = (5x-5)(5x-3)/5 = 5(x-1)(5x-3)/5 = (x-1)(5x-3)$$

$$62. 3x^2 - 2x - 5 = (3x-5)(3x+3)/3 = (3x-5)3(x+1)/3 = (3x-5)(x+1)$$

$$63. 4a^2 - 4a - 3 = (4a-6)(4a+2)/4 = 2(2a-3)2(2a+1)/4 = (2a-3)(2a+1)$$

$$64. 6a^2 - 7ab - 3b^2 = (6a-9b)(6a+2b)/6 = 3(2a-3b)2(3a+b)/6 = (2a-3b)(3a+b)$$

$$65. 2x^2 + 5xz + 2z^2 = (2x+4z)(2x+z)/2 = 2(x+2z)(2x+z)/2 = (x+2z)(2x+z)$$

$$66. 12a^2 - 7ax - 10x^2 = (12a-15x)(12a+8x)/12 = 3(4a-5x)4(3a+2x)/12 = (4a-5x)(3a+2x)$$

$$*67. a^3 + 125 = (a+5)(a^2 - 5a + 25)$$

$$68. 8a^3 - 27b^3 = (2a-3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$$

$$69. a^3b^3 + 64 = (ab+4)(a^2b^2 - 4ab + 16)$$

$$70. 216 + x^6 = 6^3 + (x^2)^3 = (6+x^2)(36 - 6x^2 + x^4)$$

$$71. 64x^3 - 343y^3 = (4x)^3 - (7y)^3 = (4x-7y)(16x^2 + 28xy + 49y^2)$$

$$72. x^3y^6 + 1 = (xy^2)^3 + 1 = (xy^2+1)(x^2y^4 - xy^2 + 1)$$

$$73. (a+8)^3 + 8 = [(a+3)+2][[(a+3)^2 - 2(a+3)+4]] = (a+5)(a^2 + 4a + 7)$$

$$74. x^3 - (y-z)^3 = [x - (y-z)][x^2 + x(y-z) + (y-z)^2] = (x-y+z)[x^2 + x(y-z) + (y-z)^2]$$

$$*75. (x+y)^3 + (x-y)^3 = [(x+y) + (x-y)][(x+y)^2 - (x+y)(x-y) + (x-y)^2]$$

$$= (x+y+x-y)(x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 + x^2 - 2xy + y^2) = 2x(x^2 + 3y^2)$$

$$76. (a+1)^3 - (a-1)^3 = [(a+1) - (a-1)][(a+1)^2 + (a+1)(a-1) + (a-1)^2]$$

$$= (a+1-a+1)(a^2 + 2a + 1 + a^2 - 1 + a^2 - 2a + 1) = 2(3a^2 + 1)$$

$$77. 64x^4 - y^4 = [(2x)^3 + y^3][(2x)^3 - y^3] = (2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)(2x-y)$$

$$78. a^2 - ab - b - 1 = (a^2 - 1) - (ab + b) = (a+1)(a-1) - b(a+1) = (a+1)(a-1-b)$$

$$79. a^3 - b^3 + a^3 - b^3 = (a^3 - b^3) + (a^3 - b^3) = (a+b)(a-b) + (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= (a-b)(a+b+a^2+ab+b^2)$$

$$80. (x^3 - y^3) - (x-y)^2 + (x^2 - y^2) = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x-y)^2 + (x+y)(x-y)$$

$$= (x-y)[x^2 + xy + y^2 - (x-y) + (x+y)]$$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2y)$$

$$81. x^2 - xy + y^2 - x^3 - y^3 = (x^2 - xy + y^2) - (x^3 + y^3) = (x^2 - xy + y^2) - (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= (x^2 - xy + y^2)(1 - x - y)$$

$$82. x^3 + x^2 - 3x - 6$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad -3 \quad -6 \quad \boxed{+2} \\ \underline{2 \quad 6 \quad +6} \end{array}$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow (x-2)(x^2 + 3x + 3)$$

$$83. \quad X^3 + 3X^2 - 6X - 8 = (X^3 - 8) + (3X^2 - 6X) = (X-2)(X^2 + 2X + 4) + 3X(X-2) \\ = (X-2)(X^2 + 5X + 4) = (X-2)(X+4)(X+1)$$

$$84. \quad X^3 - 4X^2 + 5$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -4 & 0 & 5 & -1 \\ \hline & -1 & 5 & -5 & \end{array}$$

$$1 \quad -5 \quad 5 \quad 0$$

$$(X+1)(X^2 - 5X + 5)$$

$$86. \quad X^4 + 3X^3 - 2X + 4$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ \hline & -2 & -2 & +4 & -4 & \end{array}$$

$$1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad 0$$

$$(X+2)(X^3 + X^2 - 2X + 2)$$

$$85. \quad X^3 + 5X^2 - 6$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 5 & 0 & -6 & +1 \\ \hline & 1 & +6 & +6 & \end{array}$$

$$1 \quad 6 \quad 6 \quad 0$$

$$(X-1)(X^2 + 6X + 6)$$

$$87. \quad X^5 - X = X(X^5 - 1) = X(X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

$$88. \quad a^3 - b^3 + a - b = (a^3 - b^3) + (a - b) \\ = (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) \\ = (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$$

$$89. \quad a^3 - X^3 - 3aX(a-X) = (a^3 - X^3) - 3aX(a-X) = (a-X)(a^2 + aX + X^2) - 3aX(a-X) \\ = (a-X)(a^2 - 2aX + X^2) = (a-X)(a-X)^2 = (a-X)^3$$

$$90. \quad X^3 + Y^3 + Z^3 + 3XYZ = (X+Y+Z)^3 \text{ es producto notable}$$

$$91. \quad a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2) = (a^4 - b^4) + 2ab(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + 2ab(a^2 - b^2) \\ = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) = (a+b)(a-b)(a+b)^2 = (a-b)(a+b)^3$$

$$92. \quad 4a^3b^3 - (a^2 + b^2 - c^2)^3 = [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)] = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\ = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$93. \quad a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2 = (a^3 + b^3) + (2a^2b + 2ab^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b) \\ = (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab) = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$94. \quad 9m^4 + 3m^2b^2 + 4b^4$$

$$\begin{array}{r} + 9m^2b^2 \\ \hline - 9m^2b^2 \end{array}$$

$$(9m^4 + 12m^2b^2 + 4b^4) - 9m^2b^2$$

$$(3m^2 + 2b^2)^2 - 9m^2b^2$$

$$(3m^2 + 2b^2 + 3mb)(3m^2 + 2b^2 - 3mb)$$

$$95. \quad X^2Y^n + 2XY^{n+1} + Y^{n+2}$$

$$= Y^n(X^2 + 2XY + Y^2)$$

$$= Y^n(X+Y)^2$$

$$96. \quad c^{4n} + c^{3n} + c^{2n} + c^n = c^n[(c^{3n} + c^{2n}) + (c^n + 1)]$$

$$= c^n[c^{2n}(c^n + 1) + (c^n + 1)] = c^n(c^n + 1)(c^{2n} + 1)$$

$$97. \quad a^4b^2 - a^2b^4 + 16b^6 = b^2(a^4 - a^2b^2 + 16b^4) \text{ solo } a^4 - a^2b^2 + 16b^4$$

$$= (a^2 + 8a^2b^2 + 16b^4) - 9a^2b^2 = (a^2 + 4b^2)^2 - 9a^2b^2 = (a^2 + 4b^2 + 3ab)(a^2 + 4b^2 - 3ab)$$

$$\rightarrow = b^2(a^2 + 4b^2 + 3ab)(a^2 + 4b^2 - 3ab)$$

$$98. \quad a^2x - 2ax^2 - 2x^2 - X = X(a^2 - 2aX - 2X - 1) = X[(a^2 - 1) - (2aX + 2X)]$$

$$= X[(a+1)(a-1) - 2X(a+1)] = X(a+1)(a-1-2X)$$

$$99. \quad X^6Y^3 + Z^{12} = [X^2Y^3 + Z^4][X^4Y^3 - (X^2Y^3)Z^4 + (Z^4)^2]$$

$$= (X^2Y^3 + Z^4)(X^4Y^3 - X^2Y^3Z^4 + Y^8)$$

$$100. \quad (2X-4)^3 - (X+2Y)^3 = [(2X-4) - (X+2Y)][(2X-4)^2 + (2X-4)(X+2Y) + (X+2Y)^2] \\ = (2X-4-X-2Y)(4X^2-4XY+X^2+2X^2+4XY-X^2-2Y^2+X^2+4XY+4Y^2) \\ = (X-3Y)(7X^2+3XY+3Y^2)$$

$$101. x^2 + 2xy + y^2 + 2 + 3x + 3y = (x^2 + 2xy + y^2) + (3x + 3y) + 2 = (x+y)^2 + 3(x+y) + 2 \text{ trinomio de la forma } x^2 + bx + c \Rightarrow (x+y+2)(x+y+1)$$

$$\begin{aligned} *102. 6x^2 - 5xy - 6y^2 - 6xz + 9yz &= (6x^2 - 5xy - 6y^2) - (6xz - 9yz) \\ &= (6x - 9y)(6x + 4y)/6 - (6xz - 9yz) = (2x - 3y)(3x + 2y) - 3z(2x - 3y) \\ &= (2x - 3y)(3x + 2y - 3z) \end{aligned}$$

$$103. x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 3x - 4$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -5 & 5 & -3 & -4 & +4 \\ & 4 & -4 & +4 & +4 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & +1 & 0 & \end{array} \rightarrow (x-4)(x^3 - x^2 + x + 1)$$

$$\begin{aligned} 104. 12 + 7(a+b) - 10(a+b)^2 &= -[10(a+b)^2 - 7(a+b) - 12] \text{ trinomio } ax^2 + bx + c \\ &= -[10(a+b) - 15][10(a+b) + 8]/10 = -5[2(a+b) - 3][5(a+b) + 4]/10 \text{ introduciendo el c} \\ &= [3 - 2(a+b)][4 + 5(a+b)] \end{aligned}$$

$$105. 16x^{2n} - (y+z)^2 = [4x^n + (y+z)][4x^n - (y+z)] = (4x^n + y + z)(4x^n - y - z)$$

$$\begin{aligned} 106. 4u^2 - 2uv - 12v^2 - x^2 + 9v^2 - y^2 &= (4u^2 - 12uv + 9v^2) - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= (2u - 3v)^2 - (x+y)^2 = (2u - 3v + x + y)(2u - 3v - x - y) \end{aligned}$$

$$107. 8x^4 + x = x(8x^3 + 1) = x(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$\begin{aligned} *108. x^4y^4 + 4 &= (x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4) - 4x^2y^2 = (x^2y^2 + 2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2y^2 + 2 + 2xy)(x^2y^2 + 2 - 2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 109. a^2x - a^2y + bx^2 - by^2 &= a^2(x-y) + b(x^2 - y^2) = a^2(x-y) + b(x+y)(x-y) \\ &= (x-y)(a^2 + bx + by) \end{aligned}$$

$$110. x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz \text{ es un producto notable } \rightarrow = (x-y+z)^2$$

$$\begin{aligned} 111. x^3 - 2x^2y + x^2 - 4x - 4 + 8y &= (x^3 - 2x^2y + x^2) - (4x - 8y + 4) \\ &= x^2(x - 2y + 1) - 4(x - 2y + 1) = (x - 2y + 1)(x^2 - 4) = (x - 2y + 1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 112. (m-n)^2 - 2(m-n) + 1 &= (m-n)^2 - 2(m-n) + 2 - 1 = (m-n)^2 - 2(m-n) + 1 \text{ es trinomio cuadrado perfecto } \rightarrow = ((m-n)-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 113. 2xy - ax - 2yz + az - ay + 2y^2 &= [2y(x-z) - a(x-z)] + y(2y-a) \\ &= (x-z)(2y-a) + y(2y-a) = (2y-a)(x-z+y) = (2y-a)(x+y-z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 114. x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz &= x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) + (x+y-z) = [x^2 - (y-z)^2] + (x+y-z) \\ &= [x+(y-z)][x-(y-z)] + (x+y-z) = (x+y-z)(x-y+z) + (x+y-z) \\ &= (x+y-z)(x-y+z+1) \end{aligned}$$

$$115. 12a^3 + 20a^2 - a + 14$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 12 & 20 & -1 & 14 & -2 \\ & +24 & +8 & -14 & \\ \hline 12 & -4 & +7 & 0 & \end{array}$$

$$(a+2)(12a^2 - 4a + 7)$$

$$116. 2a^2 - 5ab + 2b^2 - 3ac + 6bc$$

$$= (2a^2 - 5ab + 2b^2) - (3ac - 6bc)$$

$$= \frac{(2a-4b)(2a-b)}{2} - (3ac-6bc)$$

$$= (a-2b)(2a-b) - (3c(a-2b))$$

$$= (a-2b)(2a-b-3c)$$



$$\begin{aligned}
 117. \quad a+b-c+a^2-b^2-c^2+2bc &= (a+b-c)+a^2-(b^2-2bc+c^2) = (a+b-c)+[a^2-(b-c)^2] \\
 &= (a+b-c)+[a+(b-c)][a-(b-c)] = (a+b-c)+(a+b-c)(a-b+c) \\
 &= (a+b-c)(1+a-b+c) = (a+b-c)(a-b+c+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 118. \quad x^2-6xy+9y^2-8x+24y+15 &= (x^2-6xy+9y^2)-(8x-24y)+15 \\
 &= (x-3y)^2-8(x-3y)+15 \text{ trinomio forma } x^2+bx+c \\
 &= (x-3y-5)(x-3y-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 119. \quad a^2+8ab+16b^2-a-4b-20 &= (a^2+8ab+16b^2)-(a+4b)-20 \\
 &= (a+4b)^2-(a+4b)-20 \text{ trinomio } x^2+bx+c \rightarrow = (a+4b-5)(a+4b+4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 120. \quad 9a^2-6ab+b^2-21x^2+12ax-4bx &= (9a^2-6ab+b^2)+(12ax-4bx)-21x^2 \\
 &= (3a-b)^2+4x(3a-b)-21x^2 \text{ trinomio } x^2+bx+c \rightarrow = (3a-b+7x)(3a-b-3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 121. \quad 2ab-2bc-ad+cd+2b^2-bd &= (2ab-2bc)-(ad-cd)+(2b^2-bd) \\
 &= [2b(a-c)-d(a-c)]+b(2b-d) = (a-c)(2b-d)+b(2b-d) = (2b-d)(a-c+b) \\
 &= (a+b-c)(2b-d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 122. \quad a^4-2a^2xy-x^4-x^2y^2-y^4 &= a^4-2a^2xy+x^2y^2-x^4-2x^2y^2-y^4 \text{ sumando y restando } x^2y^2 \\
 &= (a^4-2a^2xy+x^2y^2)-(x^4+2x^2y^2+y^4) = (a^2-xy)^2-(x^2+y^2)^2 \\
 &= [(a^2-xy)+(x^2+y^2)][(a^2-xy)-(x^2+y^2)] = (a^2-xy+x^2+y^2)(a^2-xy-x^2-y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 123. \quad 1+2ab-a^4-b^4-a^2b^2 &= 1+2ab+a^2b^2-a^4-b^4-2a^2b^2 \\
 &= (1+2ab+a^2b^2)-(a^4+2a^2b^2+b^4) = (1+ab)^2-(a^2+b^2)^2 = (1+ab+a^2+b^2)(1+ab-a^2-b^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 124. \quad 4x^2y^2+4y^4-x^8-x^4-1 &= (4y^4+4x^2y^2+x^4)-(x^8+2x^4+1) \text{ sumando y restando } x^4 \\
 &= (x^2+2y^2)^2-(x^4+1)^2 = (x^2+2y^2+x^4+1)(x^2+2y^2-x^4-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 125. \quad x^5+x+1 & \text{ sumando y restando } x^2 \\
 (x^5-x^2)+(x^2+x+1) &= x^2(x^3-1)+(x^2+x+1) \\
 &= x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1) \\
 &= (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1] \\
 &= (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)
 \end{aligned}$$


---

# CAPITULO 10

## FRACCIONES ALGEBRAICAS

### Ejercicio 77

Reducir las Fracciones siguientes a su más simple expresión:

$$1. 6a^3b^2/15ab^4 = 2a^2/5b^2$$

$$2. 8a^4b^3c^2/12a^6b^2c = 2c/3a^2$$

$$3. 35x^3y^3z^2/56xy^2z^4 = 5xy^2/8z^2$$

$$4. -16m^3n^4p^4/40m^4n^3p^5 = -2np/5m$$

$$5. 72a^4x^3y^4/-96b^3x^2y^3 = -3a^4xy/4b^3$$

$$6. -63p^8q^7t^4/-54p^5q^3t^2 = 7p^3t^2/6q^4$$

$$7. 91abc^4/39a^2b^6c^5 = 7c/3ab^5$$

$$8. 100x^m y^{n+2} z^3/150x^m y^{n+1} z^2 = 2yz/3$$

$$9. a^4(b-c)^4/a^3(b-c)^6 = a/(b-c)^2$$

$$10. x^5(y+z)^3/x^4(y+z)^4 = 1/x(y+z)$$

$$11. 5ac-bc/25a^2-b^2 = c(5a-b)/(5a+b)(5a-b) = c/5a+b$$

$$12. x^3y-x^2y^2/2x^2y^2-2xy^3 = x^2y(x-y)/2xy^2(x-y) = x/2y$$

$$13. a^2-b^2/(a-b)^2 = (a+b)(a-b)/(a-b)^2 = a+b/a-b$$

$$14. 9ab-12b^2/15a^2-20ab = 3b(3a-4b)/(5a)(3a-4b) = 3b/5a$$

$$15. ax-bx/b^2-a^2 = x(a-b)/-(a+b)(a-b) = -x/a+b$$

$$16. 4x^2+8x/x^2+4x+4 = 4x(x+2)/(x+2)^2 = 4x/x+2$$

$$17. (2x+y)(9z^2-a^2)/(3z-a)(4x^2-y^2) = (2x+y)(3z+a)(3z-a)/(3z-a)(2x+y)(2x-y) = (3z+a)/(2x-y)$$

$$18. a^5b^3-9a^3b^5/a^3b^3-3a^1b^3 = a^2b^3(a+3b)(a-3b)/a^2b^3(a-3b) = ab(a+3b)$$

$$19. x^3-27/x^2-9 = (x-3)(x^2+3x+9)/(x+3)(x-3) = x^2+3x+9/x+3$$

$$20. x^2-7x+10/x^2-11x+30 = (x-5)(x-2)/(x-6)(x-5) = x-2/x-6$$

$$21. 3x^2+26x+35/2x^2+17x+21 = (x+7)(3x+5)/(x+7)(2x+3) = 3x+5/2x+3$$

$$22. x^4-x^3+6x-6/x^2-1 = (x^3+6)(x-1)/(x-1)(x^2+x+1) = x^3+6/x^2+x+1$$

$$23. x^4-x^3-12/x^4-16 = (x+2)(x-2)(x^2+3)/(x^2+4)(x+2)(x-2) = x^2+3/x^2+4$$

$$24. a^3-b^3/a^4+a^2b^2+b^4 = (a-b)(a^2+ab+b^2)/(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab) = a-b/a^2-ab+b^2$$

$$25. \frac{(a^4-b^4)(a^3-b^3)}{(a-b)(a^4-b^4)} = \frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}$$

$$26. (x-a)^2-1/(a-1)^2-x^2 = (x-a+1)(x-a-1)/-(x+a-1)(x-a+1) = -(x-a-1)/(x+a-1)$$

$$27. (x+1)^2-y^2/x^2-(y+1)^2 = (x+1+y)(x+1-y)/(x+y+1)(x-y-1) = (x-y+1)/(x-y-1)$$

$$28. (a+b)^2-(1+b)^2/a^2-1 = (a+2b+1)(a-1)/(a+1)(a-1) = (a+2b+1)/(a+1)$$

$$29. a^2-b^2+c^2+2ac/a^2+b^2-c^2+2ab = (a+b+c)(a-b+c)/(a+b+c)(a+b-c) = a-b+c/a+b-c$$

$$30. \frac{(x+y)^2-(m+n)^2}{(m+x)^2-(n+y)^2} = \frac{(x+y+m+n)(x+y-m-n)}{(m+x+n+y)(m+x-n-y)} = \frac{x+y-m-n}{x-y+m-n}$$

31.  $2y^2 + xy - x^2 / x^2 - 3xy + 2y^2 = -(x-2y)(x+y) / (x-2y)(x-y) = -(x+y) / (x-y)$   
 32.  $5x^2 - 3x - 2 / x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x-1)(5x+2) / (x-1)(x^2+2x+5) = (5x+2) / (x^2+2x+5)$   
 33.  $x^2 - 2x - 3 / x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = (x-3)(x+1) / (x-3)(x+4)(x+1) = 1 / x+4$   
 34.  $x^3 - x^2 - x - 2 / x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = (x-2)(x^2+x+1) / (x+3)(x^2+x+1) = x-2 / x+3$   
 35.  $x^4 - x^3 - x + 1 / x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+x+1) / (x^2+x+1)(x^2-3x+1) = (x-1)^2 / x^2 - 3x + 1$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline -3x^3 - 2x^2 - 2x \\ 3x^3 + 3x^2 + 3x \\ \hline x^2 + x + 1 \\ -x^2 - x - 1 \\ \hline \end{array}$$

36.  $2x^3 + 3x^2 - 1 / x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2(2x-1) / (x+1)^2(x^2+1) = 2x-1 / x^2+1$   
 37.  $a^3 - 4a^2 + 5 / a^4 - 3a^3 - 3a^2 + 10 = (a+1)(a^2-5a+5) / (a^2-5a+5)(a^2+2a+2) = a+1 / a^2+2a+2$   
 38.  $b^3 + b^2 - 10b - 12 / b^3 - 8b - 8 = (b+3)(b^2-2b-4) / (b+2)(b^2-2b-4) = b+3 / b+2$   
 39.  $x^3 - x^2 + 12 / x^4 - 4x^3 + 21x - 54 = (x+2)(x^2-3x+6) / (x^2-3x+6)(x^2-x-9) = x+2 / x^2-x-9$   
 40.  $x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 16 / x^4 + 5x^3 + 8x - 32 = (x^2+4x-8)(x^2+x+2) / (x^2+4x-8)(x^2+x+4) = x^2+x+2 / x^2+x+4$   
 m.c.d. por suma y resta:  $q = x^2+4x-8$  dividiendo cada término por el m.c.d. se obtiene  
 $(x^4+5x^3-2x^2-16) \div (x^2+4x-8) = x^2+x+2$  ;  $(x^4+5x^3+8x-32) \div (x^2+4x-8) = x^2+x+4$

### Ejercicio 78

Reducir las fracciones siguientes al mínimo común denominador:

- $2/ab$ ,  $3/bc$  se obtiene:  $2c/abc$ ,  $3a/abc \rightarrow m.c.m = abc$
- $x/a^2b$ ,  $y/ab^2 \rightarrow bx/a^2b^2$ ,  $ay/a^2b^2$
- $5/xy^2$ ,  $a/xy$ ,  $b/x^2 \rightarrow 5x/x^2y^2$ ,  $axy/x^2y^2$ ,  $by^2/x^2y^2$
- $a-b/4a$ ,  $a+b/6ab \rightarrow 3b(a-b)/12ab$ ,  $2(a+b)/12ab$
- $a/cx^2$ ,  $bc/8x$ ,  $c/3xy \rightarrow 4ay/24x^2y$ ,  $3bcxy/24x^2y$ ,  $8xc/24x^2y$
- $1/ax^2$ ,  $2/a^3x$ ,  $3/a^2x^2 \rightarrow a^2/a^3x^2$ ,  $2x/a^3x^2$ ,  $3a/a^3x^2$
- $x+y/3x^3y^4$ ,  $2/xy^3$ ,  $-3/xy^5 \rightarrow y(x+y)/3x^3y^5$ ,  $6x^2y^2/3x^3y^5$ ,  $-9x^2/3x^3y^5$
- $xy/abc$ ,  $yz/a^2c$ ,  $xz/b^2c^3 \rightarrow abc^3xy/a^2b^2c^3$ ,  $b^2c^3yz/a^2b^2c^3$ ,  $a^2xz/a^2b^2c^3$
- $2/x+1$ ,  $3/x-2 \rightarrow 2(x-2)/(x+1)(x-2)$ ,  $3(x+1)/(x+1)(x-2)$
- $1/a-1$ ,  $2/a^2-1 \rightarrow a+1/a^2-1$ ,  $2/a^2-1 \rightarrow m.c.m = a^2-1 = (a+1)(a-1)$
- $3/x-3$ ,  $1/2x-6 \rightarrow 6/2(x-3)$ ,  $1/2(x-3)$
- $a/a^2-x^2$ ,  $x/a+x \rightarrow a/a^2-x^2$ ,  $x(a-x)/a^2-x^2$
- $1/1-x$ ,  $x/1+x$ ,  $x^2/1-x^2 \rightarrow 1+x/1-x^2$ ,  $x(1-x)/1-x^2$ ,  $x^2/1-x^2$
- $a/a+1$ ,  $1/(a+1)^2$ ,  $a^2/(a+1)^3 \rightarrow a(a+1)^2/(a+1)^3$ ,  $a+1/(a+1)^3$ ,  $a^2/(a+1)^3$
- $\frac{1}{x^2-7x+12}$ ,  $\frac{-1}{x^2-5x+4} \rightarrow \frac{1}{(x-4)(x-3)}$ ,  $\frac{-1}{(x-4)(x-1)} \rightarrow \frac{x-1}{(x-4)(x-3)(x-1)}$ ,  $\frac{x-3}{(x-4)(x-3)(x-1)}$

$$16. \frac{1}{x^2-9}, \frac{2}{x^2-4x+3} \rightarrow \frac{1}{(x+3)(x-3)}, \frac{2}{(x-3)(x-1)}, \frac{x-1}{(x+3)(x-3)(x-1)}, \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$$

$$17. \frac{1}{x-3y}, \frac{1}{x^2+3xy-18y^2}, \frac{1}{x+6y}, \frac{1}{x-3y}, \frac{1}{(x+6y)(x-3y)}, \frac{1}{x+6y}$$

$$\rightarrow \frac{x+6y}{(x-3y)(x+6y)}, \frac{1}{(x-3y)(x+6y)}, \frac{x-3y}{(x-3y)(x+6y)}$$

$$18. \frac{1}{(a-b)(b-c)}, \frac{2}{(b-c)(c-a)}, \frac{3}{(a-c)(b-a)}, \frac{1}{(a-b)(b-c)}, \frac{2}{(b-c)(c-a)}, \frac{3}{(c-a)(c-a)(a-b)}$$

$$\rightarrow \frac{(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{3(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$19. \frac{a}{x^2y-x}, \frac{b}{xy^2-y}, \frac{c}{(xy-1)^2} \rightarrow \frac{a}{x(xy-1)}, \frac{b}{y(xy-1)}, \frac{c}{(xy-1)^2}$$

$$\frac{ay(xy-1)}{xy(xy-1)^2}, \frac{bx(xy-1)}{xy(xy-1)^2}, \frac{cxy}{xy(xy-1)^2}$$

$$* 20. \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{2}{x^3-y^3} \rightarrow \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{x+y}{x-y}, \frac{2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$\rightarrow \frac{y(x^3-y^3)}{xy(x^3-y^3)}, \frac{x(x^3-y^3)}{xy(x^3-y^3)}, \frac{xy(x+y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x^3-y^3)}, \frac{2xy}{xy(x^3-y^3)}$$

### Ejercicio 79

Hallar la suma algebraica:

$$1. \frac{4}{a} - \frac{3}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4-3+2}{a} = \frac{3}{a}$$

$$2. \frac{(x+1)}{b} + \frac{(x-1)}{b} - \frac{x}{b} = \frac{(x+1+x-1-x)}{b} = \frac{x}{b}$$

$$3. \frac{a}{2} + \frac{5a}{3} - \frac{3a}{4} = \frac{(6a+20a-9a)}{12} = \frac{17a}{12}$$

$$4. \frac{x}{3} - \frac{4x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{(10x-24x+9x)}{30} = \frac{-5x}{30} = -\frac{x}{6}$$

$$5. \frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} - \frac{5}{a^3} = \frac{2a^2+4a-5}{a^3}$$

$$6. \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} = \frac{3x-4x^2+2}{x^3}$$

$$7. \frac{3}{2a} + \frac{4}{5a^2} - \frac{3}{10a^3} = \frac{15a^2+8a-3}{10a^3}$$

$$8. \frac{a}{x^2} - \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} = \frac{(ay^2-bxy+cx^2)}{x^2y^2}$$

$$9. \frac{2}{xy} + \frac{3}{yz} - \frac{5}{xz} = \frac{2z+3x-5y}{xyz}$$

$$10. \frac{x^2}{y^2} - \frac{3}{xy} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^4-3xy+y^4}{x^2y^2}$$

$$11. \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{4} + \frac{x-1}{6} - \frac{x+3}{2} = \frac{4(x+1)-3(x-2)+2(x-1)-6(x+3)}{12} = -\frac{(3x+10)}{12}$$

$$12. \frac{3x-2}{4x} + \frac{x-1}{2x^2} - \frac{2x+3}{8x} + \frac{x+1}{x} = \frac{2x(3x-2)+4(x-1)-x(2x+3)+8x(x+1)}{8x^2} = \frac{12x^2+5x-4}{8x^2}$$

$$13. \frac{2y^2+1}{xy^3} - \frac{4x^2-3}{x^3y} + \frac{2xy-1}{x^2y^2} = \frac{x^2(2y^4+1)-y^2(4x^3-3)+xy(2xy-1)}{x^3y^3} = \frac{x^2-2xy+3y^3}{x^3y^3}$$

$$14. \frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = \frac{xy(x-y) + yz(y-z) + xz(z-x) - x^2z - y^2x - z^2y}{xyz} + \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$$

$$15. \frac{4}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} = \frac{4(1-x) - 3}{1-x^2} = \frac{4-4x-3}{1-x^2} = \frac{1-4x}{1-x^2}$$

$$16. \frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2-y^2-x^2+y^2}{(x+y)^2} = 0$$

$$17. \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)^2 - (x+y)^2 + xy}{x^2-y^2} = -\frac{3xy}{x^2-y^2}$$

$$18. \frac{x-y}{x} - \frac{2y}{x-y} - \frac{y^3}{x(x^2-y^2)} = \frac{(x-y)(x^2-y^2) - 2xy(x+y) - y^3}{x(x^2-y^2)} = \frac{x(x^2-3xy-3y^2) - x^2-3xy-3y^2}{x^2-y^2}$$

$$19. \frac{1}{x+1} + \frac{x-4}{x^2-x+1} - \frac{x^2-3x+2}{x^3+1} = \frac{x^2-x+1+(x+1)(x-4)-x^2+3x-2}{x^3+1} = \frac{x^2-x-5}{x^3+1}$$

$$20. \frac{1-t}{1-t+t^2} - \frac{1+t}{1+t+t^2} = \frac{(1-t)(1+t+t^2) - (1+t)(1-t+t^2)}{t^4+t^2+1} = -\frac{2t^3}{t^4+t^2+1}$$

$$21. \frac{3}{m^2-3m+2} + \frac{2}{m^2-4m+3} - \frac{1}{m^2-5m+6} = \frac{3}{(m-2)(m-1)} + \frac{2}{(m-3)(m-1)} - \frac{1}{(m-3)(m-2)}$$

$$= \frac{3(m-3) + 2(m-2) - (m-1)}{(m-2)(m-1)(m-3)} = \frac{4(m-3)}{(m-2)(m-1)(m-3)} = \frac{4}{(m-2)(m-1)}$$

$$22. \frac{4}{x^2-13x+42} + \frac{3}{15x-x^2-56} - \frac{5}{x^2-14x+48} = \frac{4}{(x-7)(x-6)} - \frac{3}{(x-8)(x-7)} - \frac{5}{(x-8)(x-6)}$$

$$= \frac{4(x-8) - 3(x-6) - 5(x-7)}{(x-7)(x-6)(x-8)} = \frac{-4x+21}{(x-7)(x-6)(x-8)}$$

$$23. \frac{x-y}{y} + \frac{4x}{x-y} + \frac{x^3+3x^2y}{y^3-x^2y} = \frac{x-y}{y} + \frac{4x}{x-y} - \frac{x^3+3x^2y}{y(x^2-y^2)} = \frac{(x-y)(x^2-y^2) + 4xy(x+y) - x^3-3x^2y}{y(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{y^2(3x+y)}{y(x^2-y^2)} = \frac{y(3x+y)}{x^2-y^2}$$

$$24. \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2-9) - 3(x-3)(x^2-1) + 3(x+3)(x^2-1) - (x+1)(x^2-9)}{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)}$$

$$= 16x^2/(x^2-1)(x^2-9)$$

$$25. \frac{1}{x+a} - \frac{3}{x+3a} + \frac{3}{x+5a} - \frac{1}{x+7a} = \frac{(x+3a)(x+5a)(x+7a) - 3(x+a)(x+5a)(x+7a) + 3(x+a)(x+3a)(x+7a) - (x+a)(x+3a)(x+5a)}{(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)}$$

$$= \frac{-x^3+15ax^2+7a^2x+105a^3-3x^3-39ax^2-14a^2x-105a^3+3x^3+33ax^2+23a^2x+63a^3-x^3-9ax^2-23a^2x-15a^3}{(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)}$$

$$= 48a^3/(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)$$

$$26. \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{(x-a)(x^2-b^2) - (x-b)(x^2-a^2) + (x+a)(x^2-b^2) - (x+b)(x^2-a^2)}{(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)}$$

$$= \frac{2x(a^2-b^2)}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$$

$$17. \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x+1}{(2-x)(x-3)} + \frac{x+2}{(x-3)(1-x)} = \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} + \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} - \frac{x+2}{(x-3)(x-1)}$$

$$= x^2 - 9 + x^2 - 1 - x^2 + 4 / (x-1)(x-2)(x-3) = x^2 - 6 / (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$18. \frac{2x+3}{x^3+2x^2-9x-18} - \frac{2x-1}{x^3+3x^2-4x-12} = \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)(x+2)} - \frac{2x-1}{(x-2)(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{(x-2)(2x+3) - (x-3)(2x-1)}{(x-3)(x+3)(x+2)(x-2)} = \frac{4x-9}{(x^2-4)(x^2-9)} = \frac{3(2x-3)}{(x^2-4)(x^2-9)}$$

$$19. \frac{m+n}{2m+2n+4} - \frac{2}{m^2+2mn+2m+2n+n^2} = \frac{m+n}{2(m+n+2)} - \frac{2}{(m+n)(m+n+2)} = \frac{m^2+2mn+n^2-4}{2(m+n)(m+n+2)}$$

$$= (m+n-2) / 2(m+n)$$

$$30. \frac{a+c}{(a-b)(a-c)} - \frac{b+c}{(c-a)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-b)(a-c)} = \frac{a+c}{(a-b)(a-c)} - \frac{b+c}{(a-c)(a-b)} - \frac{a+b}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a+c)(b-c) - (b^2-c^2) - (a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a+c)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = -\frac{(a+c)}{(a-c)(b-c)}$$

$$31. \frac{1}{(x-3)(y-2)} - \frac{2}{(y-2)(z-x)} + \frac{3}{(x-2)(y-x)} = \frac{1}{(x-3)(y-2)} + \frac{2}{(y-2)(x-2)} - \frac{3}{(x-2)(x-y)}$$

$$= \frac{x-2+2x-2y-3y+3z}{(x-3)(x-2)(y-2)} = \frac{-3x+5y-2z}{(x-3)(x-2)(y-2)}$$

$$32. \frac{bc}{(a-c)(a-b)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} - \frac{ab}{(a-c)(c-b)} = \frac{bc}{(a-c)(a-b)} - \frac{ac}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2}{(a-c)(a-b)(b-c)} = \frac{a^2b - ab^2 + b^2c - a^2c + ac^2 - bc^2}{a^2b - ab^2 + b^2c - a^2c + ac^2 - bc^2} = 1$$

$$33. \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(a-b)(b-c)} + \frac{1}{c(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{1}{abc}$$

$$34. \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(a-b)(b-c)} - \frac{1}{abc} = \frac{bc(b-c) - ac(a-c) - (a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{b^2c - bc^2 - ac^2 + ac^2 - a^2c + ab^2 - b^2c + a^2c - ac^2 + bc^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{1}{c(b-c)(c-a)}$$

$$35. \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^3}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^3b - a^2c - ab^3 + b^2c + ac^3 - bc^3}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a^3b - a^2c - ab^3 + b^2c + ac^3 - bc^3)}{(a^3b - ab^3 + b^2c - a^2c + ac^3 - bc^3)} = 1$$

$$36. \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^3}{(c-a)(a-b)} + \frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^3b - a^2c - ab^3 + b^2c + ac^3 - bc^3}{a^3b - a^2c + b^2c - a^2c + ac^3 - bc^3} = a+b+c$$

$$37. \frac{a^2-b}{(a-b)(a-1)} + \frac{a+b^2}{(a-a)(b+1)} - \frac{ab+1}{(a-1)(b+1)} = \frac{a^2-b}{(a-b)(a-1)} - \frac{a+b^2}{(a-b)(b+1)} - \frac{ab+1}{(a-1)(b+1)}$$

$$= (a^2b - a^2 - b^2 - b - a^2 + a - ab^2 + b^2 - ab^2 - a + ab^2 + b) / (a-b)(a-1)(b+1) = 0$$

$$38. \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b+c)(a+c-b)} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b+c)(a+b-c)} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$$= \frac{(a+b-c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) + (b+a-c)(b-a+c)(b+c-a)(a+c-b) + (c+a-b)(c-a+b)(a+b-c)(a+c-b)}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$$

$$= (a+b-c)(a+b-c)(b+c-a)(a-b+c) / (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) = 1$$

$$39. \frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)} = \frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} - \frac{ac(b+d)}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab(c+d)}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{abc^2c + b^2cd - ab^2c - b^2cd - a^2bc - a^2cd + a^2bc + a^2cd + a^2bc + a^2bd - ab^2c - ab^2d}{(a-b)(a-c)(b-c)} = d$$

$$40. \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{(x^2-yz)(y+z) + (y^2-xz)(x+z) + (z^2-xy)(x+y)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

$$= \frac{x^2y + x^2z - y^2z - yz^2 + xy^2 + y^2z - x^2z - xz^2 + xz^2 + yz^2 - x^2y - xy^2}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 0$$

### Ejercicio 80

Reducir las siguientes expresiones mixtas a forma fraccionaria:

$$1. x + \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)+x}{x-1} = \frac{x^2-x+x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$2. x+2 + \frac{1-x^2}{x-2} = \frac{x^2-4+1-x^2}{x-2} = \frac{-3}{x-2}$$

$$3. x+y + \frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{x^2-y^2+x^2+y^2}{x-y} = \frac{2x^2}{x-y}$$

$$4. a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$5. y-3 - \frac{y-1}{y+1} = \frac{y^2-2y-3-y+1}{y+1} = \frac{y^2-3y-2}{y+1}$$

$$6. \frac{a-2b}{3} - a+b = \frac{a-2b-3a+3b}{3} = \frac{-(2a-b)}{3}$$

$$7. x^2+xy-y^2 + \frac{2y^3}{(x-y)} = \frac{x^3-y^3+2y^3}{x-y} = \frac{x^3+y^3}{x-y}$$

$$8. \frac{a^2+2ax-x^2}{a+x} + x-a = \frac{a^2+2ax-x^2+x^2-a^2}{a+x} = \frac{2ax}{a+x}$$

$$*9. x-y - \frac{x^2-xy-y^2}{x+y} = \frac{x^2-y^2-x^2+xy+y^2}{x+y} = \frac{xy}{x+y}$$

$$10. \frac{2 + 2(x+x^2) - 8}{2-x} = \frac{8 - x^3 - 8}{2-x} = -\frac{x^3}{2-x}$$

Reducir las siguientes fracciones a forma entera o mixta:

$$11. \frac{2x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{6x}{x} + \frac{5}{x} = 2x - 6 + \frac{5}{x}$$

$$12. \frac{5x^2 + 10x - 8}{5x} = x + 2 - \frac{8}{5x}$$

$$13. \frac{x^2 - 9x + 3}{x+1} = x - 10 + \frac{13}{x+1}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 9x + 3 \quad | x+1 \\ -x^2 - x \\ \hline 10x + 3 \\ -10x - 10 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$14. \frac{3x^2 + 7x - 8}{3x+13} \quad \begin{array}{r} 3x^2 + 7x - 8 \quad | x-2 \\ -3x^2 + 6x \\ \hline 13x - 8 \\ -13x + 26 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$3x^2 + 7x - 8 / x - 2 = 3x + 13 + 18 / x - 2$$

$$15. \frac{a^3}{a^2 + a + b^2} + \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \begin{array}{r} a^3 \quad + \quad b^3 \quad | a-b \\ -a^3 + a^2b \\ \hline a^2b \\ -a^2b + ab^2 \\ \hline ab^2 + b^3 \\ -ab^2 + b^3 \\ \hline 2b^3 \end{array}$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a-b} = \frac{a^3 + ab^2 + b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2 + \frac{2b^3}{a-b}$$

$$16. \frac{x^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} - y^4 \quad \begin{array}{r} x^4 \quad - y^4 \quad | x+y \\ -x^4 + x^3y \\ \hline -x^3y \\ +x^3y + x^2y^2 \\ \hline x^2y^2 \\ -x^2y^2 - xy^3 \\ \hline -xy^3 - y^4 \\ xy^3 + y^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x+y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

$$17. \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2} = a+b$$

$$18. \frac{x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - x + 3} \quad \begin{array}{r} x^3 + 6x^2 - 5 \quad | x^2 - x + 3 \\ -x^3 + x^2 - 3x \\ \hline 7x^2 - 3x - 5 \\ -7x^2 + 7x - 21 \\ \hline 4x - 26 \end{array}$$

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - x + 3} = x + 7 + \frac{4x - 26}{x^2 - x + 3}$$

$$19. \frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)}{(a^2 - ab + b^2)} = a^2 + ab + b^2$$

$$20. \frac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x^2 + x - 1} = 2x - 3 + \frac{-3x + 1}{x^2 + x - 1}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 8x + 4 \quad | x^2 + x - 1 \\ -2x^3 - 2x^2 + 2x \\ \hline -3x^2 - 6x + 4 \\ 3x^2 + 3x - 3 \\ \hline -3x + 1 \end{array}$$



Efectuar las multiplicaciones indicadas:

1.  $\frac{6a^2b}{5c} \cdot \frac{15abc}{9a^2b^3} = \frac{2a}{b}$
2.  $\frac{3xyz}{4ax^2} \cdot \frac{10abz}{6b^2y^2z} = \frac{5}{4x}$
3.  $\frac{24m^2n^3}{15mnp} \cdot \frac{20pq}{8mnq} = 4n$
4.  $\frac{21xy^3}{25y^2z^3} \cdot \frac{30x^2z}{14x^3y} = \frac{9}{5z^2}$
5.  $\frac{13a^3x^2}{22b^2y^4} \cdot \frac{33c^2y^3}{39a^2x} \cdot \frac{-6by}{5cx} = \frac{-3ac}{5b}$
6.  $\frac{3m^2}{3x^2-6x} \cdot \frac{x^2-4}{m} = \frac{3m(x+2)(x-2)}{3x(x-2)} = \frac{m(x+2)}{x}$
7.  $\frac{4a^2}{2x+4} \cdot \frac{3x+6}{6a} = \frac{4a^2(3)(x+2)}{6a(2)(x+2)} = a$
8.  $\frac{4x^2+4y^2}{2x-2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{4(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{2(x-y)(x+y)} = 2(x^2+y^2)$
9.  $\frac{a^2-1}{a^2-3a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2+3a+2} = \frac{(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)}{(a-2)(a-1)(a+2)(a+1)} = 1$
10.  $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{a}{b-a}\right) = \left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right) \left(\frac{b}{b-a}\right) = \frac{b+a}{b}$
11.  $\frac{10x^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x^3+y^3}{5x^2} = \frac{2x(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x^2-xy+y^2)} = 2x(x+y)$
12.  $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)} = \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$
13.  $\frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{a(a+b)(a-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a}$
14.  $\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \frac{(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{x+a}{x-a}$
15.  $\left(\frac{9a^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{6a}{3a-b} - 2\right) \left(\frac{b}{3a+b}\right) = \frac{(3a+b)(3a-b)}{b^2} \cdot \frac{2b}{(3a-b)} \cdot \frac{b}{(3a+b)} = 2$
16.  $\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10} \cdot \frac{x^2+5x^2}{x^2-x} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+2)}{(x+5)(x+2)} \cdot \frac{x^2(x+5)}{x(x-1)} = x$
17.  $\frac{a^2+a}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a^2-a}{2a+1} \cdot \frac{(a+1)^2-a^2}{a^3-a} = \frac{a(a+1)}{(a+1)^2} \cdot \frac{a(a-1)}{(2a+1)} \cdot \frac{(2a+1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{a}{(a-1)^2}$
18.  $\frac{ab-b^2-bc}{(a+c)^2-b^2} \cdot \frac{a^2-ab+ac}{(a-b)^2-c^2} \cdot \frac{(a+b)^2-c^2}{ac+bc-c^2} = \frac{b(a-b-c)}{(a+c+b)(a-c-b)} \cdot \frac{a(a-b+c)}{(a-b+c)(a-b-c)} \cdot \frac{(a+b+c)(a-b-c)}{c(a+b-c)} = \frac{ab}{c(a+c-b)}$
- \*19.  $\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2+y^2-z^2-2xy} \cdot \frac{x-y-z}{x+y+z} = \frac{(x+y)^2-z^2}{(x-y)^2-z^2} \cdot \frac{x-y-z}{x+y+z} = \frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)} \cdot \frac{x+y-z}{x+y+z} = \frac{x+y-z}{x-y+z}$
20.  $\frac{4m^2}{m-1} \cdot \frac{m^4-1}{16m^4-9m^2} \cdot \frac{4m+3}{2m^2+2} = \frac{4m^2}{(m-1)} \cdot \frac{(m^2+1)(m+1)(m-1)}{m^2(4m+3)(4m-3)} \cdot \frac{(4m+3)}{2(m^2+1)} = \frac{2(m+1)}{4m-3}$
21.  $\frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5} \cdot \frac{x^2+11x+18}{x^2-6x-7} \cdot \frac{x^2-8x+7}{x^2+6x-27} = \frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x-1)} \cdot \frac{(x+9)(x+2)}{(x-7)(x+1)} \cdot \frac{(x-7)(x-1)}{(x+9)(x-3)} = \frac{x+2}{x+1}$
22.  $\frac{2x^2-3x-2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+3} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-x-6} = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x+2)(2x-1)} \cdot \frac{(2x+3)(x-1)}{(x+3)(2x+1)} \cdot \frac{(x+3)(2x-1)}{(2x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x+2}$

- $$23. \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \left[ 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2} \right] \frac{x^3 - y^3}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \cdot \frac{-2xy}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x+y)^2} = \frac{-2(x^2 + xy + y^2)}{x+y}$$
- $$24. \frac{x^2 + 3x - 70}{x^2 - 100} \cdot \frac{x^2 + x - 42}{x^2 - 36} \cdot \frac{x^2 + 11x + 30}{x^2 - 49} = \frac{(x+10)(x-7)}{(x+10)(x-10)} \cdot \frac{(x+7)(x-6)}{(x+6)(x-6)} \cdot \frac{(x+6)(x+5)}{(x+7)(x-7)} = \frac{x+5}{x-10}$$
- $$25. \frac{9a^2 - 16}{12a^2 - a - 20} \cdot \frac{4a^2 - 1}{6a^2 + 11a + 4} \cdot \frac{16a^2 - 25}{8a^2 - 14a + 5} = \frac{(3a+4)(3a-4)}{(30-4)(4a+5)} \cdot \frac{(2a+1)(2a-1)}{(3a+4)(2a+1)} \cdot \frac{(4a+5)(4a-5)}{(4a-5)(2a-1)} = 1$$
- $$26. \frac{a^2 + 3a}{a^2 - 4a} \cdot \frac{a^2 - 2a - 3}{a^2 - 2a - 15} \cdot \frac{2a^2 - 7a - 15}{3a^2 + 7a + 2} = \frac{a(a+3)}{a(a-4)} \cdot \frac{(a-4)(a+2)}{(a-5)(a+3)} \cdot \frac{(a-5)(2a+3)}{(a+2)(3a+1)} = \frac{2a+3}{3a+1}$$
- $$27. \frac{b^2 - 9}{b^2 - 4} \cdot \frac{b^2 - 2b}{b^2 - 3b} \cdot \frac{2b^2 + 3b - 2}{2b^2 + 5b - 3} = \frac{(b+3)(b-3)}{(b+2)(b-2)} \cdot \frac{b(b-2)}{b(b-3)} \cdot \frac{(b+2)(2b-1)}{(b+3)(2b-1)} = 1$$
- $$28. \frac{c^2 - 1}{c^2 - 2c} \cdot \frac{c^3 - 1}{c^2 - 2c + 1} \cdot \frac{c^2 + 3c - 10}{c^2 + c + 1} = \frac{(c+1)(c-1)}{c(c-2)} \cdot \frac{(c-1)(c^2 + c + 1)}{(c-1)^2} \cdot \frac{(c+5)(c-2)}{(c^2 + c + 1)} = \frac{(c+1)(c+5)}{c} \cdot \frac{c^2 + 6c + 5}{c}$$
- $$29. \left( x - \frac{xy^3 + y^4}{x^3 + y^3} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 - y^2)} = \frac{x^2}{x+y}$$
- $$30. \frac{a^2b - ab^2}{a^2 + b^2} \cdot \left( 1 + \frac{a^2 + b^2}{2ab} \right) \left( \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right) = \frac{ab(a-b)}{a^2 + b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{2ab} \cdot \frac{2(a^2 + b^2)}{(a-b)(a+b)} = a+b$$

## Ejercicio 82

Efectuar:

- $$1. \frac{12a^3}{7b^2} : \frac{18a^2b}{21b^2c} = \frac{12a^3}{7b^2} \cdot \frac{21b^2c}{18a^2b} = \frac{2ac}{b}$$
- $$2. \frac{8x^2y^3}{9a^2b} : \frac{4x^3y^3}{3a^3b^2} = \frac{8x^2y^3}{9a^2b} \cdot \frac{3a^3b^2}{4x^3y^3} = \frac{2ab}{3x}$$
- $$3. \frac{25a^3x^2y}{24b^2xz} : \frac{15a^2xy^2}{18b^2yz^2} = \frac{25a^3x^2y}{24b^2xz} \cdot \frac{18b^2yz^2}{15a^2xy^2} = \frac{5az}{4b}$$
- $$4. \frac{10m^3n^4}{27pq^3} : \frac{30am^2n}{81p^2q^2} = \frac{10m^3n^4}{27pq^3} \cdot \frac{81p^2q^2}{30am^2n} = \frac{m^2n^3p}{aq}$$
- $$5. \frac{8y^3}{11xz^2} \cdot \frac{14x^2y}{5y^2z} : \frac{7y^3z^2}{22mx^3} = \frac{8y^3}{11xz^2} \cdot \frac{14x^2y}{5y^2z} \cdot \frac{22mx^3}{7y^3z^2} = \frac{32mx^4}{1yz^5}$$
- $$6. \frac{4p^2}{15qr^2} : \frac{2xz}{3r^3y} \cdot \frac{5xz^2q}{p^2ry} = \frac{4p^2}{15qr^2} \cdot \frac{3r^3y}{2xz} \cdot \frac{5xz^2q}{p^2ry} = 2z$$
- $$7. \frac{25ab}{a^2 - c^2} : \frac{10bc}{a+c} = \frac{25ab}{a^2 - c^2} \cdot \frac{(a+c)}{10bc} = \frac{5a}{2c(a-c)}$$
- $$8. \frac{3a^2}{a^3 - b^3} : \frac{a}{a-b} = \frac{3a^2}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{3a}{a^2 + ab + b^2}$$

9.  $\frac{x^4 - a^4}{(x-a)^2} : \frac{x^2 + ax}{x-a} = \frac{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}{(x-a)^2} \cdot \frac{x-a}{x(x+a)} = \frac{x^2+a^2}{x}$
10.  $\frac{x^2-81}{x^2+3x} : \frac{x^2+9x}{x^2-9} = \frac{(x+9)(x-9)}{x(x+3)} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x(x+9)} = \frac{x^2-12x+27}{x^2}$
- \* 11.  $\frac{x^2-25}{x^2-16} : \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x+4)(x-4)} \cdot \frac{(x+4)(x-3)}{(x+5)(x-3)} = \frac{x-5}{x-4}$
- \* 12.  $\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} : \frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2} = \frac{(c+a+b)(c-a-b)}{(c+a-b)(c-a+b)} \cdot \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{c-a-b}{c-a+b}$
13.  $\frac{h^3+1}{h^2-h} : \frac{h^3-h^2+h}{h^2-2h+1} = \frac{(h+1)(h^2-h+1)}{h(h-1)} \cdot \frac{(h-1)^2}{h(h^2-h+1)} = \frac{h^2-1}{h^2}$
14.  $\frac{a^2-2bc-b^2-c^2}{a^2-c^2-b^2+2bc} : \frac{a+b+c}{a-b+c} = \frac{a^2-(b^2+2bc+c^2)}{a^2-(b^2-2bc+c^2)} \cdot \frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)} = (a-b-c)/(a+b-c)$
15.  $\frac{a^2-4a-5}{a^2+2a-8} : \frac{a^2-3a-10}{a^2+a-12} : \frac{a^2-2a-3}{a^2-4} = \frac{(a-5)(a+1)}{(a+4)(a-2)} \cdot \frac{(a+4)(a-3)}{(a-5)(a+2)} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{(a-3)(a+1)} = 1$
- \* 16.  $\frac{a^2b^3+2a^2}{b^4+b^3} : \frac{b^4-7b^3+3}{b^4-4b^3+3} : \frac{a^2b^4-2a^2b^3-3a^2}{b^4-8b^3-9} = \frac{a^2(b^2+2)}{b^3(b+1)} \cdot \frac{(b^3-3)(b+1)(b-1)}{(b+3)(b-3)(b^2+2)} \cdot \frac{(b+3)(b-3)(b^2+1)}{a^2(b^3-3)(b^2+1)} = \frac{b-1}{b^3}$
17.  $\frac{x^3-xy^2}{x^3+y^3} : \frac{x^2-xy+y^2}{x^2-xy} : \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-8y^2} = \frac{x(x+y)(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{(x^2-xy+y^2)}{x(x-y)} \cdot \frac{(x^2-xy+y^2)}{(x^2+2xy+y^2)} = x-2y$
18.  $\frac{x^4+64}{(x^2+4)^3} : \frac{2x^6+16x^4+32x^2}{6x^4+6x^2} : \frac{x^4-4x^2+16}{3a(x^2+1)} = \frac{(x^2+4)(x^4-4x^2+16)}{(x^2+4)^3} \cdot \frac{2x^2(x^2+4)^3}{6x^2(x^2+1)} \cdot \frac{3a(x^2+1)}{(x^4-4x^2+16)} = a$
19.  $\left(3 - \frac{4b+20a}{2b+5a}\right) : \left(4 - \frac{16a}{b} + \frac{15a^2}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{4a}{b} + 4 - \frac{15a^2}{b^2}\right)$   
 $= \frac{6b+15a-4b-20a}{2b+5a} : \frac{4b^2-16ab+15b^2}{b^2} \cdot \frac{4ab+4b^2-15a^2}{b^2}$   
 $= \frac{2b-5a}{2b+5a} \cdot \frac{b^2}{(2b-5a)(2b-3a)} \cdot \frac{(2b+5a)(2b-3a)}{b^2} = 1$
20.  $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left[\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\right] = \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)} : \left[\left(\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)\right]$   
 $= \frac{4x}{(1-x)(x+1)} \cdot \frac{(1-x)(x+1)}{2x^2} = \frac{2}{x}$

## Ejercicio 83

Simplificar:

$$1. \frac{x-4/x}{x+2/x} = \frac{(x+2)(x-2)/x}{(x+2)/x} = x-2$$

$$2. \frac{x - \frac{3}{y}}{y - \frac{3}{x}} = \frac{\frac{xy-3}{y}}{\frac{xy-3}{x}} = \frac{x}{y}$$

$$3. \frac{\frac{xy}{z} - 2m}{2z - \frac{xy}{m}} = \frac{\frac{xy-2mz}{z}}{\frac{2mz-xy}{m}} = \frac{-\left(\frac{2mz-xy}{z}\right)}{\frac{2mz-xy}{m}} = -\frac{m}{z}$$

$$4. \frac{1 - \frac{b}{a+b}}{1 + \frac{b}{a-b}} = \frac{\frac{a+b-b}{a+b}}{\frac{a-b+b}{a-b}} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$5. \frac{a + \frac{ab}{a-b}}{a - \frac{ab}{a+b}} = \frac{\frac{a^2}{a-b}}{\frac{a^2}{a+b}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$6. \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}} = 1$$

$$7. \frac{a + \frac{ab}{a-b}}{\frac{a^2}{a^2-b^2} - 1} = \frac{\frac{a^2}{a-b}}{\frac{b^2}{(a+b)(a-b)}} = \frac{a^2(a+b)}{b^2}$$

$$8. \frac{\frac{x^3-y^3}{x+y}}{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x+y}}{\frac{(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}} = (x-y)^2$$

$$9. \frac{x}{1 - \frac{1-x}{1+x}} = \frac{x}{\frac{2x}{1+x}} = \frac{1+x}{2}$$

$$10. \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} = \frac{\frac{yz+xy+xz}{xyz}}{\frac{x^2z+y^2x+z^2y}{xyz}} = \frac{yz+xy+xz}{x^2z+xy^2+yz^2}$$

$$11. \frac{\frac{1}{a+b} - \frac{c}{(a+b)(a+c)}}{\frac{1}{a+c} - \frac{b}{(a+b)(a+c)}} = \frac{\frac{a}{(a+b)(a+c)}}{\frac{a}{(a+b)(a+c)}} = 1$$

$$12. \frac{\frac{x+2}{x} - \frac{x-2}{2}}{\frac{x+2}{2} - \frac{x-2}{x}} = \frac{\frac{x^2+4}{2x}}{\frac{x^2+4}{2x}} = 1$$

$$13. \frac{\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}}{\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}} = \frac{\frac{x(1+x)}{2x^2-1}}{\frac{x(1+x)}{2x^2-1}} = \frac{1}{1}$$

$$14. \frac{\frac{x-3}{x-5} - \frac{x-5}{x-3}}{\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}} = \frac{\frac{A(x-4)}{(x-5)(x-3)}}{\frac{2}{(x-5)(x-3)}} = 2(x-4)$$

$$15. \frac{\frac{x}{c-x} + \frac{x}{c+x}}{\frac{c}{c-x} - \frac{c}{c+x}} = \frac{\frac{2cx}{(c-x)(c+x)}}{\frac{2cx}{(c-x)(c+x)}} = 1$$

$$16. \frac{\frac{x}{x-a} + \frac{a}{x+a}}{\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}} = \frac{\frac{x^2+2ax-a^2}{(x-a)(x+a)}}{\frac{x^2-a^2}{(x-a)(x+a)}} = \frac{x^2+2ax-a^2}{x^2-a^2}$$

$$17. \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}} = \frac{\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}}{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}} = \frac{a^2+b^2}{2ab}$$

$$18. \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}} = \frac{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}} = 2$$

$$19. \frac{1}{a - \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} = \frac{1}{a - \frac{1}{\frac{a^2+1}{a}}} = \frac{1}{a - \frac{a}{a^2+1}} = \frac{1}{\frac{a^3+a-a}{a^2+1}} = \frac{a^2+1}{a^3}$$

$$20. 3 - \frac{1}{4 - \frac{5}{2 - \frac{a}{b}}} = 3 - \frac{1}{4 - \frac{5b}{2b-a}} = 3 - \frac{2b-a}{3b-4a} = \frac{7b-11a}{3b-4a}$$

$$21. x^2 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}} = x^2 - \frac{x}{\frac{1}{x+1}} = x^2 - x^2 - x = -x$$

$$22. \frac{2}{a - \frac{a^2-1}{a + \frac{1}{a-1}}} = \frac{2}{a - \frac{a^2-1}{\frac{a^2-a+1}{a-1}}} = \frac{2}{a - \frac{a^2-a^2+a+1}{a^2-a+1}} = \frac{2}{\frac{a^2-a+1}{a^2-a+1}} = \frac{2(a^2-a+1)}{2a-1}$$

$$23. \frac{a+b}{a+b + \frac{1}{a-b + \frac{b^2}{a+b}}} = \frac{a+b}{a+b + \frac{1}{\frac{a^2}{a+b}}} = \frac{a+b}{a+b + \frac{a+b}{a^2}} = \frac{a^2(a+b)}{(a^2+1)(a+b)} = \frac{a^2}{a^2+1}$$

$$24. \frac{\frac{X}{1 - \frac{1-X}{1 + \frac{X^2}{3-X}}}}{1 - \frac{1-X}{1 + \frac{X^2}{3-X}}} = \frac{\frac{X}{1 - \frac{1-X}{1 + \frac{X^2}{3-X}}}}{\frac{3-X+X^2}{3-X}} = \frac{\frac{X}{1 - \frac{3-4X+X^2}{3-X+X^2}}}{\frac{3-X+X^2}{3-X+X^2}} = \frac{X}{3-X+X^2} = \frac{3-X+X^2}{3}$$

$$25. \frac{\frac{X-Y}{X+Y} - \frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2}}{\frac{X+Y}{X-Y} + \frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2}} = \frac{\frac{X^2-2XY+Y^2-X^2-Y^2}{(X^2-Y^2)}}{\frac{X^2+2XY+Y^2+X^2+Y^2}{(X^2-Y^2)}} = \frac{-2XY}{2(X^2+XY+Y^2)} = \frac{-XY}{X^2+XY+Y^2}$$

$$26. \frac{\frac{X+Y}{X-Y} - \frac{X^3+Y^3}{X^3-Y^3}}{\frac{X+Y}{X-Y} - \frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2}} = \frac{\frac{X^3+X^2Y+XY^2+X^2Y+XY^2+Y^3-X^3-Y^3}{(X-Y)(X^2+XY+Y^2)}}{\frac{X^2+2XY+Y^2-X^2-Y^2}{(X+Y)(X-Y)}} = \frac{\frac{2XY(X+Y)}{X^2+XY+Y^2}}{\frac{2XY}{X+Y}} = \frac{(X+Y)^2}{X^2+XY+Y^2}$$

$$27. \frac{\frac{\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}}{\frac{X}{Y} - \frac{Y}{X}} : \frac{\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}}{\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right)^2}}{\frac{\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}}{\frac{X}{Y} - \frac{Y}{X}}} = \frac{\frac{\frac{X^2+Y^2}{XY} \cdot \frac{(X+Y)^2}{X^2Y^2}}{\frac{X^2-Y^2}{XY} \cdot \frac{(X^2+Y^2)(X+Y)(X-Y)}{X^4Y^4}}}{\frac{X^2+Y^2}{XY} \cdot \frac{(X+Y)^2}{X^2Y^2}} = \frac{-\frac{X^2+Y^2}{(X+Y)(X-Y)} \cdot \frac{X^2Y^2(X+Y)}{(X^2+Y^2)(X+Y)(X-Y)}}{-X^2Y^2/(X-Y)^2} = -X^2Y^2/(X-Y)^2$$

$$28. \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}} = \frac{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a(b+c)}} : \frac{\frac{a+c-b}{b(a+c)}}{\frac{a+c+b}{b(a+c)}} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{a+c+b}{a+c-b} = \frac{b+c-a}{a+c-b}$$

$$29. \frac{\frac{\frac{X}{1 + \frac{1}{X-1}}}{1 + \frac{X}{X^2 - \frac{1}{1 - \frac{X-1}{X}}}}}{1 + \frac{X}{X^2 - \frac{1}{1 - \frac{X-1}{X}}}} = \frac{\frac{\frac{X}{X-1}}{1 + \frac{X}{X^2 - \frac{1}{1 - \frac{X-1}{X}}}}}{1 + \frac{X}{X^2 - \frac{1}{1 - \frac{X-1}{X}}}} = \frac{\frac{X-1}{1 + \frac{X}{X^2 - X}}}{\frac{X}{X-1}} = \frac{X-1}{X} = \frac{(X-1)^2}{X}$$

$$30. \frac{\frac{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}}{\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}} - \frac{\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}}{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}}}{1 : \frac{X+Y}{X-Y} + \frac{X-Y}{X+Y} : \frac{X^2+Y^2}{Y^2} + \frac{Y^2}{X^2} - 2} = \frac{\frac{(Y^2+X^2)^2 - (Y^2-X^2)^2}{(Y^2-X^2)(Y^2+X^2)}}{1 : \frac{(X^2-Y^2)}{2(X^2+Y^2)} \cdot \frac{X^2Y^2}{(X^2-Y^2)^2}} = \frac{\frac{(Y^2+X^2)^2 - (Y^2-X^2)^2}{(Y^2-X^2)(Y^2+X^2)}}{\frac{(Y^2-X^2)(X^2Y^2)}{2(Y^2+X^2)(Y^2-X^2)^2}}$$

$$= -2 \frac{[(Y^2+X^2)^2 - (Y^2-X^2)^2]}{X^2Y^2} = -2 \frac{[Y^4 + 2X^2Y^2 + X^4 - Y^4 - 2X^2Y^2 - X^4]}{X^2Y^2}$$

$$= -2 \frac{(4X^2Y^2)}{X^2Y^2} = -8$$

## Ejercicio 84

hallar el valor numérico de cada una de las fracciones siguientes para los valores de las letras que se indican o expresar que la fracción correspondiente carece de valor numérico. En los casos de indeterminación dar, si es posible, el verdadero valor.

1.  $(x^2 - x - 12)/(x^2 + 2)$  para  $x = 4$ ;  $(4^2 - 4 - 12)/(4^2 + 2) = 0$
2.  $(x^2 - 9)/(x^2 + 1)$  para  $x = -3$ ;  $(-3^2 - 9)/[(-3)^2 + 1] = 0$
3.  $(x+6)/(x^2-1)$  para  $x=1$ ;  $(1+6)/(1^2-1) = 7/0$  no tiene
4.  $(x^2+7x+10)/(x+8)$  para  $x=-5$ ;  $[(-5)^2+7(-5)+10]/[(-5)+8] = 0$
5.  $(2x+3)/(x^2-5x-14)$  para  $x=-2$ ;  $[2(-2)+3]/[(-2)^2-5(-2)-14] = -1/0$  no tiene
6.  $(x^2+x+1)/(x^2-6x+9)$  para  $x=3$ ;  $(3^2+3+1)/[3^2-6(3)+9] = 13/0$  no tiene
7.  $x^2-4/x^2-x-2$  para  $x=2$ ;  $(x+2)(x-2)/(x-2)(x+1) = x+2/x+1$  ind.  $\rightarrow 2+2/2+1 = 4/3$
8.  $x^2-8x+15/x^2-6x+5$  para  $x=5$ ;  $(x-5)(x-3)/(x-5)(x-1) = x-3/x-1$  ind.  $5-3/5-1 = 1/2$
9.  $\frac{x^3+x^2-x+2}{x^3+3x^2+3x+2}$  para  $x=-2$ ;  $\frac{(x+2)(x^2-x+1)}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \frac{(-2)^2-(-2)+1}{(-2)^2-2+1} = \frac{7}{3}$  indeter.
10.  $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$  para  $x=-1$ ;  $\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$  ind.  $= \frac{-1-1}{-1+0} = \frac{-2}{0}$  no tiene
11.  $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$  para  $x=2$ ;  $\frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-2}{x-3} = \frac{2-2}{2-3} = 0$
12.  $\frac{x^3-7x+6}{x^3-3x+2}$  para  $x=1$ ;  $\frac{(x-1)(x+3)(x-2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$  ind.  $= \frac{(1+3)(1-2)}{(1-1)(1+2)} = \frac{-4}{0}$  no tiene
13.  $\frac{3x^3+x-1}{2x^2+5x-3}$  para  $x=\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}-1}{2(\frac{1}{2})^2+5(\frac{1}{2})-3} = \frac{1/4}{3-3} = \frac{1}{0}$  no tiene
14.  $\frac{2x+y-4}{3x+2y-7}$  para  $x=1; y=2$ ;  $\frac{2(1)+2-4}{3(1)+2(2)-7} = \frac{0}{0}$  ind. no tiene
15.  $\frac{x^2+y^2}{x-y}$  para  $x=y=3$ ;  $\frac{(3)^2+(3)^2}{3-3} = \frac{18}{0}$  no tiene

## Ejercicio 85 (REPASO)

## I. Simplificar:

1.  $-36a^3bc^2/54a^2b^5c^3 = -2a/3b^4c$
2.  $150x^3y^4z^2/225x^5y^4t^3 = 2y^2z^2/3x^2t^3$
3.  $(a^2-ab-30b^2)/(a^2-3ab-18b^2) = (a-6b)(a+5b)/(a-6b)(a+3b) = a+5b/a+3b$
4.  $(x^2y^2-xy^3)/(x^3y-xy^3) = xy^2(x-y)/xy(x+y)(x-y) = y/x+y$

$$5. \frac{(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a^2+ab+b^2)}{(a+b)}$$

$$6. \frac{(a-x)^2 - (b+y)^2}{(a+y)^2 - (b+x)^2} = \frac{(a+x+b+y)(a+x-b-y)}{(a+y+b+x)(a+y-b-x)} = \frac{(a+x-b-y)}{(a+y-b-x)}$$

$$7. \frac{x^{12} + y^{12}}{x^5 + x^4y + x^3y^2 + y^5} = \frac{(x^4 + y^4)(x^8 - x^4y^4 + y^8)}{(x^4 + y^4)(x+y)} = \frac{x^8 - x^4y^4 + y^8}{(x+y)}$$

$$8. \frac{b^2 - 1}{(1+ab)^2 - (a+b)^2} = \frac{(b+1)(b-1)}{(1+ab+a+b)(1+ab-a-b)} = \frac{(b+1)(b-1)}{(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)} = \frac{1}{(a+1)(a-1)}$$

$$9. \frac{2x^2 - 5x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2} = \frac{(x-3)(2x+1)}{(2x+1)(x^2 - x - 2)} = \frac{x-3}{x^2 - x - 2} = \frac{x-3}{(x-2)(x+1)}$$

$$10. \frac{a^3 + 2a^2 - 3}{a^4 + 2a^3 + a^2 + 3} = \frac{(a-1)(a^2 + 3a + 3)}{(a^2 + 3a + 3)(a^2 - a + 1)} = \frac{a-1}{a^2 - a + 1}$$

II. Reducir al mínimo común denominador:

$$1. \frac{1}{3x^3y^2}, \frac{-1}{2y^2z^3}, \frac{5}{6x^2z^2} \rightarrow \frac{2z^3}{6x^3y^2z^3}, \frac{-3x^3}{6x^3y^2z^3}, \frac{5xy^2z}{6x^3y^2z^3}$$

$$2. \frac{a}{a+b}, \frac{b}{b-a}, \frac{a^2}{a^2-b^2} \rightarrow \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{-b(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{a^2}{a^2-b^2}$$

$$3. \frac{1}{x^2 - xy - 12y^2}, \frac{2}{2x^2 + 5xy - 3y^2} \rightarrow \frac{1}{(x-4y)(x+3y)}, \frac{2}{(x+3y)(2x-y)}, \frac{2x-y}{(x-4y)(x+3y)(2x-y)}, \frac{2(x-4y)}{(x-4y)(x+3y)(2x-y)}$$

$$4. \frac{1}{(x-y)(y-z)}, \frac{1}{(y-z)(x-z)}, \frac{1}{(z-x)(x-y)} \rightarrow \frac{x-z}{(x-y)(x-z)(y-z)}, \frac{x-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}, \frac{-(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$5. \frac{x}{x^3 - y^3}, \frac{y}{x^3 + y^3}, \frac{1}{x^2 + xy + y^2}, \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$$

$$x/(x-y)(x^2+xy+y^2), y/(x+y)(x^2-xy+y^2), 1/(x^2+xy+y^2), 1/(x^2-xy+y^2)$$

$$x(x^3+y^3)/x^4-y^4, y(x^3-y^3)/x^4-y^4, (x-y)(x^3+y^3)/x^4-y^4, (x+y)(x^3-y^3)/x^4-y^4$$

III. Sumar

$$1. \frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{10} - \frac{x+1}{2} + \frac{x-4}{5} = \frac{2x-2+x-2-5x-5+2x-8}{10} = -\frac{17}{10}$$

$$2. \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1+x+1-x-2x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1+x}$$

$$3. \frac{2}{3a+1} - \frac{3}{3a-1} + \frac{3a}{9a^2-1} = \frac{6a-2+3a-9a-3}{(3a+1)(3a-1)} = \frac{-5}{9a^2-1}$$

$$4. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{a-1}{b-a} + \frac{b+1}{a+b} = \frac{a^2+b^2-(a-1)(a+b)+(b+1)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a}{a^2-b^2}$$

$$5. \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+x+1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x^3+2x^2+2+x^2-4x+3-3x^2}{x^3-1} = \frac{-2x+5}{x^3-1}$$

$$6. \frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30} + \frac{2}{x^2-10x+24} = \frac{1}{(x-5)(x-4)} - \frac{1}{(x-6)(x-5)} + \frac{2}{(x-6)(x-4)} = \frac{2}{(x-5)(x-4)}$$



$$7. \frac{1}{a-1} + \frac{2}{a+2} - \frac{2}{a-2} - \frac{1}{a+1} = \frac{(a+1)(a^2-4) + 2(a^2-1)(a-2) - 2(a+2)(a^2-1) - (a-1)(a^2-4)}{(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)} = \frac{-6a^2}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$8. \frac{b+1}{(b-2)(b-3)} + \frac{b}{(b-3)(b-4)} - \frac{2}{(b-2)(b-4)} = \frac{(b+1)(b-4) - b(b-2) - 2(b-3)}{(b-2)(b-3)(b-4)} = \frac{-3b+2}{(b-2)(b-3)(b-4)}$$

$$9. \frac{x}{x+y} + \frac{x}{x-y} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^4}{x^4+y^4} = \frac{x(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) + x(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) + 2x^2(x^2-y^2)(x^4+y^4) + 4x^4(x^2-y^2)(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)(x+y)(x-y)} \\ = 8x^3/x^8 - y^8$$

$$10. \frac{xy+z^2}{(x-z)(y-z)} + \frac{xz+y^2}{(x-y)(z-y)} + \frac{yz+x^2}{(y-x)(z-x)} = \frac{(x-y)(xy+z^2) - (xz+y^2)(x-z) + (yz+x^2)(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\ = 2(x^2y - xy^2 + y^2z - x^2z + xz^2 - yz^2) / (x^2y - xy^2 + y^2z - x^2z + xz^2 - yz^2) = 2$$

IV. Reducir a la forma fraccionaria:

$$1. 3x + \frac{5-x}{2} = \frac{6x+5-x}{2} = \frac{5(x+1)}{2} \quad 2. 2y - \frac{6xy-y^2}{3x} = \frac{6xy-6xy+y^2}{3x} = \frac{y^2}{3x}$$

$$3. x+y - \frac{x^2-y^2}{x+2y} = \frac{x^2+2xy+xy+2y^2-x^2+y^2}{x+2y} = \frac{3y(x+y)}{x+2y} \quad 4. \frac{a^3}{1-a} + a^2 + a+1 = \frac{a^3+1-a^3}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

$$5. 1-x+x^2 - \frac{x^3}{1+x} = \frac{1+x^2-x^3}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

V. Reducir a la forma entera o mixta:

$$1. \frac{4a^3-2a+5}{2a} = \frac{4a^3}{2a} - \frac{2a}{2a} + \frac{5}{2a} = 2a^2 - 1 + \frac{5}{2a}$$

$$2. \begin{array}{r} X^3 + X^2 - 3 \quad | \quad X+2 \\ -X^3 - 2X^2 \\ \hline X^2 + 2X \\ 2X - 3 \\ -2X - 4 \\ \hline -7 \end{array} \quad \frac{X^3+X^2-3}{X+2} = X^2 - X + 2 - \frac{7}{X+2}$$

$$3. \begin{array}{r} X^3 \\ -X^3 + X^2y \\ \hline X^2y \\ -X^2y + xy^2 \\ \hline xy^2 \\ -xy^2 + y^3 \\ \hline y^3 \end{array} \quad \frac{X^3}{X-y} = X^2 + Xy + y^2 + \frac{y^3}{X-y}$$

$$4. \begin{array}{r} X^3 - X^2y - xy^2 + y^3 \quad | \quad X+y \\ -X^3 - X^2y \\ \hline -2X^2y - xy^2 \\ 2X^2y + 2xy^2 \\ \hline xy^2 + y^3 \\ -xy^2 - y^3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{X^3 - X^2y - xy^2 + y^3}{X+y} = X^2 - 2xy + y^2$$

$$5. \frac{X^4}{X^2-X+1} = X^2 + X - \frac{X}{X^2-X+1}$$

## VI. Multiplicar:

$$1. \frac{6a^4b^4c}{5ax^3y^3} \cdot \frac{-10xyz}{3b^3c^2z^2} \cdot \frac{7ax^2z}{4by^4} = -\frac{7a^2x}{cy^4}$$

$$2. \frac{a^2+ab}{ab-2b^2} \cdot \frac{a^2-ab-1b^2}{a^2-ab} \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a(a+b)}{b(a-1b)} \cdot \frac{(a-1b)(a+b)}{a(a-b)} \cdot \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{b}$$

$$3. \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2-9} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-2)} \cdot \frac{x(x+2)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{x-3}$$

$$4. \frac{4x^2-8y^2}{2x^2+3xy-1y^2} \cdot \frac{4x^2-4xy+y^2}{2x^2y-3xy^2} \cdot \frac{x^2y^2}{2xy+3y^2} = \frac{(2x+3y)(2x-3y)}{(x+2y)(2x-y)} \cdot \frac{(2x-y)^2}{xy(2x+3y)} \cdot \frac{x^2y^2}{y(2x+3y)} = \frac{x(2x-y)}{x+2y}$$

$$5. \frac{a^3-b^3}{a-3b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^2+ab-12b^2}{a^2+3ab-4b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-3b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{(a+4b)(a-3b)}{(a+4b)(a-b)} = a^2-b^2$$

## VII. Dividir:

$$1. \frac{26a^4x^2z^5}{21b^3c^2y} : \frac{13a^3x^3z^4}{14b^3c^4y^2} = \frac{26a^4x^2z^5}{21b^3c^2y} \cdot \frac{14b^3c^4y^2}{13a^3x^3z^4} = \frac{4a^2c^2yz}{3bx}$$

$$2. \frac{ax+x^2}{b^3+cx} : \frac{(a+x)^2}{3bx+cx^2} = \frac{x(a+x)}{3b+cx} \cdot \frac{x(3b+cx)}{(a+x)^2} = \frac{x^2}{a+x}$$

$$3. \frac{c^4-1}{x^3+1} : \frac{c-1}{x^2-x+1} = \frac{(c^2+1)(c+1)(c-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{(x^2-x+1)}{(c-1)} = \frac{(c^2+1)(c+1)}{x+1}$$

$$*4. \frac{(x+y)^2-z^2}{(x-y)^2-z^2} : \frac{x^2-(y+z)^2}{x^2-(y-z)^2} = \frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x-y+z)(x-y-z)} \cdot \frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x-y-z)} = \frac{(x+y-z)^2}{(x-y-z)^2}$$

$$5. \frac{(a+y)^2-(x+z)^2}{(a+x)^2-(y+z)^2} : \frac{(a-y)^2-(x+z)^2}{(a+x)^2-(y-z)^2} = \frac{(a+y+x+z)(a+y-x-z)}{(a+x-y-z)(a-y-x-z)} \cdot \frac{(a+x-y-z)(a-y-x-z)}{(a-y+x+z)(a-y-x-z)} = \frac{(a+y-x-z)(a+x-y-z)}{(a+x-y-z)(a-y-x-z)}$$

## VIII. Efectuar:

$$1. \frac{a^3-8a+7}{a^2-6a-16} : \frac{2a^3-13a-7}{2a^2-15a-8} \cdot \frac{a^2+2a}{a^2-1} = \frac{(a-7)(a-1)}{(a-8)(a+2)} \cdot \frac{(a-8)(2a+1)}{(a-7)(2a+1)} \cdot \frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a}{a+1}$$

$$2. \left(a+x+\frac{3a^2+x^2}{a-x}\right) \left(\frac{x^2-1}{a^2}-1\right) = \left(\frac{a^3-x^2+3a^2+x^2}{a-x}\right) \left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right) = \frac{4a^2}{-(x-a)} \cdot \frac{(x+a)(x-a)}{a^2} = -4(x+a)$$

$$3. \left(\frac{m+n}{m-n} + \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right) \left(\frac{m+n}{m-n} - \frac{m^3+n^3}{m^3-n^3}\right) = \frac{2(m^2+mn+n^2)}{(m+n)(m-n)} \cdot \frac{2mn(m+n)}{(m-n)(m^2+mn+n^2)} = \frac{4mn}{(m-n)^2}$$

$$4. \left(\frac{a^3}{a^2-b^2} + \frac{b^3}{a^2+b^2} - 1\right) \frac{a^4-b^4}{a^3b^3} = \frac{a^4+a^2b^2+a^2b^2-b^4-a^4+b^4}{(a^4-b^4)} \cdot \frac{(a^4-b^4)}{a^3b^3} = \frac{2}{ab}$$

$$5. \left(1 + \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}\right) : \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{z}\right) = \frac{(x+y+z)(x+y-z)}{2xy} \cdot \frac{(x+y+z)}{z(x+y)} \cdot \frac{z(x+y)}{(z-x-y)} = \frac{-(x+y+z)^2}{2xy}$$

## IX. Simplificar:

$$1. \frac{a/a+b + b/a}{b/a+b + a/b} = \frac{(a^2+ab+b^2)/a(a+b)}{(b^2+a^2+ab)/b(a+b)} = \frac{b}{a}$$

$$2. \frac{x/x+1 + x/x+3}{x/x^2-1} = \frac{x^2+3x+x^2+x/(x+1)(x+3)}{x/(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-1)(x+2)}{x+3}$$

$$3. \quad 1 - \frac{X}{X + \frac{4}{X + \frac{6}{X}}} = 1 - \frac{X}{X + \frac{4X}{X^2 + 6}} = 1 - \frac{X^3 + 6X}{X^3 + 10X} = \frac{X^3 + 10X - X^3 - 6X}{X^3 + 10X} = \frac{4}{X^2 + 10}$$

$$4. \quad \frac{\frac{m+n}{m-n} + 1}{\frac{m^2-n^2}{m+n} + 1} = \frac{\frac{2m+n+m-n}{m-n}}{\frac{m-n+m+n}{m+n}} = \frac{2m(m+n)}{2m(m-n)} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$5. \quad \frac{\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}}{\frac{Y^2}{X^2} + \frac{X^2}{Y^2}} \cdot \frac{\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}}{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}} = \frac{\frac{X^2+Y^2}{XY}}{\frac{X^4+Y^4}{X^2Y^2}} \cdot \frac{\frac{X+Y}{XY}}{\frac{X^2+Y^2}{X^2Y^2}} = \frac{X^2Y^2(X^2+Y^2)}{XY(X^4+Y^4)} \cdot \frac{X^2Y^2(X+Y)}{X^2Y^2(X^2+Y^2)} = \frac{X^2Y^2(X+Y)}{X^4+Y^4}$$

$$6. \quad \frac{X-a}{X-a - \frac{X}{1-\frac{X}{X-a}}} = \frac{X-a}{X-a - \frac{X^2-aX}{-a}} = \frac{a(X-a)}{aX-a^2+X^2-aX} = \frac{a(X-a)}{(X-a)(X-a)} = \frac{a}{X-a}$$

$$7. \quad \frac{\frac{X}{XY+Y^2} - \frac{Y}{X^2+XY}}{\frac{X}{X^2-Y^2} - \frac{1}{X+Y}} = \frac{\frac{X^2-Y^2}{XY(X+Y)}}{\frac{X-X+Y}{(X+Y)(X-Y)}} = \frac{(X+Y)(X-Y)(X-Y)}{XY^2} = \frac{(X+Y)(X-Y)^2}{XY^2}$$

$$8. \quad \frac{\frac{X^2}{X - \frac{X^2+Y^2}{X+Y}} + \frac{Y^2}{Y - \frac{X^2+Y^2}{X+Y}}}{\frac{X^2}{X^2+Y^2} + \frac{Y^2}{X^2+Y^2}} = \frac{\frac{X^2}{X - \frac{X^2+Y^2}{X+Y}} + \frac{Y^2}{Y - \frac{X^2+Y^2}{X+Y}}}{\frac{X^2+Y^2}{X+Y}} = \frac{\frac{X^2(X+Y) - Y^2(X+Y)}{XY(X-Y)}}{\frac{X^2+Y^2}{X+Y}} = \frac{(X+Y)(X^2+Y^2)}{XY(X-Y)}$$

$$9. \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 + \frac{1}{a}}}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3a+1}}} = \frac{1}{1 - \frac{3a+1}{5a+2}} = \frac{5a+2}{2a+1}$$

$$10. \quad \frac{X^2\left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Z}\right) + Y^2\left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{X}\right) + Z^2\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)}{X\left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Z}\right) + Y\left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{X}\right) + Z\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)} = \frac{\frac{X^2Z - X^2Y}{YZ} + \frac{XY^2 - ZY^2}{XZ} + \frac{YZ^2 - XZ^2}{XY}}{\frac{XZ - XY}{YZ} + \frac{XY - ZY}{XZ} + \frac{YZ - XZ}{XY}} = X + Y + Z$$

$$\frac{X^3Z - X^3Y + XY^3 + YZ^3 - ZY^3 - XZ^3}{-X^3Z + X^3Y - X^2Y^2 + XY^2Z - XY^2Z + X^2Z^2} \cdot \frac{1}{X^2Z - X^2Y + XY^2 - ZY^2 + YZ^2 - XZ^2}$$

$$\frac{-X^2Y^2 + X^2Y^2 + XY^3 - XY^3 + X^2Z^2 - XY^2Z + XY^2Z - XZ^3 - XZ^3}{-X^2Y^2 + X^2Y^2 + XY^3 - XY^3 + X^2Z^2 - XY^2Z + XY^2Z - XZ^3 - XZ^3}$$

$$\frac{X^2YZ - XY^2Z - X^2Z^2 - YZ^3 + XZ^3 + Y^2Z^2}{X^2YZ - XY^2Z - X^2Z^2 - YZ^3 + XZ^3 + Y^2Z^2}$$

X Evaluar:

1.  $(X^2 - 4X - 5)/(X + 3)$  para  $X = 5$ ;  $(5^2 - 4(5) - 5)/(5 + 3) = 0$

2.  $(X^3 - X^2 + 7)/(X^2 - 4X)$  para  $X = 4$ ;  $(4^3 - 4^2 + 7)/(4^2 - 4(4)) = 55/0$  no tiene

3.  $(X^2 + 9X + 14)/(X^2 + 4X + 8)$  para  $X = -2$ ;  $(X+7)(X+2)/(X+4)(X+2)$  ind.;  $X+7/X+4 = -2+7/-2+4 = 5/2$

4.  $\frac{X^3 - 4X^2 + 5X - 6}{X^3 - 2X^2 - 4X + 3}$  para  $X = 3$ ;  $\frac{(X-3)(X^2 - X + 2)}{(X-3)(X^2 + X - 1)}$  ind.;  $\frac{X^2 - X + 2}{X^2 + X - 1} = \frac{3^2 - 3 + 2}{3^2 + 3 - 1} = \frac{8}{11}$

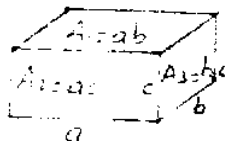
5.  $\frac{X^3 - 3X + 2}{X^3 - 2X^2 - X + 2}$  para  $X = 1$ ;  $\frac{(X-1)(X^2 + X - 2)}{(X-1)(X^2 - X - 2)}$  ind.;  $\frac{X^2 + X - 2}{X^2 - X - 2} = \frac{1+1-2}{1-1-2} = \frac{0}{-2} = 0$

## EJERCICIOS DE REPASO de los capítulos 1 a 10

1. Hallar el valor numérico de  $(x-y)/z + (x+z)/y$  para  $x=-2, y=3, z=5$   
 $(-2-3)/5 + (-2+3)/3 = -1+1=0$

2. Hallar el valor numérico de  $6x^3y^2 - 3x^2y^0$  para  $x=2, y=-3$   
 $6(2)^3(-3)^2 - 3(2)^2(-3)^0 = 48/9 - 12 = -20/3$

3. Escribir una fórmula que exprese el área total de la superficie de una caja rectangular de largo  $a$ , anchura  $b$  y altura  $c$ .



$$At = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$$

$$At = 2(ab + ac + bc)$$

4. Calcular el volumen de un cono cuya altura es de 20 cm y cuya base tiene un radio de 24 cm. Tómese  $\pi = 3,14$  ( $V = 1/3 \pi r^2 h$ ).

$$h = 20 \text{ cm} ; r = 24 \text{ cm} \rightarrow V = 1/3 (3,14)(24)^2(20), V = 12057,6 \text{ cm}^3$$

5. De las siguientes expresiones algebraicas decir cuáles son enteras y cuáles son fraccionarias:

a)  $4x^2y^3$  Frac.

b)  $2x+y+1/2$  Frac.

c)  $4x^3+1+x^2$  Frac.

\* d)  $x^2+3$  entera

6. Sumar los polinomios

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 + 3yz + 4xz \\ + \\ -3x^2 + 0xy - 4y^2 + 2z^2 + yz - xz \\ \hline 3x^2 + 3xy - 2y^2 + z^2 + 4yz + 3xz \end{array}$$

7. Restar  $x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2 + y^5 - xy^4$   
 $- (x^5 + 2x^4y - 3x^3y^2 + 8x^2y^3 - y^5)$   

$$\begin{array}{r} x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2 + y^5 - xy^4 \\ - \\ x^5 + 2x^4y - 3x^3y^2 + 8x^2y^3 - y^5 \\ \hline -4x^4y + 8x^3y^2 - xy^4 \end{array}$$

8. Dados los polinomios del primero restar la suma de los tres últimos.

$$5a^4 - 2a^3x + 6a^2x^2 + 6ax^3 + 7x^4$$

$$-7a^4 + 3a^3x - 10a^2x^2 - 3ax^3 + 4x^4$$

$$-2a^4 - 9a^3x + 5a^2x^2 + 8ax^3 - 3x^4$$

$$3a^4 + 8a^3x - 7a^2x^2 - 4ax^3 + 6x^4$$

Realizando la resta

$$5a^4 - 2a^3x + 6a^2x^2 + 6ax^3 + 7x^4$$

$$- (a^4 - 2a^3x + 12a^2x^2 - ax^3 - 7x^4)$$

$$4a^4 - 4a^3x + 20a^2x^2 + 7ax^3 + 14x^4$$

$$-7a^4 + 3a^3x - 10a^2x^2 - 3ax^3 + 4x^4$$

$$-2a^4 - 9a^3x + 5a^2x^2 + 8ax^3 - 3x^4$$

$$3a^4 + 8a^3x - 7a^2x^2 - 4ax^3 + 6x^4$$

$$-6a^4 + 2a^3x - 12a^2x^2 + ax^3 + 7x^4$$

9. Suprimir paréntesis y reducir términos semejantes:

$$\begin{aligned} 3b - \{4b + x - [2b - (3x - b)] - x\} - [10x - (2b - 3x)] &= 3b - \{4b + x - [2b - 3x + b] - x\} - [10x - 2b + 3x] \\ &= 3b - \{4b + x - 2b + 3x - b - x\} - 10x + 2b - 3x = 3b - 4b - x + 2b - 3x + b + x - 10x + 2b - 3x = 4b - 16x \end{aligned}$$

10. En el polinomio siguiente incluir los términos que contiene  $x$  en un paréntesis precedido del signo  $+$  y los términos que contienen  $y$  en un paréntesis precedido del signo  $-$ :  $ax - by - cx + a^2y - b^2x + c^2y \rightarrow (ax - cx - b^2x) - (by - a^2y - c^2y)$

11. Multiplicar:

$$\begin{array}{r}
 2x^3y - x^3 + 5y^3 - 4xy^2 \\
 \underline{xy^2 + 2y^3 - 5x^2y + x^3} \\
 2x^3y^3 - x^4y^2 + 5xy^5 - 4x^2y^2 \\
 - 2x^3y^3 \qquad - 8xy^5 + 4x^1y^2 + 10y^2 \\
 \underline{20x^3y^3 - 10x^4y^2 \qquad - 25x^2y^2 + 5xy^5} \\
 5x^3y^3 - 4x^4y^2 \qquad \qquad \qquad + 1x^5y - x^6 \\
 \hline
 15x^3y^3 - 15x^4y^2 - 3x^5y + 10y^6 + 7x^5y - x^6
 \end{array}$$

12. Multiplicar:

$$\begin{array}{r}
 x^{2n} - 4x^{n+1} + 3x^n - 5x^{n-1} \\
 \underline{x^{2n} + 2x^{2n-1} + 6x^{2n-2}} \\
 x^{3n+2} - 4x^{3n+1} + 3x^{3n} - 5x^{3n-1} \\
 + 2x^{3n+1} - 8x^{3n} + 6x^{3n-1} - 10x^{3n-2} \\
 + 6x^{3n} - 24x^{3n-1} + 18x^{3n-2} - 30x^{3n-3} \\
 \hline
 x^{3n+2} - 2x^{3n+1} + x^{3n} - 23x^{3n-1} + 8x^{3n-2} - 30x^{3n-3}
 \end{array}$$

13. Dividir:

$$\begin{array}{r}
 3x^4y^8 - x^3y^6 - 4x^2y^4 + 32xy^2 - 24 \quad \bigg| \quad \begin{array}{l} x^2y^2 - 2xy^2 + 4 \\ 3x^2y^4 + 5xy^2 - 6 \end{array} \\
 \underline{-3x^4y^8 + 6x^3y^6 - 12x^2y^4} \\
 5x^3y^6 - 16x^2y^4 + 32xy^2 \\
 \underline{-5x^3y^6 + 10x^2y^4 - 20xy^2} \\
 -6x^2y^4 + 12xy^2 - 24 \\
 \underline{6x^2y^4 - 12xy^2 + 24} \\
 0
 \end{array}$$

14. Dividir:

$$\begin{array}{r}
 x^{4m} - 4x^{2m}y^{2n} + 4x^my^{3n} - y^{4n} \\
 \underline{-x^{4m} + 2x^{3m}y^n - x^{2m}y^{2n}} \\
 2x^{3m}y^n - 5x^{2m}y^{2n} + 4x^my^{3n} \\
 \underline{-2x^{3m}y^n + 4x^{2m}y^{2n} - 2x^my^{3n}} \\
 -x^{2m}y^{2n} + 2x^my^{3n} - y^{4n} \\
 \underline{+x^{2m}y^{2n} - 2x^my^{3n} + y^{4n}} \\
 0
 \end{array}$$

15. Resolver:  $(x+2)(x+4) - (x+1)(x-3) = 5 - [x - (3-x)]$

$$x^2 + 6x + 8 - x^2 + 2x + 3 = 5 - x + 3 - x; 10x = -3; x = -0,3$$

16. Un aeroplano vuela 10% más de prisa con un viento de cola de 25 km por hora, que con el mismo viento de proa. ¿Cuál es su velocidad en aire tranquilo?

Sea  $x$  la velocidad en aire tranquilo

a favor  $x + 25$  Planteo:  $x + 25 = x - 25 + 10\%(x - 25); 50 = 10\%(x - 25)$

en contra  $x - 25$

$$x = 525 \text{ km/h}$$

17. Un hombre es tantos mayor que su esposa y su edad es 6 veces la de su hijo. Hace un año la suma de las edades de los tres era 83 años. Hallar la edad actual de cada uno.

edad actual. edad hace 1 año

Hombre  $6x$  $6x-1$ Planteo:  $13x-8=83 \rightarrow x=7$ Esposa  $6x-5$  $6x-5-1$ 

Hombre 42 años

Hijo  $x$  $x-1$ 

Esposa 37 años

19. Aplicar la regla correspondiente a los productos notables de los ejercicios 18-23:

a.-  $(3a-b)(3a+b) = 9a^2 - b^2$

b.-  $(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

c.-  $(b+1)(b-6) = b^2 + 5b - 6$

d.-  $(4x-3)(2x+5) = 8x^2 + 14x - 15$

e.-  $(2a+x)^3 = 8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3$

f.-  $(x+3)(x^2-3x+9) = x^3 + 27$

19. Aplicar la regla correspondiente a los cocientes notables de los ejercicios siguientes:

a.-  $(9a^2 - 6ax + x^2)/(3a-x) = 3a-x$

b.-  $(a^3 - 27)/(a-3) = a^2 + 3a + 9$

c.-  $(x^4 - 1)/(x^2 + 1) = x^2 - 1$

d.-  $(343b^3 + 1)/(7b+1) = 49b^2 - 7b + 1$

20. Descomponer en factores:

a.-  $81a^4 + 11a^2 + 4 = (81a^4 + 36a^2 + 4) - 25a^2 = (9a^2 + 2)^2 - 25a^2 = (9a^2 + 2 + 5a)(9a^2 + 2 - 5a)$

b.-  $y^4 - 16 - 2y^3 + 8y = (y^4 - 16) - (2y^3 - 8y) = (y^2 + 4)(y^2 - 4) - 2y(y^2 - 4) = (y+2)(y-2)(y^2 - 2y + 4)$

c.-  $6x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 24x^2y + 30x^2 + 60xy = 6x[(x^2 + 2xy) + (2x^2 + 4xy^2) + (5x + 10y)]$   
 $= 6x[x(x+2y) + 2x^2(x+2y) + 5(x+2y)] = 6x(x+2y)(2x^2 + x + 5)$

d.-  $a^3 + a - b - b^3 = (a^3 - b^3) + (a - b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$

e.-  $c^4 - cx^3 = c(c^3 - x^3) = c(c-x)(c^2 + cx + x^2)$

f.-  $x^2 - 4ax - x^2 + 9x + 3a^2 = (x^2 - 4ax + 3a^2) - (xy - 9x) = (x-3a)(x-a) - x(x-a) = (x-a)(x-3a-x)$

g.-  $a^4b^2 - c^2 = (a^2b)^2 - (c^2)^2 = (a^2b^2 - c^4)(a^2b^2 + c^4)$   
 $= (a^2b^2 - c^4)(a^2b^2 + c^4) = (a^2b^2 - c^4)(a^2b^2 + c^4) = (a^2b^2 - c^4)(a^2b^2 + c^4)$

21. Hallar el m.c.d y el m.c.m de los polinomios dados en los ejercicios siguientes:

a.-  $4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$ ;  $15 - x - 2x^2 = -(x+3)(2x-5)$ ;  $x+10 - 2x^2 = -(2x-5)(x+2)$

m.c.d =  $2x-5$  y m.c.m =  $(2x-5)^2(x+3)(x+2)$

b.-  $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ;  $x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1)$ ;  $x^5 + x^2 = x^2(x+1)(x^2-x+1)$

m.c.d = 1 es decir no hay; m.c.m =  $x^2(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

- \* 22. Simplificar:

$$\frac{a^2b - 3a^2x + 2bx^2}{a^3 - 7a^2x + 6ax^2} = \frac{b(a^2 - 3ax + 2x^2)}{a(a^2 - 7ax + 6x^2)} = \frac{b(a-2x)(a-x)}{a(a-6x)(a-x)} = \frac{b(a-2x)}{a(a-6x)}$$

23. Simplificar:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^4 - x^3 + x^2 - 2} = \frac{(x-3)(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)} = \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$$

24. Efectuar las operaciones indicadas en los ejercicios siguientes:

$$a.- \frac{x^2}{y^2} - \frac{1-x}{y^2+y} + \frac{1+x}{y-y^2} - \frac{x^2-1}{y^2-1} = \frac{x^2(y^2-1) - (1-x)y(y-1) - (1+x)y(y+1) - y^2(x^2-1)}{y^2(y+1)(y-1)}$$
  
 $= \frac{(x^2y^2 - x^2 - y^2 + y + xy^2 - xy - y^2 - y - xy^2 - xy - x^2y^2 + y^2)}{y^2(y+1)(y-1)}$   
 $= \frac{-(x^2 + 2xy + y^2)}{y^2(y+1)(y-1)} = \frac{-(x+y)^2}{y^2(y^2-1)}$

$$b.- \left( \frac{1-x^2}{1+y} \right) \left( \frac{1+y}{x+y^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{x}{1-x} \right) = \frac{(1+x)(1-x) \cdot (1+y)^2}{(1+y) \cdot x^2(1+x)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{1+y}{x^2(1+x)}$$

$$c.- \frac{9a^2-6a}{6a^2-7a+2} \cdot \frac{2a^2+13a-7}{2a^2+6a} \cdot \frac{2a^2+3a-9}{4a^2-8a+3} = \frac{3a(3a-2)}{(3a-2)(2a-1)} \cdot \frac{(a+7)(2a-1)}{2a(a+3)} \cdot \frac{(a+3)(2a-3)}{(2a-3)(2a-1)} = \frac{3(a+7)}{2(2a-1)}$$

$$d.- \left[ \left( \frac{6m}{m^2-4} \right) - \frac{3}{m-2} \right] : \frac{12}{m^2-m-6} = \frac{3(m-2)}{(m+2)(m-2)} \cdot \frac{(m-3)(m-2)}{12} = \frac{m-3}{4}$$

$$e.- \left( a+2b + \frac{8b^2}{a-2b} \right) : \left[ \left( 2a - \frac{a^2}{a-2b} \right) \left( a + \frac{4ab+4b^2}{a-4b} \right) \right] = \frac{a^2+4b^2}{a-2b} : \left[ \frac{a(a-4b)}{a-2b} \cdot \frac{(a^2+4b^2)}{(a-4b)} \right] = \frac{1}{a}$$

25. Simplificar las Fracciones complejas siguientes:

$$a.- \frac{(x+1/x)^2 - 1}{(1-1/x)(x-1+1/x)} \cdot \frac{x-2+1/x}{x-1/x^2} = \frac{(x^2+1+x)/x}{(x-1)/x} \cdot \frac{x(x-1)}{x^2+x+1} = x$$

$$* b.- \frac{\frac{1-4h^2}{(2h+k)^2} \left[ 1 + \frac{k+1}{2h-1} \right]}{\frac{1}{2h+k} - \frac{1}{2h-k} + \frac{4h}{4h^2-k^2}} = \frac{\frac{(2h+1)(2h-1)}{(2h+k)^2} \cdot \frac{2h+k}{(2h-1)}}{\frac{2h-k-2h-k+4h}{(2h+k)(2h-k)}} = \frac{-\frac{(2h+1)}{2h+k}}{\frac{2(2h-k)}{(2h+k)(2h-k)}} = -\frac{(2h+1)}{2}$$

26. En los siguientes decir si la afirmación que se hace es verdadero o falso:

a.- El resultado de restar -3 de 0 es -3  $\rightarrow 0 - (-3) = 3$  Falso

b.- 5 dividido por 0 es 5  $\rightarrow 5/0$  no está definido Falso

c.-  $2^2 \cdot 2^3 = 4^5 \rightarrow 4(8) = 32$  y  $4^5 = 924 \rightarrow 32 \neq 924$  Falso

d.-  $(x+y)^{-1} = 1/x+y$  Verdadero porque  $a^{-n} = 1/a^n$

e.-  $x^{-1} + y^{-1} = 1/x+y$  Falso porque  $x^{-1} + y^{-1} = 1/x + 1/y$

f.-  $m/x+y = m/x + m/y \rightarrow m/x + m/y = m(x+y)/xy \neq m/x+y$  Falso

g.-  $a(x+y) = ax+y \rightarrow a(x+y) = ax+ay$  Falso

h.-  $a^8/a^2 = a^4 \rightarrow a^8/a^2 = a^{8-2} = a^6$  Falso

i.-  $a^2+b^2 = (a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2 \neq a^2+2ab+b^2$  Falso

j.-  $(a+b)/c = a/c + b/c \rightarrow$  Verdadero

\* k.-  $2x^0 = 1 \rightarrow$  porque solo  $x^0 = 1$  no está el 2 con exponente 0  $\rightarrow$  Falso

l.-  $2a/b + b/a = (2a+b)/(a+b) \rightarrow 2a/b + b/a = (2a^2+b^2)/ab \rightarrow$  Falso

\* m.-  $(a-b)(b+a) = b^2 - a^2 \rightarrow (a-b)(b+a) = a^2 - b^2 \rightarrow$  Falso

\* n.- El m.c.d. de  $1-a^3$  y  $a^2-1$  es  $a-1$

$$1-a^3 = -(a-1)(a^2+a+1) \quad ; \quad a^2-1 = (a-1)(a+1) \rightarrow \text{m.c.d.} = a-1 \quad \text{Verdadero}$$

\* o.-  $\frac{1}{2x-a} = -\frac{1}{2x+a}$  Falso

porque  $\frac{1}{2x-a} = -\frac{1}{a-2x}$  Corregir las letras de los literales en las respuestas.

## CAPITULO 11

### ECUACIONES FRACCIONARIAS

#### Ejercicio 86

Resolver las ecuaciones siguientes:

1.  $\frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = 11$  El m.c.m es 12 multiplicando ambos miembros se obtiene  
 $2x + 9x = 132$  ;  $11x = 132$  ,  $x = 12$
2.  $(x-1)/5 + 7x/10 = 7 \rightarrow 2x-2+7x=70$  ;  $9x=72$  ,  $x=8$
3.  $5x - x/4 = 9,5 \rightarrow 20x-x=38$  ;  $19x=38$  ,  $x=2$
4.  $x/3 - 5x/6 + x/4 = 1 \rightarrow 4x-10x+3x=12$  ;  $-3x=12$  ;  $x=-4$
5.  $x + x/2 + x/3 = 33 \rightarrow 6x+3x+2x=198$  ;  $11x=198$  ;  $x=18$
6.  $x/2 + x/3 + x/4 + x/6 = 54-x \rightarrow 6x+4x+3x+2x=648-12x$  ;  $x=24$
7.  $(3x-2)/4 = (3x+3)/8$  ;  $6x-4=3x+3$  ;  $3x=7$  ;  $x=7/3$
8.  $(5x-1)/3 = (5x+2)/4$  ;  $20x-4=15x+6$  ;  $5x=10$  ;  $x=2$
9.  $3/x + 5/x = 16$  ;  $3+5=16x$  ;  $8=16x$  ;  $x=1/2$
10.  $4/x - (x+2)/2x = 1$  ;  $8-x-2=2x$  ;  $-3x=-6$  ;  $x=2$
11.  $4/(x-1) = 7/(x+2)$  ;  $4x+8=7x-7$  ;  $-3x=-15$  ;  $x=5$
12.  $(2x+1)/(x-1) = (2x-1)/(x-5)$  ;  $2x^2-10x+x-5=2x^2-x-2x+1$  ;  $x=-1$
13.  $(x-2)/3 + (x+1)/6 - (x-1)/4 = 1$  ;  $4x-8+2x+2-3x+3=12$  ;  $3x=15$  ;  $x=5$
14.  $(x+2)/5 - (3x+1)/2 + (x-1)/4 = 5/2 - 2x$  ;  $4x+8-30x-10+5x-5=50-40x$  ;  $x=3$
15.  $(3x+4)/11 + (5x-8)/22 = (5x+6)/6 - 3$  ;  $18x+24+15x-24=55x+66-198$  ;  $x=6$
16.  $\frac{5}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{2}{3(x+1)} = \frac{7}{6}$  ;  $30+9-4=7x+7$  ;  $28=7x$  ;  $x=4$
17.  $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{2x-4} = \frac{x}{3x-6} - \frac{1}{2}$  ;  $12-9=2x-3x+6$  ;  $-3=-x$  ;  $x=3$
18.  $\frac{8}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{x^2+31}{x^2-9} = 0$  ;  $8x-24-x^2-6x-9+x^2+31=0$  ;  $2x=2$  ;  $x=1$
19.  $\frac{3}{1+x} - \frac{x+1}{1-x^2} + \frac{x+1}{1-x} = 0$  ;  $3-3x-x^2-1+x^2+2x+1=0$  ;  $-x=-3$  ;  $x=3$
- \* 20.  $\frac{2x-1}{2x} - \frac{10}{4x^2-1} = \frac{1+2x}{1-2x}$  ;  $4x^3-4x+1-10=-4x^3-4x-1$  ;  $x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$   
los dos valores satisfacen
21.  $\frac{x}{3x-6} - \frac{x-1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24}$  ;  $2x^2+6x+4-3x^2+9x-6=10-x^2$  ;  $15x=12$  ;  $x=\frac{4}{5}$
22.  $5/(x+1) + 7/(x+3) - 70/(x^2+4x+3) = 0$  ;  $5x+15+7x+7-70=0$  ;  $12x=48$  ;  $x=4$
23.  $2/(x+5) + 1/(x-5) + 20/(x^2-25) = 0$  ;  $2x-10+x+5+20=0$  ;  $3x=-15$  ;  $x=-5$

NOTA: Este valor  $x=-5$  es de la ecuación transformada, pero no la ecuación



original. Puesto que la división por cero no está definida; por lo tanto no tiene sentido efectuar la sustitución  $X = -5$  la cual conduce a  $2/0 + 1/10 + 20/0 = 0$ .

$X = -5$  es una raíz extraño. La ecuación propuesta no tiene solución.

$$24. \frac{4}{2X-3} - \frac{1}{X-2} = \frac{1}{X+3}; 4(X-2)(X+3) - (2X-3)(X+3) = (2X-3)(X-2);$$

$$4X^2 + 4X - 24 - 2X^2 - 3X + 9 = 2X^2 - 7X + 6 \rightarrow X = 2\frac{5}{8}$$

$$25. \frac{3X^2-2X+1}{3X+1} + \frac{1}{2X} = X-1; 6X^3 - 4X^2 + 3X + 1 = 6X^3 - 4X^2 - 2X; 5X = -1; X = -1/5$$

$$26. \frac{2X+1}{5} + \frac{3X+2}{2X+3} = \frac{6X+1}{15} + \frac{4}{5}; 3(2X+1)(2X+3) + 15(3X+2) = (6X+1)(2X+3) + 12(2X+3)$$

$$12X^2 + 24X + 9 + 45X + 30 = 12X^2 + 20X + 3 + 24X + 36; X = 0$$

$$27. \frac{5}{X^2-X-6} = \frac{3}{X^2-4} + \frac{1.5}{X^2-5X+6}; 5(X-2) = 3(X-3) + 1.5(X+2)$$

$$5X-10 = 3X-9+1.5X+3; 0.5X = 4 \rightarrow X = 8$$

$$28. \frac{2}{y^2-y-2} + \frac{1}{y^2-3y+2} = \frac{8}{y^2-1}; 2(y-1)(y+1) + (y+1) = 8(y-2)$$

$$2y-2+y+1 = 8y-16 \rightarrow -5y = -15; y = 3$$

$$29. \frac{2}{z^2-2z-8} + \frac{1}{z^2-z-12} = \frac{13}{z^2+5z+6}; 2(z+3) + (z+2) = 13(z-4)$$

$$2z+6+z+2 = 13z-60 \rightarrow -10z = -60; z = 6$$

$$30. \frac{X^2+2X+4}{X+2} + \frac{X^2-2X+4}{X-2} = 2X; X^3-8+X^3+8 = 2X^3-8X \rightarrow 0 = -8X; X = 0$$

## Ejercicio 87

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$1. \frac{4-2X/3}{6} = \frac{1+X/3}{2} - \frac{2}{3}; \frac{12-2X}{18} = \frac{3+X}{6} - \frac{2}{3}; 12-2X = 9+3X-12$$

$$-5X = -15 \rightarrow X = 3$$

$$2. \frac{1}{4} + \frac{1+\frac{X}{4}}{2} = \frac{2+\frac{3X}{2}}{5}; \frac{1}{4} + \frac{4+X}{8} = \frac{4+3X}{10}; 10+20+5X = 16+12X; -7X = -14$$

$$X = 2$$

$$3. \frac{(2X-3)/X}{2/3} = \frac{(2X+3)/X}{3/2}; \frac{(6X-9)}{2X} = \frac{4X+6}{3X}; 18X-27 = 8X+12; 10X = 39$$

$$X = 3,9$$

$$4. \frac{1}{3}X + \frac{(4X-1)/X}{6} = \frac{X+\frac{2}{X}}{3} - \frac{1}{6}; \frac{X}{3} + \frac{4X-1}{6X} = \frac{X^2+2}{6} - \frac{1}{6}; 2X^2+4X-1 = 2X^2+4-X$$

$$X = 1$$

$$5. \frac{X}{1-\frac{1}{X}} - \frac{X}{1+\frac{1}{X}} = \frac{2}{1+\frac{1}{X}}; \frac{X^2}{X-1} - \frac{X^2}{X+1} = \frac{2X}{X+2}; X^3+3X^2+2X-X^3-X^2+2X = 2X^2-2$$

$$X = -1/2$$

$$6. \frac{2X+3}{9} - \frac{3X-5}{2X-3} = \frac{4X-3}{18} - \frac{5}{6}; 8X^2-18-54X+90 = 8X^2-18X+9-30X+45$$

$$-6X = -18; X = 3$$

$$7. \frac{9X+25}{27} = \frac{3X+8}{2X+6} + \frac{X-2}{3}; 18X^2+104X+150 = 81X+216+18X^2+54X-4X-12$$

$$-27X = 54; X = -2$$

$$8. \frac{2X+7}{5} = \frac{4X-1}{7X+2} + \frac{10X+22.5}{25}; \frac{2X+7-2X-4.5}{5} = \frac{4X-1}{7X+2}; 7X+2 = 8X-2$$

$$X = 4$$

9.  $\frac{3x+10}{15} + \frac{2x-8}{x-1} = \frac{x+20}{5} - \frac{17}{6}$ ;  $6x^2+14x-20+60x-240=6x^2+114x-120-85x+55$   
 $45x=215 \rightarrow x=5$
10.  $\frac{x+8}{7} + \frac{x^2+1}{7x+3} = \frac{4x+11}{14}$ ;  $14x^2+118x+48+14x^2+14=28x^2+39x+33$   
 $29x=-29 \rightarrow x=-1$
11.  $\frac{2x+15}{6} - \frac{6x+14}{9} = \frac{20+x}{15-x}$ ;  $180x+675-12x^2-45x-180x+12x^2-420+28x=360+18x$   
 $-35x=105 \rightarrow x=-3$
12.  $\frac{x+5}{11} - \frac{2x+21}{22} = \frac{2x-18}{x+6}$ ;  $2x^2+22x+60-2x^2-33x-126=44x-396$   
 $-55x=-330 \rightarrow x=6$
13.  $\frac{3x+4}{5} - \frac{2x-5}{x+2} + \frac{x}{10} = \frac{5x}{7} - \frac{14+x}{70}$ ;  $42x^2+140x+112-140x+350+7x^2+14x=50x^2-100x-14x-x^2-28x$   
 $-70x=-490 \rightarrow x=7$
14.  $\frac{5x+1}{4} - \frac{3x^2+2}{3(x+1)} + \frac{7}{12} = \frac{3x+2}{12}$ ;  $3(x+1)(5x+1)-4(3x^2+2)+7(x+1)=(x+1)(3x+2)$   
 $15x^2+3x+5x+3-12x^2-8+7x+7=3x^2+2x+3x+2 \rightarrow x=0$
15.  $\frac{x^2+2}{x+5} + \frac{1-6x}{20} - \frac{x}{2} = \frac{2x+3}{10}$ ;  $20(x^2+2)+(1-6x)(x+5)-10x(x+5)=2(x+5)(2x+3)$   
 $20x^2+40+x+5-6x^2-30x-10x^2-50x=4x^2+6x+20x+30 \rightarrow x=1\frac{1}{7}$
16.  $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}$ ;  $(x+4)(x+5)(x+3-x-2)=(x+2)(x+3)(x+5-x-4)$   
 $(x+4)(x+5)=(x+2)(x+3)$ ;  $x^2+9x+20=x^2+5x+6 \rightarrow x=-3,5$
17.  $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6}$ ;  $(x-4)(x-5)(x-6)-(x-3)(x-5)(x-6)=(x-3)(x-4)(x-6)-(x-3)(x-4)(x-5)$   
 $(x-5)(x-6)(x-4-x+3)=(x-3)(x-4)(x-6-x+5)$   
 $x^2-11x+30=x^2-7x+12 \rightarrow x=4,5$
18.  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$ ;  $(x-3)(x+2)(x-2)-(x+1)(x+2)(x-2)=(x+1)(x-3)(x-2)-(x+1)(x-3)(x+2)$   
 $(x^2-4)(x-3-x-1)=(x+1)(x-3)(x-2-x-2)$   
 $-4x^2+16=-4x^2+8x+12 \rightarrow x=1/2$ ;  $x=0,5$
19.  $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-4} = \frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7}$   
 $(x-2)(x-4)(x-6)(x-7)-(x-3)^2(x-6)(x-7)=(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)-(x-6)^2(x-3)(x-4)$   
 $(x-6)(x-7)(x^2-6x+8-x^2+6x-9)=(x-3)(x-4)(x^2-12x+35-x^2+12x-36)$   
 $x^2-13x+42=x^2-7x+12 \rightarrow x=5$
20.  $\frac{x+3}{x+4} - \frac{x+4}{x+5} = \frac{x+6}{x+7} - \frac{x+7}{x+8}$   
 $(x+7)(x+8)(x^2+8x+15-x^2-9x-16)=(x+4)(x+5)(x^2+14x+49-x^2-14x-49)$   
 $x^2+15x+56=x^2+9x+20 \rightarrow x=-6$

## Ejercicio 88

1. La suma de la cuarta parte y de la quinta parte de un número es 15. Hallar el número.

Sea  $x$  el número que se busca

$$x/4 + x/5 = 18 ; 5x + 4x = 360 \rightarrow x = 40$$

2. La suma de la mitad, la tercera y la quinta parte de un número es 31. Hallar el número.

$$\text{Planteo: } x/2 + x/3 + x/5 = 31 ; 15x + 10x + 6x = 930 ; 31x = 930 \rightarrow x = 30$$

3. La diferencia entre la cuarta y la séptima parte de un número es 3. Hallar el número.

$$x/4 - x/7 = 3 ; 7x - 4x = 84 ; 3x = 84 \rightarrow x = 28$$

4. La suma de la tercera y la quinta parte de un número excede en 40,5 a la diferencia entre la cuarta y la sexta parte. Hallar el número.

$$x/3 + x/5 = 40,5 + (x/4 - x/6) ; 20x + 12x = 2430 + 15x - 10x \rightarrow x = 90$$

5. El denominador de una fracción excede en 3 unidades al numerador. Si se suma 2 a cada término de la fracción resulta una fracción equivalente a  $1/2$ . Hallar la fracción original.

	Frac. Original	Frac. Modificada
Numerador	$x$	$x+2$
Denominador	$x+3$	$x+5$

$$\text{Planteo: } \frac{x+2}{x+5} = \frac{1}{2} ; 2x+4 = x+5$$

$$x = 1$$

Fracción  $1/4$

6. El numerador de una fracción es 2 unidades mayor que el denominador. Si se suma 1 a cada término la fracción resulta equivalente a  $3/2$ . Hallar la fracción original.

Numerador	$x+2$	$x+3$
Denominador	$x$	$x+1$

$$\text{Planteo: } \frac{x+3}{x+1} = \frac{3}{2} \rightarrow x=3; \text{ Fracción } \frac{5}{3}$$

7. El denominador de una fracción excede en 4 unidades al numerador. Si se resta 5 a cada término la fracción resultante es equivalente a  $3/5$ . Hallar la fracción original.

	Fr. Orig	Fr. Mod.
Numerador	$x$	$x-5$
Denominador	$x+4$	$x-1$

$$\text{Planteo: } \frac{x-5}{x-1} = \frac{3}{5} ; 5x-25 = 3x-3 ; x=11$$

Fracción:  $\frac{11}{5}$

8. Hallar el número que sumado al numerador y al denominador de  $7/10$  convierte esta fracción en otra equivalente a  $3/4$ . Sea  $x$  el número buscado

	Fr. Orig	Frac. Mod.
Numerador	7	$7+x$
Denominador	10	$10+x$

$$\text{Planteo: } \frac{7+x}{10+x} = \frac{3}{4} ; 28+4x = 30+3x \rightarrow x=2$$

9. Si el numerador y del denominador de la fracción  $8/13$  se resta cierto número, se obtiene una nueva fracción que es reducible a  $1/2$ . Hallar dicho número.

	Frac. Orig	Frac. Mod.
Numerador	8	$8-x$
Denominador	13	$13-x$

$$\text{Planteo: } \frac{8-x}{13-x} = \frac{1}{2} ; 16-2x = 13-x \rightarrow x=3$$

$x$  el número buscado

10. Si al numerador de la fracción  $4/21$  se le suma el duplo de cierto número y al denominador se le resta el triple del mismo número se obtiene una fracción equivalente a  $5/6$ . Hallar el número. Sea  $x$  el número buscado

	Frac. Orig.	Frac. Mod.	Planteo: $\frac{4+2X}{21-3X} = \frac{5}{6}$ ; $24+12X=105-15X$
Numerador	4	$4+2X$	$21-3X$ $X=3$
Denominador	21	$21-3X$	

11. Pedro puede levantar un muro en 6 días y Julián en 8 días. ¿En qué tiempo harán el muro trabajando conjuntamente?

	Días q' demoran en hacer el trabajo	Parte del trabajo q' hacen en un día
Pedro	6	$1/6$
Julián	8	$1/8$
Pedro y Julián	X	$1/X$

Planteo:  $1/6 + 1/8 = 1/X$  ;  $7X=24 \rightarrow X=3\frac{3}{7}$  días

12. Luis puede hacer una obra en 15 días y Jorge puede hacer la misma obra en 10 días. ¿Qué tiempo tardarán trabajando conjuntamente?

	Nº Días	Parte de Trab en 1 día	Planteo: $1/15 + 1/10 = 1/X$
Luis	15	$1/15$	$5X=30 \rightarrow X=6$ días
Jorge	10	$1/10$	
L y J	X	$1/X$	

13. Francisco puede hacer una obra en 3 días, Santiago en 4 días y José en 6 días. ¿En qué tiempo harán la obra trabajando conjuntamente?

	Nº días	Parte del trab en 1 día	Planteo $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{X} \rightarrow X = \frac{4}{3}$
F	3	$1/3$	
S	4	$1/4$	
J	6	$1/6$	$X = 1\frac{1}{3}$ día
F, S, J	X	$1/X$	

14. Ricardo puede hacer una obra en 9 días y Alberto en 12 días. Ricardo y Alberto trabajando conjuntamente con Vicente pueden hacer la obra en 3 días. ¿En cuánto tiempo Vicente podrá hacer la obra trabajando solo?

	Ricardo	Alberto	R, A, Vicente	V. (R y A)
Nº días	9	12	3	X
Parte del trabajo 1 día	$1/9$	$1/12$	$1/3$	$1/3$

planteo:  $1/3 - (1/9 + 1/12) = 1/X$  ;  $12X - 4X - 3X = 36 \rightarrow X = 7\frac{1}{3}$  días

15. Juan y Antonio trabajando juntos pueden abrir una zanja en 12 horas. Antonio y Tomás pueden abrirla en 15 horas. Antonio trabajando solo tardaría 25 horas. ¿Qué tiempo tardarían en abrir la zanja Juan y Tomás?

	J y A	A y T	A	J y T	Solo J $\rightarrow 1/12 - 1/25$
Nº de horas	12	15	25	X	Solo T $\rightarrow 1/15 - 1/25$
Part. del trab en 1 h	$1/12$	$1/15$	$1/25$	$1/X$	

Planteo:  $(1/12 - 1/25) + (1/15 - 1/25) = 1/X$  ;  $25X - 12X + 20X - 12X = 300 \rightarrow X = 14\frac{2}{7}$  horas

16. Un caño de agua puede llenar un tanque en 28 minutos y otro en 42 minutos. Si se abren ambos caños simultáneamente, ¿en qué tiempo llenarán el tanque?

	1º caño	2º caño	los dos caños	Planteo: $1/28 + 1/42 = 1/X$
Nº min.	28	42	X	$3X + 2X = 84 \rightarrow X = 16 \frac{4}{5}$
Parte de agua	$1/28$	$1/42$	$1/X$	$X = 16 \text{ min}, 48 \text{ seg}$

17. Un caño puede llenar un aljibe en 30 horas, otro caño en 36 horas y el tercer caño en 20 horas. ¿En qué tiempo llenarán el aljibe los tres caños si se abren simultáneamente?

	1º	2º	3º	los 3 juntos	Planteo: $1/30 + 1/36 + 1/20 = 1/X$
Nº horas	30	36	20	X	$6X + 5X + 9X = 180; 20X = 180$
Parte que se enñ.	$1/30$	$1/36$	$1/20$	$1/X$	$X = 9 \text{ horas}$

18. Un tanque puede llenarse por un caño en  $2\frac{1}{2}$  horas, por otro caño en  $3\frac{1}{3}$  horas y por el tercero en 5 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque si se abren los tres a la vez?

	1º	2º	3º	los 3 juntos	Planteo: $2/5 + 3/10 + 1/5 = 1/X$
Nº de horas	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	5	X	$4X + 3X + 2X = 10 \rightarrow X = 10/9$
Parte de agua que se enñ.	$2/5$	$3/10$	$1/5$	$1/X$	$X = 1 \text{ h}, 6 \text{ min}; 6,6 \text{ s}$

19. Una piscina se puede llenar por un grifo en 4 horas y por otro en 3 horas; y se puede vaciar por un desagüe en 6 horas. Si se abren simultáneamente los dos grifos y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará la piscina?

	1º grifo	2º grifo	desague	los 2 grifos - desague	
Nº de horas	4	3	6	X	12 L <sup>5</sup>
Parte de agua que se enñ.	1/4	1/3	1/6	1/X	0,4
					0,4 x 60 = 24
planteo: $1/4 + 1/3 - 1/6 = 1/X$ ; $3X + 4X - 2X = 12$ ; $5X = 12 \rightarrow X = 2\frac{2}{5}$					
$X = 2 \text{ horas}, 24 \text{ min}$					

20. Un tanque se puede llenar por un grifo en 20 minutos. Después que este grifo ha estado corriendo durante 5 minutos, se abre otro grifo y entonces se llena el tanque en 3 minutos más. ¿Cuánto tiempo tardaría el segundo grifo solo en llenar el tanque?

1º grifo	20	Nº de min	Planteo: $(1/5 - 1/15) \cdot 1/X = 1/3$
Corre 5 min $\Rightarrow$ sobran 15 min $\rightarrow (1/5 - 1/15)$			$3X - X + 15 = 5X; -3X = -15$
2º X		$1/X$	$X = 5 \text{ min}$
los dos 3		$1/3$	

### Ejercicio 8º

[ En los problemas que siguen se entenderá que las velocidades que se mencionan son constantes. ]

1. La distancia entre A y B es de 300 Km. Un móvil sale de A hacia B con una velocidad de 12 Km por hora al mismo tiempo que otro móvil sale de B hacia A con una velocidad

de 18 Km por hora. ¿A qué distancia de A se encontrarán y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

Como el tiempo para los dos móviles es el mismo

	distancia	Velocidad	tiempo	Planteo:
1º Móvil	X	12	X/12	$X/12 = (300-X)/18$
2º móvil	300-X	18	$(300-X)/18$	$3X = 600 - 2X \rightarrow X = 120 \text{ Km}$
				$t = 120/12; t = 10 \text{ h}$

2. Un automóvil sale de A hacia B a una velocidad de 80 Km por hora al mismo tiempo que sale un ómnibus de B hacia A a 65 Km por hora. Si la distancia AB es de 435 Km, ¿a qué distancia de B se encontrarán y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

	distancia	V	tiempo	$t_{au} = t_{om}$
Automóvil	435-X	80	$(435-X)/80$	$\frac{435-X}{80} = \frac{X}{65}$
Ómnibus	X	65	$X/65$	$5655 - 13X = 16X$
				$X = 195 \text{ Km}; t =$
				$t = 195/65 \rightarrow t = 3 \text{ h}$

3. La distancia entre A y B es de 3200 millas. Un avión sale de A hacia B a las 8 a.m. a una velocidad de 500 millas por hora. A las 9 a.m. sale otro avión de B hacia A con una velocidad de 400 millas por hora. Hallar a qué distancia de B se encontrarán los aviones y a qué hora.

	distancia	Velocidad	tiempo	A	P	B
1º avión	3200-X	500	$(3200-X)/500$	3200-X	X	
2º avión	X	400	$X/400$		X	
Planteo:	$\frac{3200-X}{500} = 1 + \frac{X}{400}$			El 1º sale a las 8 a.m. el otro sale a las 9 a.m. → 1 hora de diferencia		
				al 1º $t_1 = 1 + t_2$		
				$12800 - 4X = 2000 + 5X \rightarrow X = 1200 \text{ millas}$		
				$t = (3200 - 1200)/500 \rightarrow t = 4$		

Como salió a las 8 a.m.  $\Rightarrow 8 + 4 = 12$  se encontrarán a las 12 h del día

4. Un tren de carga sale de A hacia B a una velocidad de 45 Km por hora; 2 horas después sale de A hacia B un tren de pasajeros a una velocidad de 55 Km por hora. ¿A qué distancia de A encontrará el segundo tren al primero?

	distancia	V	tiempo	A	P	B
Tren carga	X	45	$X/45$	X		
Tren pasajeros	X	55	$X/55$		X	
				El tren de carga salió 2 h antes que el de pasajeros		
				$t_c = -t_p + 2$		
				$X/45 = X/55 + 2; 11X = 9X + 990; \rightarrow X = 495 \text{ Km}$		

5. Un camión sale de A hacia B a la 1 p.m., a una velocidad de 55 Km por hora. A las 3 p.m. sale un automóvil de A hacia B a 85 Km por hora. Si B se halla 100 Km más distante que A, ¿a qué distancia de A y a qué hora encontrará el automóvil al camión?

	d	V	tiempo	El auto sale 2 h más tarde y B 100 Km más distante que A
Camión	X	55	$X/55$	
Auto	X+100	85	$(X+100)/85$	$t_c = t_a + 2$
Planteo:	$\frac{X}{55} = \frac{X+100}{85} + 2$			$17X = 11X + 1100 + 1870 \rightarrow X = 495 \text{ Km}$
				$t = 495/55 \rightarrow t = 9 \text{ h} \Rightarrow \text{a las 10 p.m.}$

6. Juan viaja en automóvil a razón de 100 millas cada 2 horas. 6 horas después José sale en automóvil del mismo lugar y en el mismo sentido a razón de 260 millas cada 4 horas. ¿A qué distancia del lugar de partida alcanzará José a Juan? ¿Cuántas horas tarda?

$$V_{\text{Juan}} = 100 \text{ millas} / 2 \text{ h} = 50 \text{ mill/h} \quad V_{\text{José}} = 260 \text{ mill} / 4 \text{ h} = 65 \text{ mill/h}$$

	d	V	t	
Juan	X	50	X/50	$\frac{X}{50} = \frac{X}{65} + 6$ ; $13X = 10X + 3900 \rightarrow X = 1300 \text{ millas}$
José	X	65	X/65	$t = 1300/65$ ; $t = 20$

$$t \text{ de encuentro} = 26 - 6 = 20 \text{ h}$$

7. Un individuo dispone de 4 horas para ver una ciudad. Averiguar qué distancia puede recorrer en un ómnibus que va a 25 Km por hora, si luego tiene que hacer el regreso a pie (por el mismo camino) a razón de 5 Km por hora.

	d	V	t	
ida	X	25	X/25	$\frac{X}{25} + \frac{X}{5} = 4 \rightarrow X = \frac{50}{3}$ ; $X = 16 \frac{2}{3} \text{ Km}$
regreso	X	5	X/5	

8. Un joven sube una cuesta a razón de 4 Km por hora y la baja a razón de 6 Km por hora. Si en subir y bajar emplea en total  $1 \frac{1}{2}$  horas, ¿qué longitud tiene la cuesta?

	d	V	t	
sube	X	4	X/4	$\frac{X}{4} + \frac{X}{6} = \frac{3}{2}$ ; $3X + 2X = 18 \rightarrow X = 18/5$ ; $X = 3,6 \text{ Km}$
baja	X	6	X/6	

9. Un tren expreso sale de una estación 40 minutos después de haber salido un tren de carga y lo alcanza en 1 hora y 20 minutos. El tren expreso corre 20 Km más por hora que el tren de carga. ¿Cuál es la velocidad del tren de carga?

	d	V	t	
Tren expreso	X	V+20	80	① $X = (V+20) 4/3$
Tren de carga	X	V	$120 - (80+40)$	② $X = V(2)$

$$(V+20) 4/3 = 2V ; 2V+40 = 3V \rightarrow V = 40 \text{ Km/h}$$

$$1 \text{ h } 20 \text{ min} = 4/3 \text{ h} \rightarrow 120 \text{ min} = 2 \text{ h}$$

10. Un barco de carga que hace 15 nudos (15 millas náuticas por hora) está a 720 millas de Nueva York cuando un barco de pasajeros que hace 25 nudos sale de Nueva York en la misma dirección. ¿Qué distancia habrá recorrido el barco de pasajeros cuando el barco de carga le lleva todavía una ventaja de 100 millas?

	d	V	t	
Tc	X	15	X/15	$\frac{X}{15} = \frac{620+X}{25}$ ; $5X = 1860 + 3X \rightarrow X = 930$
Te	620+X	25	$(620+X)/25$	$\Rightarrow 620 + 930 = 1550 \text{ millas}$

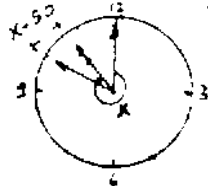
11. ¿A qué hora después de las 4 se encontrarán por primera vez las manecillas del reloj?



	d(en min)	V(en min/h)	t(en h)
minutero	X	60	X/60
horario	X-20	5	(X-20)/5

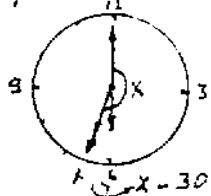
El tiempo es el mismo:  $\frac{X}{60} = \frac{X-20}{5}$  ;  $11X = 240$  ;  $X = 21\frac{9}{11}$   $\rightarrow 4h 21\frac{9}{11} \text{ min}$

12. Son las 10 en punto. ¿A qué hora se superpondrán por primera vez las manecillas?



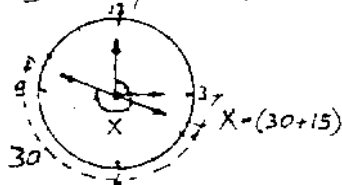
	d	V	t	
minutero	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-50}{5}$ ; $X = 12X - 600$
horario	X-50	5	(X-50)/5	$X = 54\frac{6}{11} \text{ min} \rightarrow 10h 54\frac{6}{11} \text{ min}$

13. ¿A qué hora, entre las 6 y las 7, estarán superpuestas las manecillas?



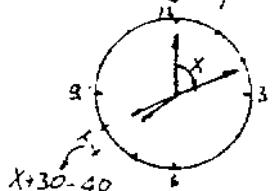
	d	V	t	
minutero	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-30}{5} \rightarrow 11X = 360$
horario	X-30	5	(X-30)/5	$X = 32\frac{8}{11} \rightarrow 6h 32\frac{8}{11} \text{ min}$

14. Averiguar a qué hora, entre las 3 y las 4, estarán las manecillas en prolongación una de otra.



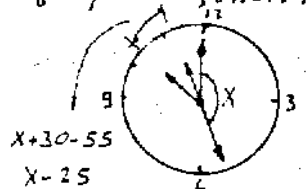
	d	V	t	
min.	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-45}{5} \rightarrow 11X = 540$
hor.	X-45	5	(X-45)/5	$X = 49\frac{1}{11} \rightarrow 3h 49\frac{1}{11} \text{ min.}$

15. Son las 8. ¿A qué hora estarán por primera vez en línea recta las manecillas?



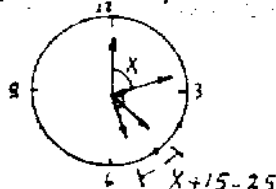
	d	V	t	
min.	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-10}{5} \rightarrow 11X = 120$
hor.	X-10	5	(X-10)/5	$X = 10\frac{10}{11} \rightarrow 8h 10\frac{10}{11} \text{ min.}$

16. ¿A qué hora, entre las 11 y las 12, están las manecillas en línea recta?



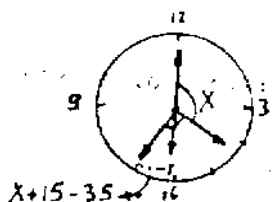
	d	V	t	
min.	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-25}{5} \rightarrow 11X = 300$
hor.	X-25	5	(X-25)/5	$X = 27\frac{3}{11} \text{ min} \rightarrow \text{A las } 11h 27\frac{3}{11} \text{ min}$

17. ¿A qué hora, después de las 5, formarán por primera vez ángulo recto las manecillas?



	d	V	t	
min.	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-10}{5} \rightarrow 11X = 120$
hor.	X-10	5	(X-10)/5	$X = 10\frac{10}{11} \rightarrow 5h 10\frac{10}{11} \text{ min}$

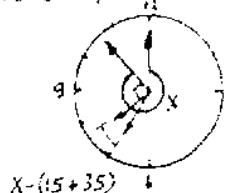
18. ¿A qué hora, después de las 7, formarán por primera vez ángulo recto las manecillas?



	d	V	t	
minutero	X	60	X/60	$\frac{X}{60} = \frac{X-20}{5} \rightarrow 11X = 240$
horario	X-20	5	(X-20)/5	$X = 21\frac{9}{11} \rightarrow 7h 21\frac{9}{11} \text{ min}$

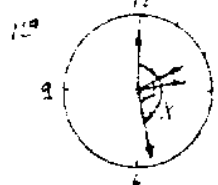


19. ¿A qué hora, después de las 7, formarán por segunda vez ángulo recto las manecillas?



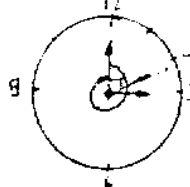
	d	V	t	
min.	X	60	$X/60$	$\frac{X}{60} = \frac{X-50}{5} \rightarrow 11X = 300$
hor.	X-50	5	$(X-50)/5$	$X = 54 \frac{6}{11} \rightarrow 7h 54 \frac{6}{11} \text{ min.}$

20. ¿A qué hora, después de las 2 y no pasadas las 3, estarán en ángulo recto las manecillas?



	d	V	t	
min.	X	60	$X/60$	$\frac{X}{60} = \frac{X-25}{5} \rightarrow 11X = 300$
hor.	X-25	5	$(X-25)/5$	$X = 27 \frac{3}{11} \rightarrow 2h 27 \frac{3}{11} \text{ min.}$

21. Cuando marca las 3h (por simple inspección) y por planteo



	d	V	t	
min.	X	60	$X/60$	$\frac{X}{60} = \frac{X-55}{5} \rightarrow 11X = 660$
hor.	X-55	5	$(X-55)/5$	$X = 60 \rightarrow 2h + 1h = 3h$

21. Un bote tarda el mismo tiempo en navegar 20 Km río arriba, que 28 Km río abajo. Si la velocidad de la corriente del río es de 2 Km por hora, ¿cuáles la velocidad del bote en agua tranquila?

	d	V	t	
río abajo	28	$X+2$	$28/(X+2)$	$\frac{28}{X+2} = \frac{20}{X-2} ; \frac{7}{X+2} = \frac{5}{X-2}$
río arriba	20	$X-2$	$20/(X-2)$	$7X-14 = 5X+10 \rightarrow X = 12 \text{ Km/h}$

22. Pedro puede remar 8 Km por hora en agua tranquila. En un río emplea el mismo tiempo en remar 5 Km río arriba, que 15 Km río abajo. ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?

Sea  $x$  la  $V$ . de la corriente, 8 Km/h  $V$ . del bote

	d	V	t	
río abajo	15	$8+x$	$15/(8+x)$	$\frac{15}{8+x} = \frac{5}{8-x} ; \frac{3}{8+x} = \frac{1}{8-x}$
río arriba	5	$8-x$	$5/(8-x)$	$24-3x = 8+x \rightarrow x = 4 \text{ Km/h}$

23. Una lancha de motor tiene una velocidad de 25 Km por hora y puede navegar cierta distancia río abajo en dos tercios del tiempo que tarda en navegar la misma distancia río arriba. Hallar la velocidad de la corriente del río. Sea  $x$  la velocidad de la corriente

	d	V	t	
río abajo	$\frac{2}{3}d$	$25+x$	$\frac{2}{3}t_1$	$d = (25+x)\frac{2}{3}t_1 ; d_1 = (25-x)t_1$ la misma dist.
río arriba	$\frac{1}{3}d$	$25-x$	$t_1$	$50+2x = 75-3x \rightarrow x = 5 \text{ Km/h}$

24. Un avión puede volar 800 millas con un viento de cola de 15 millas por hora en el mismo tiempo que vuela 750 millas en contra del mismo viento. Hallar la velocidad del avión.

	d	V	t	
A favor del viento	800	$X+15$	$800/(X+15)$	$\frac{800}{X+15} = \frac{750}{X-15} ; \frac{16}{X+15} = \frac{15}{X-15}$
en contra del viento	750	$X-15$	$750/(X-15)$	$16X-240 = 15X+225 \rightarrow X = 465 \text{ millas/h}$

25. Un avión que desarrolla una velocidad de 360 millas por hora (en aire tranquilo) navega 210 millas con viento de cola en el mismo tiempo que navega 190 millas con un viento de proa de la misma intensidad. ¿Cuál es la velocidad del viento?

	d	v	t	
Con viento de cola (a favor)	210	360+x	210/(360+x)	$\frac{210}{360+x} = \frac{190}{360-x}$
Con viento de proa (en contra)	190	360-x	190/(360-x)	$7560 - 21x = 6840 + 19x - x = 18 \text{ mill/h}$

### Ejercicio 90

Resolver las ecuaciones siguientes:

Las soluciones que se indican no son válidas para los valores particulares de las letras que anulen algún denominador.

- $ax - 2b = 3b$ ;  $ax = 5b$ ;  $x = 5b/a$
- $ax + c = x + b$ ;  $ax - x = b - c$ ;  $x = (b - c)/(a - 1)$
- $ax + 4b^2 = 2bx + a^2$ ;  $x(a - 2b) = (a - 2b)(a - 2b)$ ;  $x = a + 2b$
- $x^2 - c^2 = (b - x)^2$ ;  $x^2 - c^2 = b^2 - 2bx + x^2$ ;  $2bx = b^2 + c^2$ ;  $x = (b^2 + c^2)/2b$
- $2x + a(x + 3) = 2a$ ;  $2x + ax + 3a = 2a$ ;  $x(2 + a) = -a \rightarrow x = -a/(a + 2)$
- $(a + x)(b + x) = x(x - a)$ ;  $ab + ax + bx + x^2 = x^2 - ax$ ;  $x(2a + b) = -ab$ ;  $x = -ab/(2a + b)$
- $(x + a)(x - b) = x(x + b)$ ;  $x^2 - bx + ax - ab = x^2 + bx$ ;  $x(a - 2b) = ab$ ;  $x = ab/(a - 2b)$
- $(c + y)(c - y) = (3c^2 - y^2) \pm$ ;  $c^2 - y^2 = 3c^2 - y^2$ ;  $y = 1/3$
- $(z - a)^2 - (z - b)^2 = (a + b)^2$ ;  $z^2 - 2az + a^2 - z^2 + 2bz - b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  $z = b(a + b)/(b - a)$
- $(x - a)^2 = (x + b)(x - b) + 2ax$ ;  $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - b^2 + 2ax$ ;  $4ax = a^2 + b^2$ ;  $x = (a^2 + b^2)/4a$
- $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a-b}{a+b}$ ;  $ax + bx + a + b = ax - a - bx + b$ ;  $2bx = -2a$ ;  $x = -\frac{a}{b}$
- $\frac{b}{a+bx} = \frac{x}{b+x^2}$ ;  $b^2 + bx^2 = ax + bx^2 \rightarrow x = \frac{b^2}{a}$
- $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} - \frac{x}{p} = a$ ;  $mpx + mpn - mnx = amnp$ ;  $x = \frac{amnp}{mp + mp - mn}$
- $\frac{a+b}{x+3} = \frac{a-b}{x-3}$ ;  $ax - 3a + bx - 3b = ax + 3a - bx - 3b$ ;  $2bx = 6a \rightarrow x = \frac{3a}{b}$
- $\frac{9x-a}{3x-b} = \frac{6x+b}{2x+a}$ ;  $18x^2 + 9ax - 2ax - a^2 = 18x^2 - 6bx + 3bx - b^2$ ;  $(7a + 3b)x = a^2 - b^2$ ;  $x = \frac{a^2 - b^2}{7a + 3b}$
- $\frac{(x+a)^2}{4x-b} = \frac{x+b}{4}$ ;  $4x^2 + 8ax + 4a^2 = 4x^2 + 4bx - bx - b^2$ ;  $-(3b - 8a)x = -(4a^2 + b^2) \rightarrow x = \frac{4a^2 + b^2}{3b - 8a}$
- $\frac{(mx+k)/m}{x/k} = \frac{(mx+k)/k}{x/m}$ ;  $\frac{K(mx+k)}{mx} = \frac{m(mx+k)}{Kx}$ ;  $x(mk^2 - m^3) = -(m^2k + k^3)$   

$$x = \frac{K(m^2 + k^2)}{m(m^2 - k^2)}$$

$$18. \frac{(ax+c)/x}{a/(x-c)} = \frac{(x+a)/a}{x/(ax-c)}; \frac{(x-c)(ax+c)}{ax} = \frac{(ax-c)(x+a)}{ax}; x = \frac{c(a-c)}{a^2+ac-2c}$$

$$19. \frac{2}{a} + \frac{a}{x-a} = \frac{2x+a}{ax}; 2x(x-a)+a^2x=(2x+a)(x-a); x(a-1)a=-a^2; x = \frac{a}{1-a}$$

$$20. \frac{a}{a-b} - \frac{x}{a+b} = \frac{bx}{a^2-b^2}; a^2+ab-ax+bx=bx; -ax=-a(a+b) \rightarrow x=a+b$$

$$21. \frac{x-a}{x+a} + \frac{2a+2b}{x} = \frac{x+b}{x-b}; x^3-bx^2-ax^2+abx+2ax^2-2abx+2a^2x-2a^2b+2bx^2-2b^2x+2abx-2a^2b=$$

$$x^3+bx^2+ax^2+abx$$

$$2(a^2-b^2)x=2ab(a+b); x=ab/(a-b)$$

$$22. \frac{cx}{a} - \frac{x-a}{3b} + \frac{x+a}{2} = a+c; 6bcx-2ax+2a^2+3abx+3a^2b=6a^2b+6abc$$

$$x(6bc-2a+3ab)=(3a^2b+6abc-2a^2) \rightarrow x = \frac{a(6bc-2a+3ab)}{(6bc-2a+3ab)}; x=a$$

$$23. \frac{9a+bx}{3a} + \frac{4b-ax}{2b} - \frac{x+12c}{4c} = 2; 36abc+4b^2cx+24abc-6a^2cx-3abx-36abc=24abc$$

$$(4b^2c-6a^2c-4ab)x=0 \rightarrow x=0$$

$$24. \frac{bx-a}{bx+a} - \frac{2a}{bx-a} = \frac{b^2x^2+a^2}{b^2x^2-a^2}; b^2x^2-2abx+a^2-2abx-2a^2=b^2x^2+a^2; -4abx=2a^2$$

$$x=-a/2b$$

$$25. \frac{1}{ab-by} - \frac{2}{ac-ay} = \frac{3}{bc-by}; a(c-y)-2b(a-y)=3a(a-y); ac-ay-2ab+2by=3a^2-3ay$$

$$2(a+b)y=a(3a+2b-c) \rightarrow y=a(3a+2b-c)/2(a+b)$$

$$26. \frac{ax+c}{cx-a} - \frac{ax}{cx+a} = \frac{4c}{c^2x^2-a^2}; acx^2+a^2x+c^2x+ac-acx^2+a^2x=4c; 2a^2x+c^2x=4c-ac$$

$$x=c(4-a)/(2a^2+c^2)$$

$$27. a \frac{x-6c}{3b} - b \frac{x-4a}{2c} = \frac{(2a-3c)x}{6b}; \frac{ax-6ac}{3b} - \frac{bx-4ab}{2c} = \frac{2ax-3cx}{6b}$$

$$2acx-12ac^2-3b^2x+12ab^2=2acx-3c^2x; x=12a(c^2-b^2)/3(c^2-b^2) \rightarrow x=4a$$

$$28. \frac{a}{z+2} + \frac{b}{z+3} - \frac{4a+3b}{z^2+5z+6} = 0; a(z+3)+b(z+2)-(4a+3b)=0; (a+b)z=a+b$$

$$z=(a+b)/(a+b) \rightarrow z=1$$

$$29. \frac{a+x}{a+1} + \frac{b+x}{b+1} = \frac{a-x}{a-1} + \frac{b-x}{b-1}; (a+x)(a-1)(b^2-1)+(b+x)(b-1)(a^2-1)=(a-x)(a+1)(b^2-1)+(b-x)(b+1)(a^2-1)$$

$$(2ab^2x-2ax+2a^2bx-2bx)=2ab^2-2a+2a^2b-2b \rightarrow x=1$$

$$30. \frac{12a-x}{4a} + \frac{10b+x}{5b} - \frac{6c+ax}{3c} = \frac{15d+x}{5d}$$

$$15bcd(12a-x)+12acd(10b+x)-20abd(6c+ax)=12abc(15d+x)$$

$$12acd-15bcd-20a^2bd-12abcx=0$$

$$x(12acd-15bcd-20a^2bd-12abc)=0 \rightarrow x=0$$

## Ejercicio 91

1. La suma de dos números es  $s$  y su diferencia es  $d$ . Hallar los números.

1º número  $x$  ; 2º número  $s-x$

Ecuación:  $x - (s-x) = d$  ;  $2x = s+d$  ;  $x = (s+d)/2$

$s-x = s - (s+d)/2 = (s-d)/2$

2. Un número es  $K$  veces otro y su suma es  $s$ . Hallar los números

1º  $x$  ; 2º  $Kx$        $x + Kx = s$  ;  $x(1+K) = s$  ;  $x = s/(K+1)$  y  $Ks/(K+1)$

3. Pedro tiene  $p$  pesos y Luis tiene  $q$  pesos. Pedro da cierto número de pesos a Luis y entonces tiene  $K$  veces lo que tiene Luis. ¿Cuántos pesos le dió Pedro a Luis?

Sea  $x$  el número de pesos que da Pedro a Luis

	inicio	después	
Pedro	$p$	$p-x$	$p-x = K(q+x)$ ; $p-x = qK + Kx$
Luis	$q$	$q+x$	$-x - Kx = qK - p$ ; $(1+K)x = p - qK$
			$x = (p - qK)/(K+1)$

4. El denominador de una fracción excede en  $m$  unidades al numerador. Si a cada término de la fracción se le suma  $h$  resulta una fracción equivalente a  $a/b$ . Hallar la fracción original.

	Fr. Origi.	Fr. Modif.	
Numerador	$x$	$x+h$	$\frac{x+h}{x+m+h} = \frac{a}{b}$ ; $bx - ax = am + ah - bh$
Denominador	$x+m$	$x+m+h$	$x = (bh - am - ah)/(a-b)$ N.
			$x+m = \frac{bh - am - ah}{a-b} + m$ ; $\rightarrow D: \frac{bh - bm - ah}{a-b}$

5. A puede hacer una obra en  $a$  días, B puede hacerla en  $b$  días y C en  $c$  días. ¿En cuánto tiempo la harán trabajando juntos?

	A	B	C	A, B y C	
t. q. demoran en hacer la obra	$a$	$b$	$c$	$x$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}$
parte de la obra q. hacen en día	$1/a$	$1/b$	$1/c$	$1/x$	$x = (abc)/(bc+ac+ab)$

6. Un tanque se puede llenar por un grifo en  $h$  horas y por otro en  $K$  horas. Un desagüe lo puede vaciar en  $m$  horas. Si se abren simultáneamente los grifos y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará el tanque?

	1º grifo	2º grifo	desagüe	grifos desag.	Plant:
tiempo q. demoran en llenar	$h$	$K$	$m$	$x$	$1/h + 1/K - 1/m = 1/x$
parte de lo q. se llena y se vacía	$1/h$	$1/K$	$1/m$	$1/x$	$Kmx + hmx - hKx = hKm$
					$x = hKm/(Km+hK-hm)$

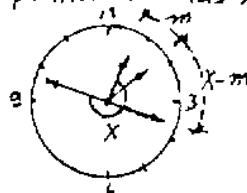
7. Un móvil sale de A hacia B a una velocidad de  $v$  Km por hora, al mismo tiempo que otro móvil sale de B hacia A a una velocidad de  $v'$  Km por hora. Si la distancia AB es de  $d$  Km, ¿a qué distancia de A se encontrarán y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

	$d$	$v$	$t$	planteo:	
1º móvil	$x$	$v$	$x/v$	$\frac{x}{v} = \frac{d-x}{v'}$ ; $v'x = vd - vx$ ; $v'x + vx = vd$	
2º móvil	$d-x$	$v'$	$(d-x)/v'$		$x = \frac{vd}{v+v'}$

8. Un bote tarda el mismo tiempo en navegar  $K$  Kilómetros río abajo que  $K'$  Kilómetros río arriba. Si la velocidad de la corriente del río es de  $v$  Km por hora, averiguar la velocidad del bote en agua tranquila. Sea  $x$  la velocidad del bote en agua tranquila

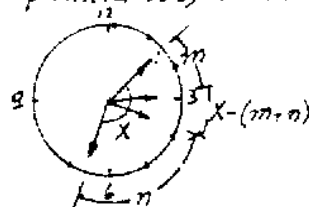
	d	V	t	Planteo:
río abajo	$K$	$x+v$	$K/(x+v)$	$\frac{K}{x+v} = \frac{K'}{x-v}$ ; $Kx - Kv = K'x + K'v$
río arriba	$K'$	$x-v$	$K'/(x-v)$	$x = \frac{(K+K')v}{K-K'}$

9. El minutero de un reloj está  $m$  minutos detrás del horario. ¿Dentro de qué tiempo coincidirán por primera vez las manecillas?



	d	V	t	
minutero	$X$	$60$	$X/60$	$\frac{X}{60} = \frac{X-m}{5}$ ; $11X = 12m$
horario	$X-m$	$5$	$(X-m)/5$	$X = \frac{12m}{11} \text{ min}$

10. El minutero de un reloj está  $m$  minutos detrás del horario. ¿Dentro de qué tiempo estará (por primera vez)  $n$  minutos delante del horario?



	d	V	t	
minutero	$X$	$60$	$X/60$	
horario	$X-(m+n)$	$5$	$[X-(m+n)]/5$	
	$\frac{X}{60} = \frac{X-(m+n)}{5}$			$X = 12X - 12(m+n)$ ; $11X = 12(m+n)$
				$X = 12(m+n)/11 \text{ min}$

## Ejercicio 92

En las fórmulas siguientes despejar las letras que se indican:

1.  $E = K \frac{m m'}{r^2}$  despejar  $m$  ;  $Fr^2 = K m m'$  ;  $K m m' = Fr^2$  ;  $m = \frac{Fr^2}{K m'}$

2.  $V = 1/3 \pi r^2 h$  despejar  $h$  ;  $3V = \pi r^2 h$  ;  $\pi r^2 h = 3V \rightarrow h = 3V/\pi r^2$

3.  $s = n/2 (a+l)$  despejar  $l$  ;  $2s = n(a+l)$  ;  $2s = an + nl$  ;  $nl = 2s - an \rightarrow l = 2s/n - a$

4.  $l = a + (n-1)d$  despejar  $n$  ;  $-(n-1)d = a-l$  ;  $-nd + d = a-l$  ;  $nd = l-d-a \rightarrow n = \frac{l-a}{d} + 1$

5.  $e = V_0 t + 1/2 g t^2$  despejar  $V_0$  ;  $e - \frac{1}{2} g t^2 = V_0 t$  ;  $V_0 t = e - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow V_0 = \frac{e - 1/2 g t^2}{t}$

6.  $V = V_0 (1+at)$  despejar  $t$  ;  $V = V_0 + a V_0 t$  ;  $-a V_0 t = V_0 - V$  ;  $a V_0 t = V - V_0 \rightarrow t = \frac{V - V_0}{a V_0}$

7.  $l = \pi s (r+r')$  despejar  $r'$  ;  $l = \pi r s + \pi r' s$  ;  $\pi r' s = l - \pi r s \rightarrow r' = \frac{l - \pi r s}{\pi s}$

8.  $i = \frac{E}{r+R}$  despejar  $r$  ;  $i(r+R) = E$  ;  $i r = E - i R \rightarrow r = \frac{E - i R}{i}$

9.  $u = V/(1+V)$  despejar  $V$ ;  $u+uV=V$ ;  $u=V-uV$ ;  $V(1-u)=u \rightarrow V = u/(1-u)$
10.  $\lambda = \frac{ly-a}{y-1}$  despejar  $y$ ;  $\lambda y - \lambda = ly - a$ ;  $\lambda y - ly = \lambda - a$ ;  $y(\lambda - l) = \lambda - a \rightarrow y = \frac{\lambda - a}{\lambda - l}$
11.  $R = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}$  despejar  $y_2$ ;  $Ry_1 + Ry_2 = y_1 y_2$ ;  $Ry_2 - y_1 y_2 = -Ry_1$ ;  $-(y_1 - R)y_2 = -Ry_1 \rightarrow y_2 = \frac{Ry_1}{y_1 - R}$
12.  $i = \frac{E}{R + \frac{r}{2}}$  despejar  $r$ ;  $i = \frac{2E}{2R+r}$ ;  $2iR + ir = 2E$ ;  $2iR = 2E - ir \rightarrow R = \frac{2E - ir}{2i}$
13.  $R = \frac{2ab}{1-2b}$  despejar  $b$ ;  $R - 2bR = 2ab$ ;  $-2bR - 2ab = -R$ ;  $b(2R+2a) = R \rightarrow b = \frac{R}{2(a+R)}$
14.  $I = i \frac{y+y'}{y'}$  despejar  $y'$ ;  $Iy' = iy + iy'$ ;  $Iy' - iy' = iy$ ;  $y'(I-i) = iy \rightarrow y' = \frac{iy}{I-i}$
15.  $\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$  despejar  $R$ ;  $\frac{P'+P}{PP'} = \frac{(n-1)(R'+R)}{RR'}$ ;  $RR'(P+P') = PP'(n-1)(R'+R)$   
 $RR'(P+P') = PP'R'(n-1) + PP'R(n-1)$ ;  $R(PR'+P'R') - PP'R(n-1) = PP'R'(n-1)$   
 $R(PR'+P'R' - PP'(n-1)) = PP'R'(n-1) \rightarrow R = \frac{(n-1)PP'R'}{P'R' + PR' - (n-1)PP'}$

### Ejercicio 93 (REPASO)

I Resolver las ecuaciones siguientes:

1.  $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 22$ ;  $6x + 3x + 2x = 132$ ;  $11x = 132 \rightarrow x = 12$
2.  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = x - 6$ ;  $4x + 3x + 2x = 12x - 72$ ;  $9x - 12x = -72$ ;  $3x = 72 \rightarrow x = 24$
3.  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} + 4,25$ ;  $12x + 8x + 6x = 4x + 3x + 2x + 102$ ;  $17x = 102 \rightarrow x = 6$
4.  $\frac{2x+1}{3} + \frac{3x-1}{4} - \frac{3x+1}{6} = \frac{7}{4}$ ;  $4(2x+1) + 3(3x-1) - 2(3x+1) = 21$ ;  $11x = 22 \rightarrow x = 2$
5.  $\frac{3x+2}{13} + \frac{2x+3}{39} = \frac{1}{3} + \frac{7x-1}{26}$ ;  $6(3x+2) + 2(2x+3) = 26 + 3(7x-1) \rightarrow x = 5$
6.  $8 - \left(\frac{5x+1}{6} + \frac{3x+2}{5}\right) = 4 + \left(\frac{x+2}{3} + \frac{3x+1}{4}\right)$ ;  $480 - 50x - 10 - 36x - 24 = 240 + 20x + 40 + 45x + 15$   
 $-151x = -151 \rightarrow x = 1$
7.  $\frac{3x+4}{5} + \frac{2x+5}{3} = \frac{6x+3}{15} + 2x$ ;  $3(3x+4) + 5(2x+5) = 6x+3+30x$ ;  $-17x = -34$   
 $x = 2$

$$8. \frac{5}{x+2} + \frac{10}{3(x+2)} - \frac{15}{2(x+2)} = \frac{1}{6} ; 30 + 20 - 45 = x + 2 ; x = 3$$

$$9. \frac{6}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{7x^2+50}{3(x^2-16)} = \frac{4}{3} ; 18(x-4) - 3(x+4)^2 + 7x^2+50 = 4(x^2-16) ; -6x=6 \rightarrow x=-1$$

$$10. \frac{4}{x^2-x-2} + \frac{4}{x^2-1} = \frac{3}{x^2-3x+2} ; \frac{4}{(x-2)(x+1)} + \frac{4}{(x+1)(x-1)} = \frac{3}{(x-2)(x-1)} ; 4(x-1) + 4(x-2) = 3(x+1) \\ 5x = 15 \rightarrow x = 3$$

$$11. \frac{5x-2}{5x+2} + \frac{80}{25x^2-4} = \frac{5x+2}{5x-2} ; (5x-2)^2 + 80 = (5x+2)^2 ; -40x = -80 \rightarrow x = 2$$

$$12. \frac{3}{1+\frac{2}{x}} - \frac{2}{1+\frac{3}{x}} = \frac{x^2+2.5}{x^2+5x+6} ; \frac{3x}{x+2} - \frac{2x}{x+3} = \frac{x^2+2.5}{(x+3)(x+2)} ; 3x(x+3) - 2x(x+2) = x^2+2.5 \\ 5x = 2.5 \rightarrow x = 0.5$$

$$13. \frac{3x+1}{10} - \frac{2x^2+x-21}{100x+50} = \frac{7x+4}{25} ; \frac{3x+1}{10} - \frac{2x^2+x-21}{50(2x+1)} = \frac{7x+4}{25}$$

$$5(3x+1)(2x+1) - 2x^2 - x + 21 = 2(7x+4)(2x+1) ; -6x = -18 \rightarrow x = 3$$

$$14. \frac{x+9}{7} + \frac{x^2+4}{2x+3} = \frac{9x-80}{14} ; 2(x+9)(2x+3) + 14(x^2+4) = (2x+3)(9x-80)$$

$$4x^2+6x+36x+54+14x^2+56=18x^2-160x+27x-240 \rightarrow x=-2$$

$$15. \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} ; (x+4)(x+2)(x+5) - (x+1)(x+2)(x+5) = (x+1)(x+4)(x+5) - (x+1)(x+4)(x+2)$$

$$x^2+7x+10 = x^2+5x+4 \rightarrow x = -3$$

$$16. \frac{4x+3}{3} - \frac{2x^2+7}{4(x+2)} + \frac{1}{8} = \frac{10x+3}{12} ; 8(4x+3)(x+2) - 6(2x^2+7) + 3(x+2) = 2(10x+3)(x+2)$$

$$32x^2+64x+24x+48-12x^2-42+3x+6=20x^2+40x+6x+12 \rightarrow x=0$$

$$17. \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} ; (x+2)(x^2-1) - (x-1)(x^2-4) = (x+1)(x^2-4) - (x-2)(x^2-1) \\ 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$18. \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}$$

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-6) - (x-2)(x-2)(x-5)(x-6) = (x-4)(x-2)(x-3)(x-6) - (x-5)(x-2)(x-3)(x-5)$$

$$(x-5)(x-6)[(x-1)(x-3) - (x-2)^2] = (x-2)(x-3)[(x-4)(x-6) - (x-5)^2]$$

$$x^2-11x+30 = x^2-5x+6 \rightarrow x = 4$$

$$19. \frac{x+a}{2} + \frac{bx}{a} + \frac{a-x}{b} = b+x ; ab(x+a) + 2b^2x + 2a(a-x) = 2ab(b+x)$$

$$abx + a^2b + 2b^2x + 2a^2 - 2ax = 2ab^2 + 2abx ; x = a(2b^2 - 2a - ab)/(2b^2 - 2a - ab) \rightarrow x = a$$

$$20. \frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} + (a+b+c)x = abc+1 ; cx+ax+bx+abc(a+b+c)x = abc(abc+1)$$

$$x(a+b+c)(1+abc) = abc(abc+1) \rightarrow x = abc/(a+b+c)$$

$$21. \frac{x+a}{a} - \frac{x-a+b}{b} + x = \frac{x-a+c}{c} + \frac{x+2a}{3} ; 3bc(x+a) - 3ac(x-a+b) + 3abcx = 3ab(x-a+c) + abc(x+2a)$$

$$(3bc - 3ac + 2abc - 3ab)x = a(3bc - 3ab + 2abc - 3ac) \rightarrow x = a$$

$$22. \frac{x}{a+b} - \frac{a+b-x}{x} = \frac{x}{a-b} - \frac{2bx}{a^2-b^2}; x^2(a-b) - (a^2-b^2)(a+b-x) = x^2(a+b) - x(2bx)$$

$$(a^2-b^2)x = a^3-b^3-ab^2+a^2b; (a+b)(a-b)x = (a-b)(a+b)^2 \rightarrow x = a+b$$

$$23. \frac{y-c}{y-4a} - \frac{16a^2-c^2}{y^2-16a^2} = \frac{y+c}{y+4a}; (y-c)(y+4a) - (16a^2-c^2) = (y+c)(y-4a)$$

$$y^2+4ay-cy-4ac-16a^2+c^2 = y^2-4ay+yc-4ac \rightarrow y = 4a+c$$

$$24. \frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}; (x+a+b)(x-a) = (x+a-b)(x+a) - (a^2+b^2)$$

$$x^2-ax+ax-a^2+bx-ab = x^2+ax+ax+a^2-bx-ab-a^2-b^2; -2(a-b)x = (a-b)(a+b) \rightarrow x = -(a+b)/2$$

$$25. \frac{x-2}{x+a-4} = \frac{2-x}{x-a+2} + 2; (x-2)(x-a+2) = (2-x)(x+a-4) + 2(x+a-4)(x-a+2)$$

$$x^2+2x-2x+2a-4 = 2x+2a-8-x^2-ax+4x+2x^2-2ax+4x+2ax-2a^2+4a-8x+8a-16$$

$$x = a^2-6a+60$$

## II Resolver los siguientes problemas:

1. La cuarta parte de un número más su décima parte, es igual a la quinta parte del número aumentada en 15 unidades. Hallar el número. Sea  $x$  el número

$$x/4 + x/10 = x/5 + 15; 10x + 4x = 8x + 600; 6x = 600 \rightarrow x = 100$$

2. El denominador de una fracción es 5 unidades mayor que el numerador. Si a cada término de la fracción se resta 2 unidades, la fracción resultante es reducible a  $1/2$ . ¿Cuál es la fracción original? Fr. Orig. Fr. Modif.

$$\begin{array}{ccc} N & x & x-2 \\ D & x+5 & x+3 \end{array} \quad \text{Planteo: } \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{2}; 2x-4 = x+3 \rightarrow x = 7$$

$$N = 7 \text{ y } D = 12 \rightarrow 7/12$$

3. Un muchacho obtiene un premio del cual invierte  $1/6$  en una excursión,  $1/4$  en libros, y  $1/5$  del resto en otros gastos. Si ahorró 140 \$, ¿de cuánto es el premio?

Sea  $x$  el valor del premio

$$x - \frac{x}{6} - \frac{x}{4} - \frac{1}{5} \left( x - \frac{x}{6} - \frac{x}{4} \right) = 140; \left( x - \frac{x}{6} - \frac{x}{4} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = 140; 12x - 2x - 3x = 2100$$

$$\rightarrow x = 300$$

4. La fórmula  $1/R = 1/r_1 + 1/r_2$  da, en electricidad, la resistencia  $R$  equivalente a dos resistencias  $r_1$  y  $r_2$  conectadas en paralelo. ¿Cuál es la resistencia equivalente a dos resistencias de 200 ohms y de 120 ohms conectadas en paralelo? ¿Cuántos ohms debe tener una resistencia que conectada en paralelo con otra resistencia de 300 ohms da una resistencia efectiva de 180 ohms? El problema se conforma de 2 partes

a.  $r_1 = 200 \Omega$  y  $r_2 = 120 \Omega$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}; \frac{1}{R} = \frac{1}{200} + \frac{1}{120}; R = \frac{200(120)}{200+120} \rightarrow R = 75 \Omega$$

b.  $r_1 = 300 \Omega$  :  $\frac{1}{180} = \frac{1}{300} + \frac{1}{r_2}; 10r_2 = 6r_2 + 1800; 4r_2 = 1800 \rightarrow r_2 = 450 \Omega$



5. A y B trabajando conjuntamente pueden descargar un camión en  $3\text{h } 3/4$ . A, solo puede descargarlo en 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardará B trabajando solo?

	A	B	A y B	Planteo:
Nº horas	10	X	$3\frac{3}{4}$	$1/10 + 1/X = 4/15$
parte del trabajo en 1h	$1/10$	$1/X$	$4/15$	$3X + 30 = 8X$
				$X = 6\text{ horas}$

6. En un gran premio, el campeón mundial Fangio no lograba desprenderse de un seguidor. A los 32 minutos de carrera, durante los cuales ambos habían recorrido 80 Km, optó por hacer cambiar las bujías de su coche, lo que le detuvo 3,6 minutos. De nuevo en carrera, consiguió una velocidad de 100 Km cada 32 minutos. ¿Al cabo de cuántos Kilómetros alcanzó a su rival, que no había variado la velocidad?

A 80 Km en 32 min      B X

$$V_1 = \frac{100 \text{ Km}}{32 \text{ min}} ; V_2 = \frac{25}{8} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{80 \text{ Km}}{32 \text{ min}} ; V_1 = \frac{5}{2}$$

$$t_1 + 3,6 = t_2 ; \frac{X}{25/8} + 3,6 = \frac{X}{5/2} ; \frac{8X}{25} + \frac{18}{5} = \frac{2X}{5} ; 8X + 90 = 10X \rightarrow X = 45 \text{ Km}$$

7. En una fábrica de aeroplanos hay 3 líneas de montaje que pueden montar cada una 12 aeroplanos en 30 días y hay otras 2 líneas que pueden montar cada una 12 aeroplanos en 40 días. ¿En cuánto tiempo las 5 líneas pueden montar 12 aeroplanos?

3 líneas c/u 12 → 36 en 30 días       $36\left(\frac{1}{30}\right) + 24\left(\frac{1}{40}\right) = 12\left(\frac{1}{X}\right) ; \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{X}$   
 2 líneas c/u 12 → 24 en 40 días  
 5 líneas c/u 1 → 12 en X días       $6X + 3X = 60 ; X = 20/3 \rightarrow X = 3\frac{2}{3} \text{ días}$

8. Un tanque se puede llenar por una llave en 6 horas y por otra en 4 horas. Un desagüe, lo vacía en 12 horas. Si se abren a la vez las dos llaves y el desagüe, ¿en cuánto tiempo el tanque quedará mediado de agua?

1ª llave      6       $1/6$       Planteo:  $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{X} ; 2X + 3X - X = 12 \rightarrow X = 3$   
 2ª llave      4       $1/4$

desagüe      12       $1/12$       para llenar completamente el tanque como sólo se  
 llaves-desagüe      X       $1/X$       quiere la mitad  $\Rightarrow 3/2 = 1,5\text{ h}$

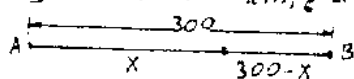
9. Debido que al desagüe no se había cerrado, una piscina tardó 10 horas en llenarse. Con el desagüe cerrado se hubiera llenado en 4 horas. ¿Cuánto tiempo demorará vaciar la piscina con las llaves cerradas y el desagüe abierto?

a. { llave      10      b. { llave      4      Planteo:  $\frac{1}{10} + \frac{1}{X} = \frac{1}{4} ; 2X + 20 = 5X$   
       desagüe X      { desagüe 0       $X = 6\frac{2}{3} \text{ horas}$

10. Un tren de carga sale de A hacia B a las 6 a.m. a una velocidad de 45 Km por hora. A las 11 a.m. sale también de A y en dirección a B, un tren de pasajeros a una velocidad de 60 Km por hora. ¿A qué hora alcanzará el segundo tren al primero?

Planteo:  $t_1 = 5 + t_2 ; \frac{X}{45} = 5 + \frac{X}{60} ; 4X = 900 + 3X \rightarrow X = 900$   
 Tren carga      X      45      X/45       $t_1 = 900/60 ; t_2 = 15$   
 Tren pasajeros      X      60      X/60      Como salió a las 11h → 15 + 11 = 26h es decir a las 2h del día sig.

11. A las 2 p.m. sale un ómnibus de A hacia B a una velocidad de 80 Km por hora. A las 4 p.m. sale un automóvil de B hacia A a una velocidad de 70 Km por hora. Si la distancia entre A y B es de 300 Km, ¿a qué distancia de A se encontrarán y a qué hora?



	d	v	t	
Ómnibus	x	80	x/80	
Auto	300-x	70	(300-x)/70	Panti: $t_o = 2 + t_{so}$

$$\frac{x}{80} = 2 + \frac{300-x}{70}; 7x = 1120 + 2400 - 8x \rightarrow x = 3520/15 \rightarrow x = 234 \frac{2}{3} \text{ Km}$$

$$t = (3520/15)/80; t = 44/15; t = 2h; 56min; t_r = 4h; 56min \text{ p.m.}$$

12. Dos trenes salen de la misma ciudad y a la misma hora en sentidos opuestos. A las 3 horas y media se encuentran uno de otro a 392 Km de distancia. Si la velocidad del primero es  $3/4$  de la velocidad del segundo, ¿cuál es la velocidad de cada uno? Sea V la velocidad del 2º

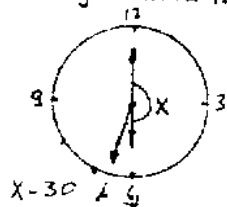
$$1^\circ \quad 3/4 V \quad t_1 = 3,5 h$$

$$d_1 + d_2 = 392; 3/4 V(3,5) + V(3,5) = 392; V = 64$$

$$2^\circ \quad V \quad t_2 = 3,5 h$$

$$\Rightarrow 1^\circ 48 \text{ Km/h y } 2^\circ 64 \text{ Km/h}$$

13. Si el reloj marca las 6, ¿a qué hora coincidirán por primera vez las manecillas?

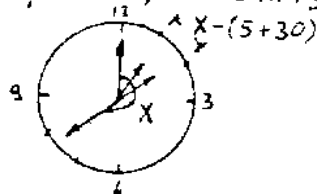


	d	v	t
minutero	x	60	x/60
horario	x-30	5	(x-30)/5

$$\frac{x}{60} = \frac{x-30}{5}; 11x = 360$$

$$x = 32 \frac{8}{11} \rightarrow 6h 32 \frac{8}{11} \text{ min}$$

14. ¿A qué hora, entre la 1 y las 2, están las manecillas en línea recta?



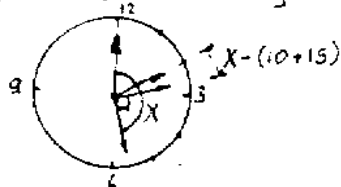
	d	v	t
minutero	x	60	x/60
horario	x-35	5	(x-35)/5

$$\frac{x}{60} = \frac{x-35}{5}; 11x = 420$$

$$x = 38 \frac{2}{11}$$

$$\rightarrow 1h 38 \frac{2}{11} \text{ min}$$

15. ¿A qué hora, entre las 2 y las 3, forman por primera vez ángulo recto las manecillas?



	d	v	t
min.	x	60	x/60
hor.	x-25	5	(x-25)/5

$$\frac{x}{60} = \frac{x-25}{5}; x = 12x - 300$$

$$11x = 300$$

$$x = 27 \frac{3}{11} \rightarrow 2h 27 \frac{3}{11} \text{ min}$$

16. Cuando la velocidad de la corriente de un río es de 2 Km por hora, Juan puede ir en su bote 12 Km río abajo en el mismo tiempo que recorre 15 Km río abajo cuando la velocidad de la corriente es de 4 Km por hora. ¿Cuál es la velocidad del bote en agua tranquila?

	d	v	t
río abajo	12	x+2	12/(x+2)
	15	x+4	15/(x+4)

$$\frac{12}{x+2} = \frac{15}{x+4}; 12x+48 = 15x+30 \rightarrow x = 6 \text{ Km/h}$$

17. Navegando a toda velocidad en contra de la corriente de un río, una lancha de motor hace 18 Km en el mismo tiempo que a favor de la corriente haría 24 Km. Si la velocidad de la corriente del río es de 3 Km por hora, ¿cuál es la velocidad máxima del bote en agua tranquila?

	d	V	t	Sea x la velocidad máxima
En contra	18	$x-3$	$18/(x-3)$	$\frac{18}{x-3} = \frac{24}{x+3} ; \frac{3}{x-3} = \frac{4}{x+3} ; 3x+9 = 4x-12 \rightarrow x = 21 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$
A Favor	24	$x+3$	$24/(x+3)$	

18. Un muchacho sube una loma a razón de 2 Km por hora y luego se desliza hacia abajo a 10 Km por hora. Si en subir y bajar emplea 36 minutos en total, ¿qué distancia hay desde la base a la cima de la loma?  $t_T = 36 \text{ min.}$

	d	V	t	Planteo: $t_s + t_b = 36/60$ en horas
sube	x	2	$x/2$	$\frac{x}{2} + \frac{x}{10} = \frac{36}{60} ; 30x + 6x = 36 \rightarrow x = 1 \text{ Km}$
baja	x	10	$x/10$	

19. Un viajero hace parte de la jornada en tren a 80 Km por hora y parte en avión a 300 Km por hora. Si en total viajó 1600 Km en 9 horas, hallar la distancia que recorrió en avión.

	d	V	t	Pl: $t_t + t_a = 9$
tren	x	80	$x/80$	$\frac{x}{80} + \frac{1600-x}{300} = 9 ; 30x + 12800 - 8x = 21600$
avión	$1600-x$	300	$(1600-x)/300$	$80 \quad 300 \quad x = 400$
avión $1600 - 400 = 1200 \text{ Km}$				

20. La velocidad de un aeroplano en aire tranquilo es de 240 Km por hora. El volar 800 Km en contra del viento le toma  $8/7$  del tiempo que le tomaría volar la misma distancia a favor del viento. Hallar la velocidad del viento. Sea x la velocidad del viento ;  $t_c = 8/7 t_a$

	d	V	t	Pl: $\frac{800}{240-x} = \frac{8}{7} \left[ \frac{800}{240+x} \right] ; \frac{1}{240-x} = \frac{8}{7(240+x)}$
En contra	800	$240-x$	$800/(240-x)$	
A Favor	800	$240+x$	$800/(240+x)$	$1680 + 7x = 1920 - 8x \rightarrow x = 16 \text{ Km/h}$

21. El numerador de una fracción excede al denominador en m unidades. Si a cada término de la fracción se resta k, la fracción resultante es equivalente a  $a/b$ . Hallar la fracción original.

	Fr. Orig.	Fr. Mod.	Pl: $\frac{x+m-k}{x-k} = \frac{a}{b} ; bx + bm - bk = ax - ak$
Numerador	$x+m$	$x+m-k$	$-ax + bx = -ak + bk - bm$
Denominador	x	$x-k$	$\rightarrow x = (ak + bm - bk)/(a-b)$

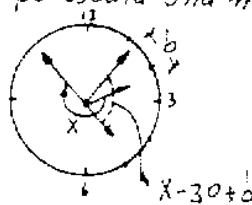
22. A y B trabajando juntos hacen una obra en c días. B solo demora b días. ¿En cuántos días hará A la obra si trabaja solo?

	A	B	A y B	Pl: $\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} ; bc + cx = bx ; cx - bx = -bc$
no días	x	b	c	$x = \frac{bc}{b-c}$
parte del trab en día	$1/x$	$1/b$	$1/c$	

- \* 23. Un tren que se mueve con una velocidad de v Km por hora lleva h horas de adelanto a un segundo tren cuya velocidad es de v' Km por hora. ¿Dentro de cuántas horas el segundo tren alcanzará al 1º?

	d	V	t	Pl: $t_s = h + t_2 ; \frac{x}{v} = h + \frac{x}{v'} ; v'x = vv'h + vx$
1º Tren	x	v	$x/v$	$v'x - vx = vv'h$
2º Tren	x	v'	$x/v'$	$x = \frac{vv'h}{v'-v} \rightarrow t = \frac{vv'h}{v'-v} \rightarrow t = \frac{v'h}{v'-v}$

24. El minutero de un reloj está  $b$  minutos delante del horario ( $b < 30$ ). ¿Dentro de cuánto tiempo estará una manecilla en prolongación de la otra?



	$d$	$v$	$t$
minutero	$X$	$60$	$X/60$
Horario	$X+b-30$	$5$	$(X+b-30)/5$

planteo:  $\frac{X}{60} = \frac{X+b-30}{5}$ ;  $X = 12X + 12b - 360$ ;  $X = (360 - 12b)/11$   
 $\rightarrow X = 12(30-b)/11 \text{ min.}$

25. Un avión tarda el mismo tiempo en navegar  $K$  Km a favor del viento que  $K'$  Km en contra del viento. Si en aire tranquilo la velocidad del avión es de  $v$  Km por hora, hallar la velocidad del viento. Sea  $x$  la velocidad del viento

	$d$	$v$	$t$	
A favor	$K$	$v+x$	$K/(v+x)$	
En contra	$K'$	$v-x$	$K'/(v-x)$	

Pl:  $t_a = t_c$ ;  $\frac{K}{v+x} = \frac{K'}{v-x}$ ;  $Kv - Kx = K'v + K'x$   
 $(K-K')v = (K+K')x \Rightarrow x = (K-K')v/(K+K')$

III. En las fórmulas siguientes, despejar la letra que se indica:

1.  $E = I \left( R + \frac{r}{n} \right)$  despejar  $r$ .  $E = I \left( \frac{Rn+r}{n} \right)$ ;  $En = IRn + Ir$ ;  $r = \frac{En - IRn}{I} \rightarrow r = \frac{n(E - IR)}{I}$

2.  $\frac{n}{v} = \frac{m}{M+m}$  despejar  $m$ .;  $nM + nm = mv$ ;  $nM = m(v-n) \rightarrow m = \frac{nM}{v-n}$

3.  $A = \frac{fr-a}{r-1}$  despejar  $f$ .;  $rx-A = fr-a$ ;  $rx-A+a = fr \rightarrow f = \frac{[A(r-1)+a]}{r}$

4.  $A = \pi r(r+g)$  despejar  $g$ .;  $A = \pi r^2 + \pi rg$ ;  $A - \pi r^2 = \pi rg \rightarrow g = \frac{(A - \pi r^2)}{\pi r}$

5.  $\frac{a}{w} = \frac{b}{u} + \frac{c}{v}$  despejar  $v$ .;  $auv = bwv + cuu$ ;  $(au-bw)v = cuu \rightarrow v = \frac{cuu}{au-bw}$

6.  $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r-h)$  despejar  $r$ .;  $3V = 3\pi h^2 r - \pi h^3$ ;  $3V + \pi h^3 = 3\pi h^2 r \rightarrow r = \frac{3V + \pi h^3}{3\pi h^2}$

7.  $V = \frac{h}{3} (B+B'+4B'')$  despejar  $B'$ .;  $3V = hB + hB' + 4hB''$ ;  $3V - hB - 4hB'' = hB' \rightarrow B' = \frac{[3V - h(B+4B'')]}{h}$

8.  $A = \frac{\pi}{2} [2a + (n-1)d]$  despejar  $d$ .;  $2A = 2an + \pi(n-1)d$ ;  $2(A-an) = \pi(n-1)d \rightarrow d = \frac{2(A-an)}{\pi(n-1)}$

9.  $Q = \frac{w}{g} (V_1 - V_0)$  despejar  $V_0$ .;  $Qg = wV_1 - wV_0$ ;  $wV_0 = wV_1 - Qg \rightarrow V_0 = \frac{wV_1 - Qg}{w}$

10.  $A = [\theta - (n-1)\pi]r^2$  despejar  $n$ .;  $A = (\theta - \pi n + \pi)r^2$ ;  $A = \theta r^2 - \pi nr^2 + \pi r^2$ ;  
 $\pi nr^2 = \theta r^2 + \pi r^2 - A$ ;  $n = \frac{2\pi r^2 + (\theta r^2 - A)}{\pi r^2} \rightarrow n = 2 + \frac{\theta r^2 - A}{\pi r^2}$

11. En la fórmula  $s = \frac{\pi}{2} (a+1)$  calcular  $a$  cuando  $s = 96$ ,  $\pi = 8$ ,  $l = 20$ .

$$S = \frac{n}{2}(a+l); 20 = an + \frac{1}{2}n; an = 20 - \frac{1}{2}n; a = \frac{20 - \frac{1}{2}n}{n}; a = \frac{2(20) - 20(8)}{8}$$

$$a = 4$$

12. En la fórmula  $i = \frac{E}{r+R}$  calcular  $R$  cuando  $i = 4$ ;  $E = 60$ ;  $r = 8$

$$i = \frac{E}{r+R}; ir + iR = E; R = \frac{E - ir}{i}; R = \frac{60 - 4(8)}{4} \rightarrow R = 7$$

13. En la fórmula  $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$  calcular  $r_1$  cuando  $R = 4.8$ ,  $r_2 = 12$ .

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}; Rr_1 + Rr_2 = r_1 r_2; (R - r_2)r_1 = -Rr_2; r_1 = \frac{Rr_2}{r_2 - R}; r_1 = \frac{4.8(12)}{12 - 4.8} \rightarrow r_1 = 8$$

14. En la fórmula  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{l}$  calcular  $p'$  cuando  $p = 5.4$ ,  $l = 4.8$ .

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{l}; \frac{1}{p'} = \frac{1}{l} - \frac{1}{p}; p' = \frac{Pl}{p-l}; p' = \frac{5.4(4.8)}{5.4 - 4.8} \rightarrow p' = 43.2$$

15. En la fórmula  $I = i \frac{Y+Y'}{r'}$  calcular  $r'$  cuando  $I = 60$ ,  $i = 40$ ,  $r = 9$ .

$$I = i \frac{Y+Y'}{r'}; IY' = iY + iY'; iY = -iY' + IY'; r' = \frac{r'(I-i)}{i}; r' = \frac{9(60-40)}{40} \rightarrow r' = 4.5$$

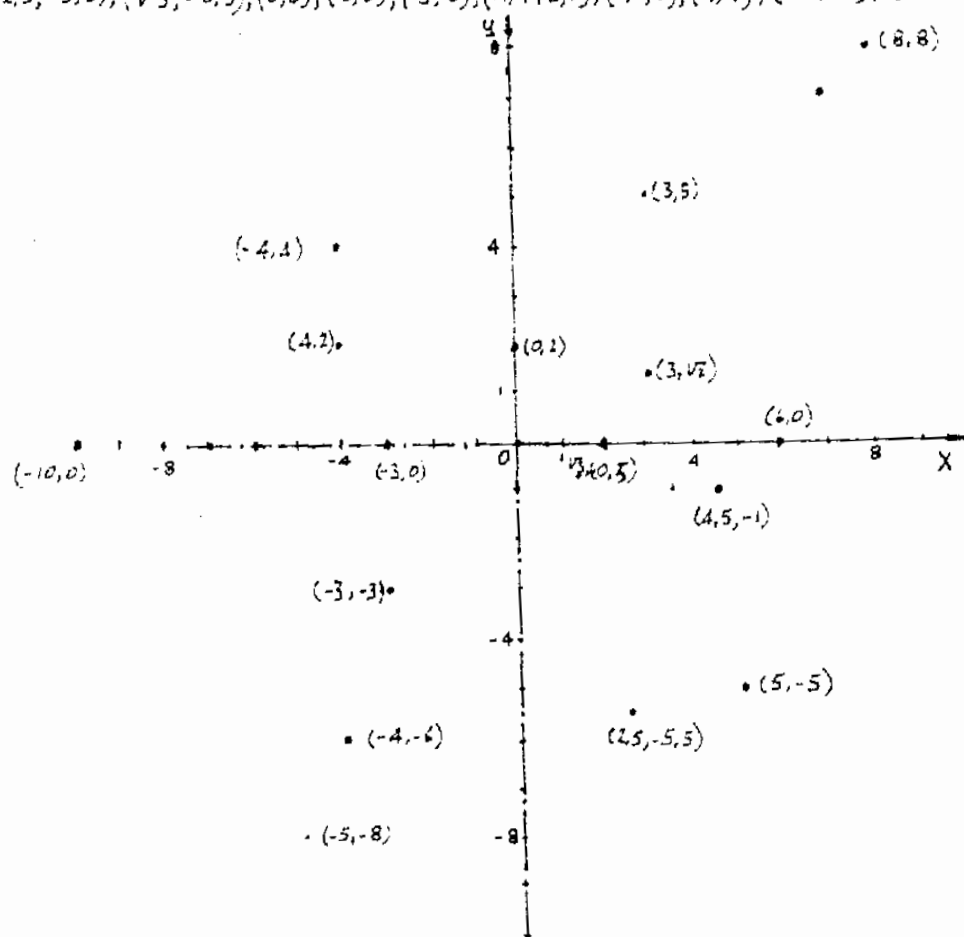
## CAPITULO 12

### FUNCIONES Y GRAFICOS

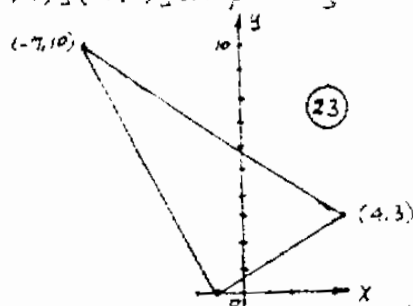
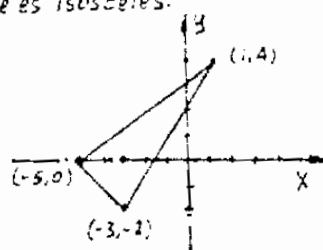
#### Ejercicio 94

En una hoja de papel ordinario o cuadrulado dibujar dos ejes rectangulares y adoptando unidades convenientes marcar los siguientes puntos: del 1-21

$(3,5)$ ;  $(-4,2)$ ;  $(-5,-8)$ ;  $(-3,0)$ ;  $(0,2)$ ;  $(4,5,-1)$ ;  $(-4,4)$ ;  $(3,\sqrt{2})$ ;  $(-3,-3)$ ;  $(0,9)$ ;  $(5,-5)$   
 $(2,5,-5,5)$ ;  $(\sqrt{3},-0,5)$ ;  $(0,0)$ ;  $(6,0)$ ;  $(8,8)$ ;  $(-1,4,3,2)$ ;  $(-10,0)$ ;  $(7,7)$ ;  $(-4,-6)$ ;  $(-3,12)$



22. Dibujar el triángulo cuyos vértices son  $(-3, -2)$ ,  $(1, 4)$  y  $(-5, 0)$  y comprobar gráficamente que es isósceles.

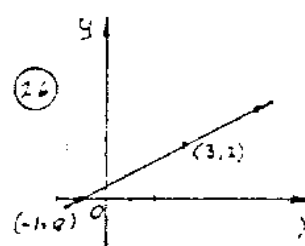
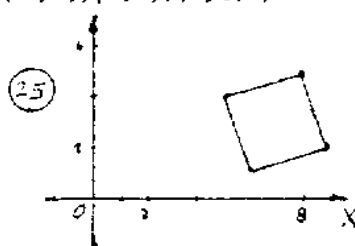
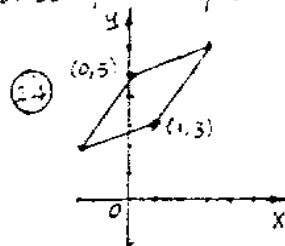


23. Dibujar el triángulo cuyos vértices son  $(-1, 0)$ ,  $(4, 3)$  y  $(-7, 10)$  y comprobar que tiene un ángulo recto (utilícese el transportador).

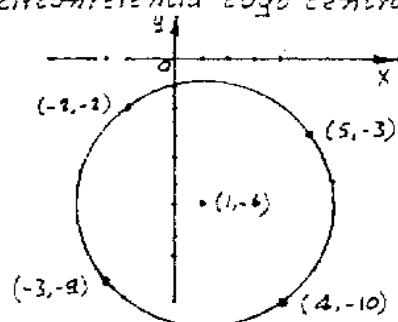
24. Dibujar el cuadrilátero cuyos vértices son  $(1,3)$ ,  $(-2,2)$ ,  $(0,5)$  y  $(3,6)$  y comprobar que es un paralelogramo.

25. Comprobar que los puntos  $(5,4)$ ,  $(9,2)$ ,  $(8,5)$  y  $(6,1)$  forman un cuadrado

26. Comprobar que los puntos  $(3,2)$ ,  $(-1,0)$ ,  $(6,3,5)$  están en línea recta.



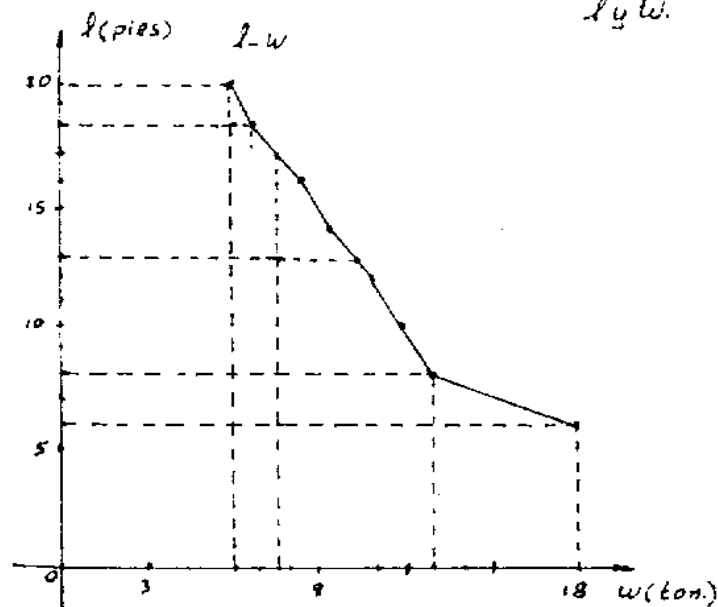
\*27. Comprobar gráficamente que los puntos  $(5,-3)$ ,  $(4,-10)$ ,  $(-3,-9)$  y  $(-2,-2)$  están en una circunferencia cuyo centro es el punto  $(1,-6)$ .



28. La siguiente tabla da en toneladas el peso máximo  $w$  que soporta una columna de madera cuya sección es un cuadrado de 6 pulgadas de lado, para distintas longitudes  $l$  (pies):

$l$	6	9	10	12	14	16	18	20
$w$	18	13	12	11	9.5	8.5	7	6

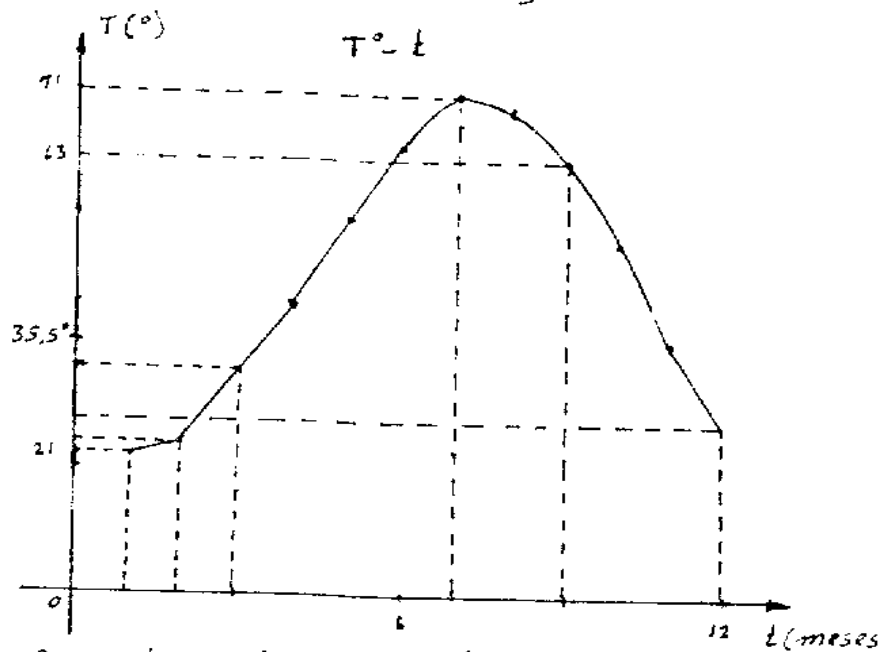
Construir un gráfico que muestre la relación entre  $l$  y  $w$ .



29. En la ciudad de Marsella la temperatura promedio mensual en grados Fahrenheit fue:

Mes	En.	Feb	Mar	Abr	Maj	Jun	Jul	Ag.	Sp.	Oct.	Nov.	Dic.
Temp	21°	23°	33°	44°	54°	64°	71°	70°	63°	51°	37°	26°

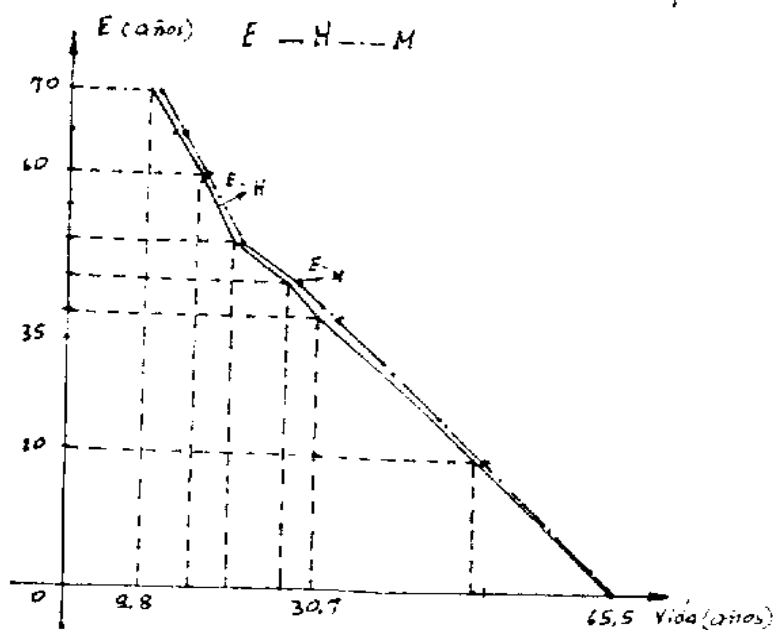
Asignar un número de orden a cada mes (enero: 1, febrero: 2, marzo: 3, etc.) y construir el gráfico de la temperatura media según los datos indicados.



30. La oficina de Estadísticas de Vida ha publicado la siguiente tabla de vida probable para hombres y mujeres en los Estados Unidos.

Edad		0	20	40	45	50	55	60	65	70
Vida prob.	Hombres	65,5	49	30,7	26,5	22,4	18,8	15,4	12,4	9,8
	Mujeres	71	53,8	35	30,5	26,2	22	18,1	14,4	11,2

Usando los mismos ejes de coordenadas, hágase un gráfico de la vida probable de los hombres, según su edad, y otro, de la vida probable de las mujeres.





## Ejercicio 95

1. Expresar la distancia  $d$  (en Kilómetros) que recorre un automóvil que viaja a 60 Km por hora en función del tiempo  $t$  (en horas).

$$d = vt \rightarrow d = 60t$$

- \* 2. Expresar el costo  $C$  (en pesos) de  $g$  galones de agua destilada. Si cada galón cuesta 32 centavos.

$$C = pg \rightarrow C = 0,32g$$

3. Expresar el área  $A$  de un cuadrado en función de su lado  $l$ .  $\rightarrow A = l \cdot l \rightarrow A = l^2$

4. Expresar el área  $A$  de un círculo en función de su radio  $r$ .  $\rightarrow A = \pi r^2$

- \* 5. Un taquígrafo escribe 120 palabras por minuto. Expresar la cantidad de palabras  $P$  que escribe en función del número  $h$  de minutos que trabaja.

$$P = n^{\circ} \text{palb.} \times t \rightarrow P = 120h$$

6. En una competición de tiro, cada participante hizo un solo centro, que valía 100 puntos. Como por las aproximaciones se contaban sólo 5 puntos, expresar la fórmula del puntaje  $P$ , en función del número  $n$  de aproximaciones por competidor.

$$P = 100 + 5n$$

7. Expresar el perímetro  $P$  de un rectángulo en función de su base  $b$  y de su altura  $h$ .

$$P = b + h + b + h \rightarrow P = 2b + 2h$$

8. Expresar la altura  $h$  de un triángulo en función de su área  $A$  y de su base  $b$ .

$$A = bh/2 ; 2A = bh \rightarrow h = 2A/b$$

9. Expresar el interés simple que produce un capital de 100 000\$ en función del tanto por ciento mensual  $r$  y del tiempo  $t$  en años.  $T\% = r ; r = 1200 \text{ meses} ; t = \text{años}$

$$i = \frac{CT\%}{100} \text{ (en años)} ; i = \frac{100.000 \cdot 1200 \cdot r \cdot t}{100} \rightarrow i = 1200.000 r t$$

10. Expresar el perímetro  $P$  de un polígono regular en función del lado  $l$  y del número de lados  $n$ .  $\rightarrow P = nl$

11. Dado  $f(x) = 4x - 1$  hallar:

a.  $f(1) = 4(1) - 1 = 3$

b.  $f(-1) = 4(-1) - 1 = -5$

c.  $f(0) = 4(0) - 1 = -1$

d.  $f(2) = 4(2) - 1 = 7$

12. Dado  $f(x) = 5 - x$ , hallar:

a.  $f(3) = 5 - 3 = 2$

b.  $f(-2) = 5 - (-2) = 7$

c.  $f(1) = 5 - 1 = 4$

d.  $f(5) = 5 - 5 = 0$

13. Dado  $f(x) = x^2 + 1$ , hallar:

a.  $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

b.  $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

c.  $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

d.  $f(a) = a^2 + 1$

14. Dado  $f(x) = 6/x$ , hallar:

a.  $f(2) = 6/2 = 3$

b.  $f(3) = 6/3 = 2$

c.  $f(-6) = 6/-6 = -1$

d.  $f(a) = 6/a$

15. Dado  $f(x) = (x-1)/(x+2)$ , hallar:

a.  $f(3) = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$

b.  $f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$

c.  $f(1) = \frac{1-1}{1+2} = 0$

d.  $f(0,5) = \frac{0,5-1}{0,5+2} = -\frac{1}{5}$

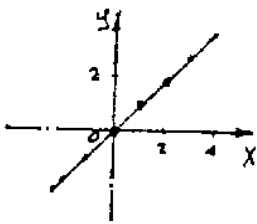
16. Dada la ecuación  $2x + y = 8$  expresar:  
 a.-  $y$  en función de  $x$ ;  $2x + y = 8 \rightarrow y = 8 - 2x$   
 b.-  $x$  en función de  $y$ ;  $2x + y = 8 \rightarrow x = (8 - y)/2$ ;  $x = 4 - 0,5y$
17. Dada la ecuación  $4x - 2y = 9$  expresar:  
 a.-  $y$  en función de  $x$ ;  $-2y = 9 - 4x$ ;  $y = 2x - 4,5$   
 b.-  $x$  en función de  $y$ ;  $4x - 2y = 9$ ;  $4x = 2y + 9 \rightarrow x = 0,5y + 2,25$
18. Dada la ecuación  $PV = K$ , expresar:  
 a.-  $V$  en función de  $P$ ;  $V = K/P$       b.-  $P$  en función de  $V$ ;  $P = K/V$
19. Dada la fórmula  $e = 10 + 5t$ , expresar  $t$  en función de  $e$ .  
 $10 + 5t = e$ ;  $5t = e - 10$ ;  $t = e/5 - 2 \rightarrow t = 0,2e - 2$
20. Dada la fórmula  $S = 2\pi rh$ , expresar  $h$  en función de  $S$  y de  $r$   
 $2\pi rh = S$ ;  $h = S/2\pi r$

### Ejercicio 96

Construir el gráfico de cada una de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes:

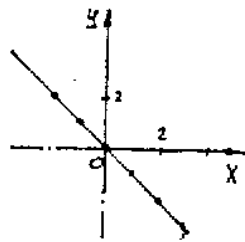
1.  $y = x$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	1	2	3	-1	-2



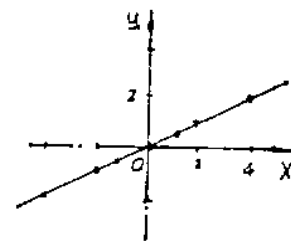
2.  $y = -x$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	-1	-2	-3	1	2



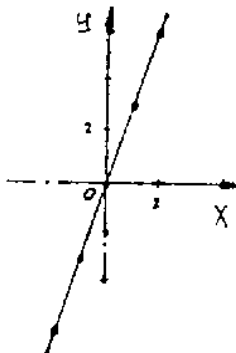
3.  $y = 0,5x$

x	0	1	2	4	-1	-2	-4
y	0	0,5	1	2	-0,5	-1	-2



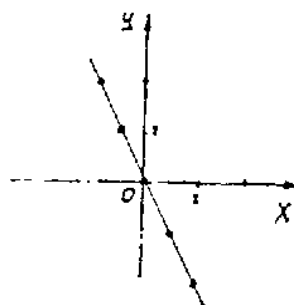
4.  $y = 3x$

x	0	1	2	-1	-2
y	0	3	6	-3	-6



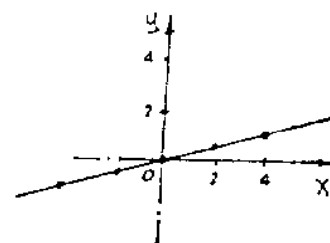
5.  $y = -2x$

x	0	1	2	3	-3	-2
y	0	-2	-4	-6	6	4



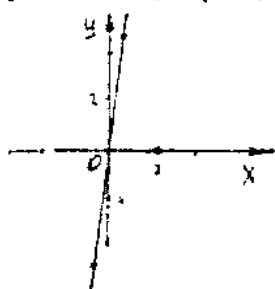
6.  $y = 1/4x$

x	0	1	2	4	-1	-2
y	0	1/4	0,5	1	-1/4	-0,5



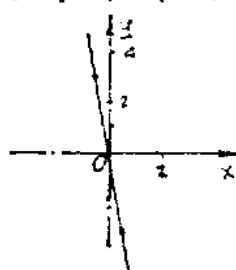
7.  $y = 10x$

x	0	1/4	0.5	1	3/4	-0.5
y	0	2.5	5	10	-2.5	-5



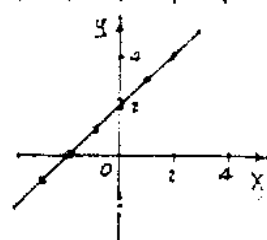
8.  $y = -6x$

x	0	1	0.5	-1	-0.5
y	0	-6	-3	6	3



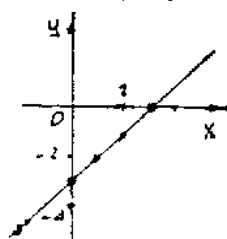
9.  $y = x + 2$

x	0	1	2	3	-3	-2	-1
y	2	3	4	5	-1	0	1



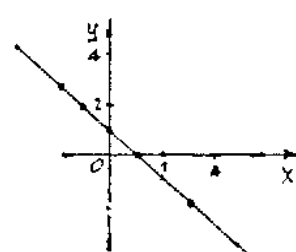
10.  $y = x - 3$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	-3	-2	-1	0	-4	-5



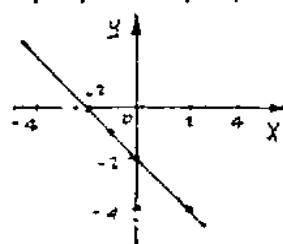
11.  $y = -x + 1$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	1	0	-1	-2	2	3



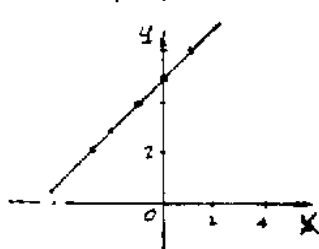
12.  $y = -x - 2$

x	0	1	2	-1	-2
y	-2	-3	-4	-1	0



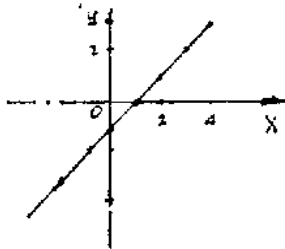
13.  $y = x + 5$

x	0	1	2	-1	-2	-3
y	5	6	7	4	3	2



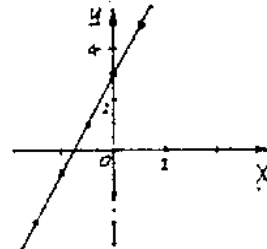
14.  $y = x - 1$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	-1	0	1	2	-2	-3



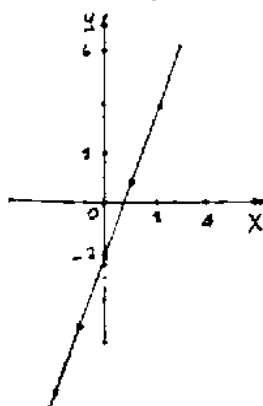
15.  $y = 2x + 3$

x	0	1	-1	-2	-3
y	3	5	1	-1	-3



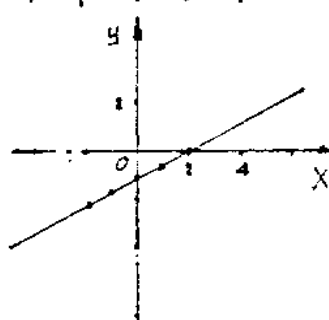
16.  $y = 3x - 2$

x	0	1	2	-1	-2
y	-2	1	4	-5	-8



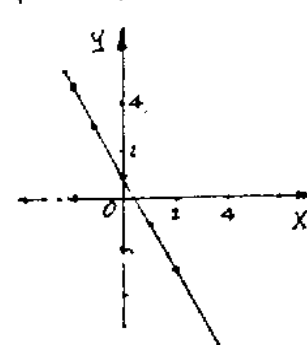
17.  $y = 0.5x - 1$

x	0	1	2	-1	-2
y	-1	-0.5	0	-1.5	-2



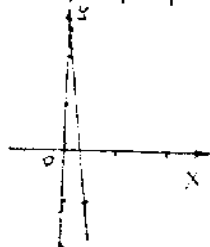
18.  $y = -2x + 1$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	-1	-3	3	5



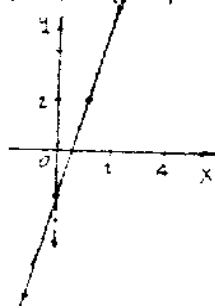
19.  $y = -3x + 5$

x	0	1	2	3
y	5	2	-1	-4



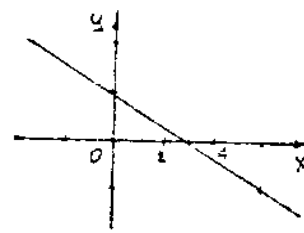
20.  $y = 4x - 2$

x	0	1	2	-1
y	-2	2	6	-6



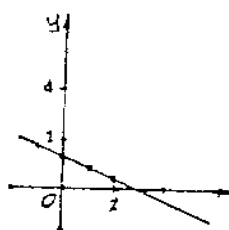
21.  $2x + 3y = 6 \rightarrow y = -2/3x + 2$

x	0	3	6
y	2	0	-2



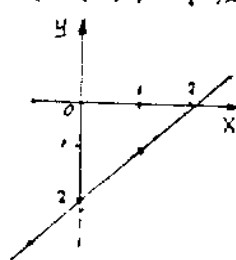
22.  $3x + 5y = 8 \rightarrow y = -3/5x + 8/5$

x	0	1	2	-1
y	8/5	1	2/5	11/5



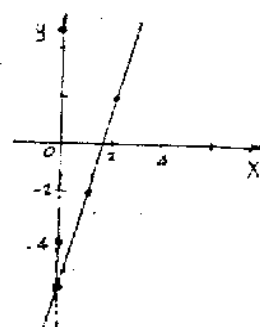
23.  $x - 2y = 4 \rightarrow y = x/2 - 2$

x	0	1	2	-1	-2
y	-2	-3/2	-1	-5/2	-3



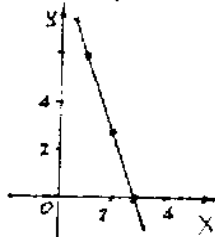
24.  $4x - y = 6 \rightarrow y = 4x - 6$

x	0	1	2	3	-1
y	-6	-2	2	6	-10



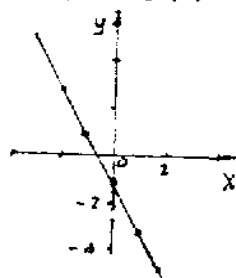
25.  $3x + y = 9 \rightarrow y = -3x + 9$

x	0	1	2	3
y	9	6	3	0



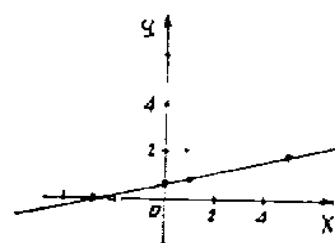
26.  $2x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -2x - 1$

x	0	1	2	-1	-2
y	-1	-3	-5	1	3



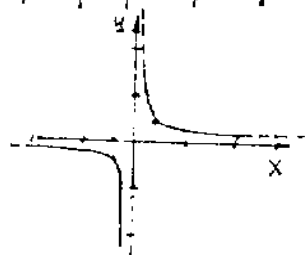
27.  $x - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = x/4 + 3/4$

x	0	1	5	-3
y	3/4	1	2	0



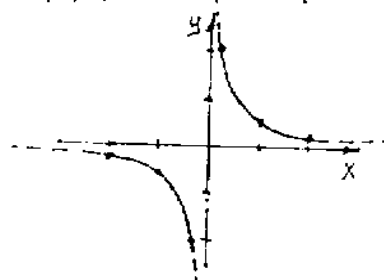
28.  $y = 1/x$

x	1	2	-1	-2	4	-4	0.5
y	1	0.5	-1	-0.5	0.25	-0.25	2



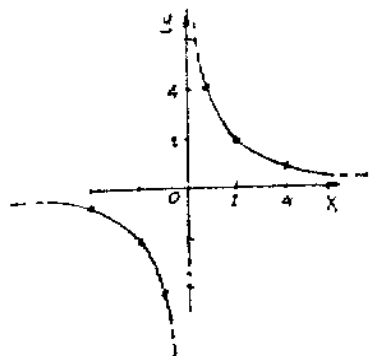
29.  $y = 2/x$

x	1	2	4	-1	-2	-4	-0.5
y	2	1	0.5	-2	-1	-0.5	-4



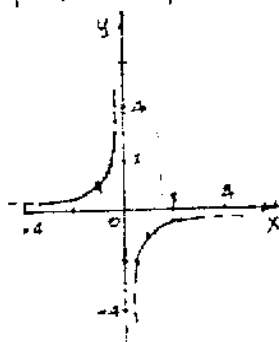
30.  $y = 4/x$

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	4	2	1	-4	-2	-1



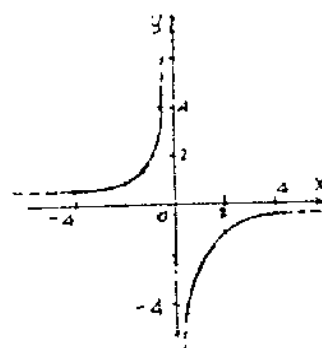
31.  $y = -1/x$

x	0.5	1	2	-0.5	-1	-2
y	-2	-1	-0.5	2	1	0.5



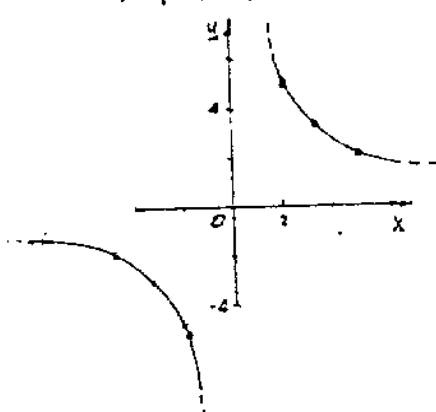
32.  $y = -2/x$

x	0.5	1	2	-0.5	-1	-2
y	-4	-2	-1	4	2	1



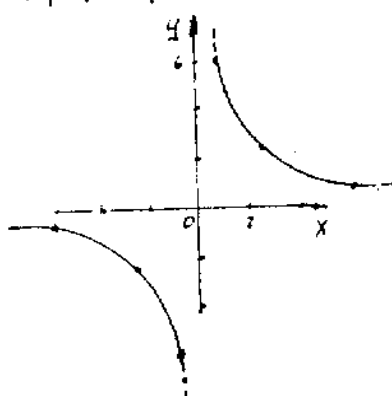
33.  $y = 10/x$

x	1	2	4	5	-1	-2	-5
y	10	5	2.5	2	-10	-5	-2



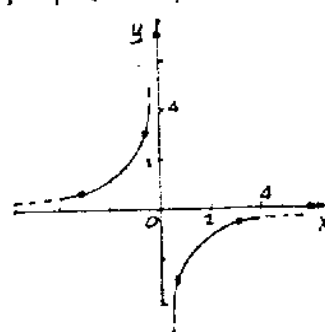
34.  $y = 6/x$

x	1	2	3	-1	-2	-3	6	-6
y	6	3	2	-6	-3	-2	1	-1



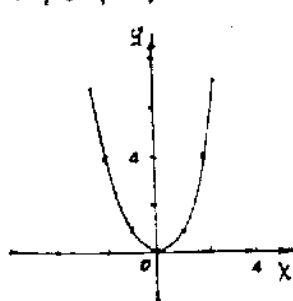
35.  $y = -3/x$

x	1	3	-1	-3	6	-6
y	-3	-1	3	1	-0.5	0.5



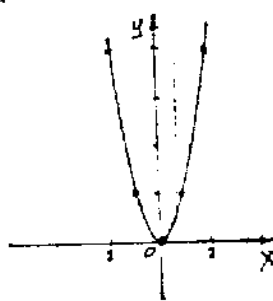
36.  $y = x^2$

x	0	±1	±2
y	0	1	4



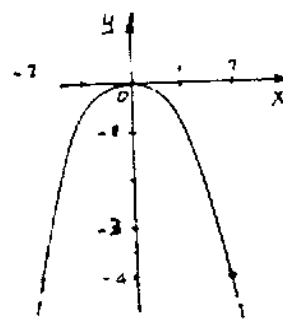
37.  $y = 2x^2$

x	0	±1	±2
y	0	2	8



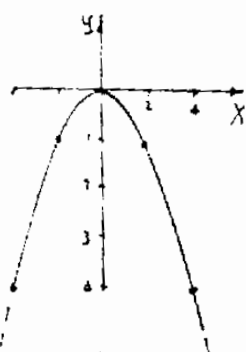
38.  $y = -x^2$

x	0	±1	±2
y	0	-1	-4



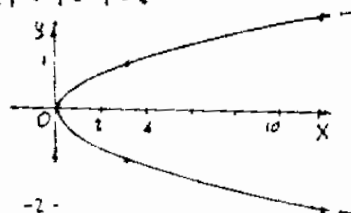
39.  $y = -1/4 x^2$

x	0	±2	±4
y	0	-1	-4



40.  $x = 3y^2$

x	0	3	12
y	0	±1	±2



41. Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ , y se tiene  $y=10$  para  $x=2$ , expresar  $y$  como función de  $x$ . Hallar el valor de  $y$  cuando  $x=3$ .

$$y = Kx; y=10; x=2 : 10 = K(2) \rightarrow K=5 \Rightarrow y=5x; y=5(3) \rightarrow y=15$$

42. Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ , y se sabe que  $y=2$  cuando  $x=4$ , expresar  $y$  como función de  $x$ , y hallar el valor de  $y$  para  $x=6$ .

$$y = Kx; 2 = K(4) \rightarrow K = 1/2; y = 0,5x; y = 0,5(6) \rightarrow y = 3$$

43. Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ , y para  $x=3$  es  $y=12$ , expresar  $y$  como función de  $x$ , y hallar el valor de  $y$  para  $x=5$ .

$$y = Kx; 12 = K(3) \rightarrow K = 4; y = 4x; y = 4(5) \rightarrow y = 20$$

44. En el movimiento uniforme el espacio recorrido  $e$  es directamente proporcional al tiempo empleado en recorrerlo. En este caso el coeficiente de proporcionalidad se le llama velocidad. Si para  $t=2$  s se tiene  $e=20$  m, expresar  $e$  como función de  $t$  y hallar  $e$  para  $t=10$  s.

$$e = Kt; e = vt; 20 = v(2) \rightarrow v = 10 \text{ m/s}; e = 10v; e = 10(10) \rightarrow e = 100 \text{ m}$$

45. La fuerza  $F$  necesaria para estirar un resorte fijo por un extremo es directamente proporcional al desplazamiento  $x$  del extremo libre del resorte. Si para  $x=1$  cm se requiere  $F=8$  lb, hallar  $F$ , en función de  $x$  y determinar el valor de  $F$  para  $x=2$  cm.

$$F = Kx; 8 = K(1) \rightarrow K = 8 \text{ lb/cm}; F = 8x; F = 8(2) \rightarrow F = 16 \text{ lb.}$$

46. Si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , y se sabe que  $y=2$  para  $x=3$ , expresar  $y$  como función de  $x$  y hallar el valor de  $y$  para  $x=4$ .

$$y = K/x; 2 = K/3 \rightarrow K = 6; y = 6/x; y = 6/4 \rightarrow y = 1,5$$

- \* 47. Si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , y para  $x=2$  es  $y=-4$ , expresar  $y$  como función de  $x$ , y hallar el valor de  $y$  para  $x=16$ .

$$y = K/x; -4 = K/2 \rightarrow K = -8; y = -8/x; y = -8/16 \rightarrow y = -0,5$$

49. Según la ley de Boyle, el volumen  $V$  que ocupa un gas a temperatura constante es inversamente proporcional a la presión  $p$  a que se halla sometido. Si  $V=100\text{cm}^3$  cuando  $p=20\text{kg por cm}^2$ , expresar  $V$  como función de  $p$  y hallar el valor de  $V$  cuando  $p=20\text{kg por cm}^2$ .  
 $V=K/p$  ;  $100=K/20$  ;  $K=2000\text{kg cm}^3$  ;  $V=2000/p$  ;  $V=2000/20 \rightarrow V=100\text{cm}^3$
50. El número  $N$  de vibraciones por segundo de una cuerda a tensión constante, es inversamente proporcional a la longitud  $l$  de la cuerda. Si una cuerda de 50 pulgadas de largo vibra 200 veces por segundo, expresar  $N$  en función de  $l$  y hallar el número de vibraciones por segundo de una cuerda análoga de 40 pulgadas de largo.  
 $N=K/l$  ;  $200=K/50 \rightarrow K=10000$  ;  $N=10000/l$  ;  $N=10000/40 \rightarrow N=250\text{ vib./s}$
51. Si  $y$  es proporcional al cuadrado de  $x$ , y sucede que para  $x=5$  es  $y=50$ , expresar  $y$  como función de  $x$ , y determinar el valor de  $y$  para  $x=3$ .  
 $y=Kx^2$  ;  $50=K(5)^2 \rightarrow K=2$  ;  $y=2x^2$  ;  $y=2(3)^2 \rightarrow y=18$
52. Si  $y$  es proporcional al cuadrado de  $x$ , y se tiene que  $y=0,8$  para  $x=2$ , expresar  $y$  como función de  $x$ , y averiguar qué valor toma  $y$  para  $x=10$ .  
 $y=Kx^2$  ;  $0,8=K(2)^2 \rightarrow K=0,2$  ;  $y=0,2x^2$  ;  $y=0,2(10)^2 \rightarrow y=20$
53. El área  $S$  de un cubo (hexaedro regular) es proporcional al cuadrado de la arista  $x$  del cubo. Si para  $x=2\text{cm}$  es  $S=24\text{cm}^2$ , expresar  $S$  como función de  $x$  y calcular  $S$  para  $x=3\text{cm}$ .  
 $S=Kx^2$  ;  $24=K(2)^2 \rightarrow K=6$  ;  $S=6x^2$  ;  $S=6(3)^2 \rightarrow S=54\text{cm}^2$
54. Cuando una bola rueda por un plano inclinado, la distancia  $d$  que recorre la bola es el tiempo  $t$  es proporcional al cuadrado del tiempo. Si para  $t=1,5\text{s}$  es  $d=18$  pies, expresar  $d$  en función del tiempo y hallar la distancia recorrida en 2 segundos.  
 $d=Kt^2$  ;  $18=K(1,5)^2 \rightarrow K=8$  ;  $d=8t^2$  ;  $d=8(2)^2 \rightarrow d=32\text{ pies}$
55. Cuando  $y=K/x^2$  se dice que  $y$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $x$ . Si para  $x=2$  es  $y=0,3$ , determinar  $K$  y hallar el valor de  $y$  para  $x=4$ .  
 $y=K/x^2$  ;  $0,3=K/2^2 \rightarrow K=1,2$  ;  $y=1,2/x^2$  ;  $y=1,2/4^2 \rightarrow y=0,075$
56. Si  $y$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $x$  y se tiene que  $y=0,1$  para  $x=10$ , expresar  $y$  en función de  $x$ . ¿Cuánto vale  $y$  cuando  $x=5$ ?  
 $y=K/x^2$  ;  $0,1=K/10^2 \rightarrow K=10$  ;  $y=10/x^2$  ;  $y=10/5^2 \rightarrow y=0,4$
57. La fuerza  $F$  con que se atrae dos imanes es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $d$  entre ellos. Si para  $d=4\text{cm}$  es  $F=0,4\text{g}$ , expresar  $F$  en función de  $d$  y hallar la fuerza con que se atraen cuando  $d=3\text{cm}$ .  
 $F=K/d^2$  ;  $0,4=K/4^2 \rightarrow K=6,4$  ;  $F=6,4/d^2$  ;  $F=6,4/(3)^2 \rightarrow F=0,71\text{ g}$
58. La resistencia eléctrica  $R$  de un alambre es inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro  $D$ . Un alambre de  $0,5\text{cm}$  de diámetro tiene una resistencia de  $3,2$  ohmios. ¿Cuál sería su resistencia si su diámetro se redujese a  $0,4\text{cm}$ ?  
 $R=K/D^2$  ;  $3,2=K/(0,5)^2 \rightarrow K=0,8$  ;  $R=0,8/D^2$  ;  $R=0,8/(0,4)^2 \rightarrow R=5\Omega$

58. Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$ , y para  $x=a$  es  $y=b$ , y para  $x=c$  es  $y=d$ , demostrar que:  $a/b = c/d$ .

$$y = Kx \quad 1^\circ b = K(a) \rightarrow K = b/a \quad ; \quad y = b/a x$$

$$2^\circ d = K(c) \rightarrow K = d/c \quad ; \quad y = d/c x$$

$$K = K \quad ; \quad b/a = d/c \rightarrow a/b = c/d \text{ propiedad de las proporciones}$$

\* 59. Si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , y para  $x=a$  es  $y=b$ , y para  $x=c$  es  $y=d$ , demostrar que  $a/b = d/c$ .

$$y = K/x \quad ; \quad 1^\circ b = K/a \rightarrow K = ab \quad 2^\circ d = K/c \rightarrow K = cd$$

$$K = K \text{ No es demostrable} \rightarrow ab = cd$$

Corrigiendo: Si  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , y para  $x=a$  es  $y=c$  y para  $x=b$  es  $y=d$  demostrar que  $a/b = c/d$   $1^\circ y = K/x \quad ; \quad c = K/a \rightarrow K = ac$

$$2^\circ d = K/b \rightarrow K = bd \quad K = K \quad ; \quad ac = bd \rightarrow a/b = d/c$$

60. Si  $z$  es inversamente proporcional a  $y$ , e  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , ¿cómo depende  $z$  de  $x$ ?

$$z = K/y \quad ; \quad y = K/x \quad K = yz \quad ; \quad K = yx \quad ; \quad yz = yx \rightarrow z = Kx$$

### Ejercicio 97

Escribir una fórmula que exprese la relación funcional que se indica en cada uno de los enunciados siguientes. Para evitar repeticiones sobrentenderemos que al hablar de proporcionalidad con respecto a una variable las otras siempre quedan fijas. Usese en el resultado  $K$  como constante de proporcionalidad, excepto en los problemas en que se pide determinar su valor.

1.  $F$  es directamente proporcional a  $L$  y a  $r$ .  $\rightarrow F = K L r$

2.  $R$  es directamente proporcional a  $M$  e inversamente proporcional a  $S$ .  $\rightarrow R = K \frac{M}{S}$

3.  $V$  es directamente proporcional a  $r^2$  y también directamente proporcional a  $h$ . Si para  $r=1$ ,  $h=2$  es  $V=2\pi$ , determinar  $K$ .

$$V = K r^2 h \quad ; \quad 2\pi = K(1)^2(2) \quad ; \quad K = \pi \rightarrow V = \pi r^2 h$$

\* 4.  $V$  es directamente proporcional a  $x$ , a  $y$ , y a  $z$ . Determinar  $K$  sabiendo que  $V=6$  para  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $z=3$ .

$$V = K x y z \quad ; \quad 6 = K(1)(2)(3) \rightarrow K = 1 \rightarrow V = x y z$$

5.  $F$  es directamente proporcional a  $p$  y a  $q$  e inversamente proporcional a  $r$ .

$$F = K \frac{p q}{r}$$

6.  $F$  es directamente proporcional a  $p$  y a  $q$  e inversamente proporcional al cuadrado de  $r$ .

$$F = K \frac{p q}{r^2}$$

7.  $u$  es directamente proporcional a  $x$  y al cubo de  $y$ .  $\rightarrow u = K x y^3$

8.  $R$  es directamente proporcional al cuadrado de  $u$  e inversamente proporcional a  $v$ .

$$R = K \frac{u^2}{v}$$



9.  $R$  es directamente proporcional a la raíz cuadrada de  $X$  e inversamente proporcional al producto  $YZ$ .  $\rightarrow R = K\sqrt{X}/YZ$
10.  $H$  es directamente proporcional al cuadrado de  $x$  e inversamente proporcional al cubo de  $r$ .  
 $H = Kx^2/r^3$
11. La potencia resolutive  $r$  de una lente \* es directamente proporcional a la longitud de onda  $L$  de la luz e inversamente proporcional al diámetro  $d$  de la lente.  
 $r = K L/d$
12. La resistencia  $R$  de un hilo eléctrico a temperatura constante es directamente proporcional a su longitud  $l$  e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro  $d$ .  
 $R = K l/d^2$
13. La fuerza  $F$  del viento sobre la vela de un barco, en ángulo recto con la dirección del viento, es directamente proporcional al área  $A$  de la superficie de la vela y al cuadrado de la velocidad  $v$  del viento.  
 $F = K A v^2$
14. El volumen  $V$  de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta  $T$  (temperatura centígrada  $+ 273^\circ$ ) e inversamente proporcional a la presión  $p$  a que se halla sometido.  
 $V = K T/p$
15. La presión  $p$  de un gas a volumen constante es proporcional a su densidad  $D$  y a su temperatura absoluta  $T$ .  $\rightarrow p = K D T$
16. La potencia  $H$  que un eje puede transmitir es directamente proporcional a la velocidad  $v$  de rotación del eje y al cubo de su diámetro  $d$ .  $\rightarrow H = K v d^3$
17. La presión total  $P$  del agua sobre el fondo de un tanque es directamente proporcional al área  $A$  del fondo y a la profundidad  $h$  del agua. Cuando el fondo tiene 1 pie cuadrado y la profundidad es de 1 pie, la presión es de 62,4 libras. Hallar la presión sobre el fondo de un tanque lleno de agua que tiene 10 pies<sup>2</sup> de fondo y 6 pies de altura.  
 $P = K A h$ ;  $62,4 = K(1)(1) \rightarrow K = 62,4 \text{ lb/pies}^3$   
 $P = 62,4 A h$ ;  $P = 62,4(10)(6) \rightarrow P = 3744 \text{ lb}$
- \* 18. La cantidad de iluminación  $I$  que se recibe de una luz es directamente proporcional al número de bujías  $c$  e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $d$  entre la luz y la superficie iluminada.  $\rightarrow I = K W/d^2$
19. La fuerza  $F$  que se necesita para mantener el movimiento circular de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad  $v$  e inversamente proporcional al radio  $r$  de la trayectoria. Si la fuerza es 81 cuando  $v = 6$  y  $r = 4$ , hallar la fuerza cuando  $v = 10$  y  $r = 3$ .  
 $F = K v^2/r$ ;  $81 = K(6)^2/4 \rightarrow K = 9$  ;  $F = 9 v^2/r$ ;  $F = 9(10)^2/3 \rightarrow F = 300$
20. El peso máximo  $P$  que puede soportar una viga suspendida por ambos extremos es directamente proporcional a su anchura  $a$  y al cuadrado de su altura  $b$ , e inversamente proporcional a la distancia  $L$  entre los puntos de apoyo.  
 $P = K a b^2/L$   
 Estudiar la proporcionalidad en las siguientes fórmulas expresando en lenguaje

ordinario el tipo de variación correspondiente:

$$21. i = \frac{crt}{100}$$

$$22. p = \frac{KT}{V}; \text{ La presión } P \text{ es directamente proporcional a la temperatura } T \text{ e inversamente proporcional al volumen } V.$$

$$23. S = \pi r g; \text{ } S \text{ es directamente proporcional al producto de } r \text{ y } g \text{ siendo } K = \pi.$$

$$24. H = K \frac{V}{T}; \text{ } H \text{ es directamente proporcional a } V \text{ e inversamente proporcional a } T.$$

$$25. A = \pi ab; \text{ } A \text{ es directamente proporcional al producto } ab \text{ si } K = \pi$$

$$26. V = K \frac{WT}{P}; \text{ } V \text{ es directamente proporcional al producto de } W \text{ y } T \text{ e inversamente proporcional a } p.$$

$$27. V = \frac{1}{3} Bh; \text{ } V \text{ es directamente proporcional al producto de } B \text{ y } h \text{ si } K = \frac{1}{3}$$

$$28. A = 2\pi r(h+r); \text{ No hay proporcionalidad con respecto a cada uno de los términos. Lo único que se puede decir en este caso es que:}$$

Si  $h+r$  se mantiene constante, entonces  $A$  es directamente proporcional a  $r$ ; y que si  $r$  se mantiene constante  $A$  es directamente proporcional a la suma  $h+r$  donde  $K=2\pi$ .

$$29. x = \frac{Kv^2}{t}; \text{ } x \text{ es directamente proporcional al cuadrado de } v \text{ e inversamente proporcional a } t.$$

$$30. a = \frac{KA}{r^3}; \text{ } a \text{ es directamente proporcional a } A \text{ e inversamente proporcional al cubo de } r.$$

$$31. S = \pi(R+r)g; \text{ No hay proporcionalidad con respecto a cada uno de los términos}$$

Si  $R+r$  es cte  $\rightarrow S$  es directamente proporcional a  $g$

Si  $g$  es cte  $\rightarrow S$  es directamente proporcional a la suma de  $R+r$  donde  $K = \pi$

$$32. P = Kv^3A; \text{ } P \text{ es directamente proporcional al producto } v^3A$$

$$33. E = K \frac{N\theta}{t^2}; \text{ } E \text{ es directamente proporcional al producto } N\theta \text{ e inversamente proporcional al cuadrado de } t.$$

$$34. D = \frac{KL^4}{bd^3}; \text{ } D \text{ es directamente proporcional a } L^4 \text{ e inversamente proporcional al producto } bd^3.$$

$$35. P = KR I^2; \text{ } P \text{ es directamente proporcional al producto } R I^2$$

$$36. T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}; \text{ El cuadrado de } T \text{ es directamente proporcional a } l \text{ e inversamente proporcional a } g \text{ si } K = 4\pi^2$$

$$37. P = K\sqrt{xy}; \text{ } P \text{ es directamente proporcional a la raíz cuadrada del producto } xy.$$

$$38. Q = K \frac{ab l^3}{c}; \text{ } Q \text{ es directamente proporcional al producto } ab l^3 \text{ e inversamente proporcional a } c.$$

$$39. Y = \frac{uVW}{u+v+w}; \text{ No hay proporcionalidad en cada uno de los términos pero se puede decir:}$$

Si  $u+v+w$  se mantiene constante entonces:

$Y$  es directamente proporcional al producto  $uVW$

si  $uvw$  se mantiene cte  $V$  es inversamente proporcional a la suma  $u + v + w$   
 20.  $D = -\frac{Wf^4}{8EI}$ ;  $D$  es directamente proporcional al producto  $Wf^4$  e inversamente  
 proporcional al producto  $EI$ .

### Ejercicio 98

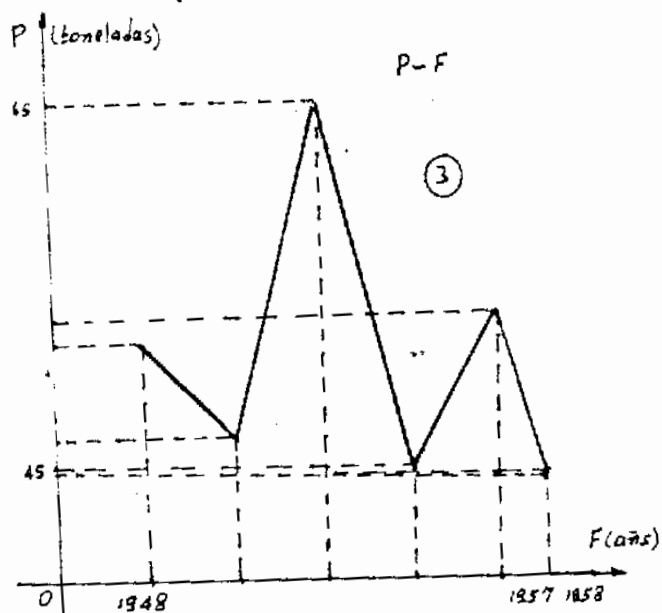
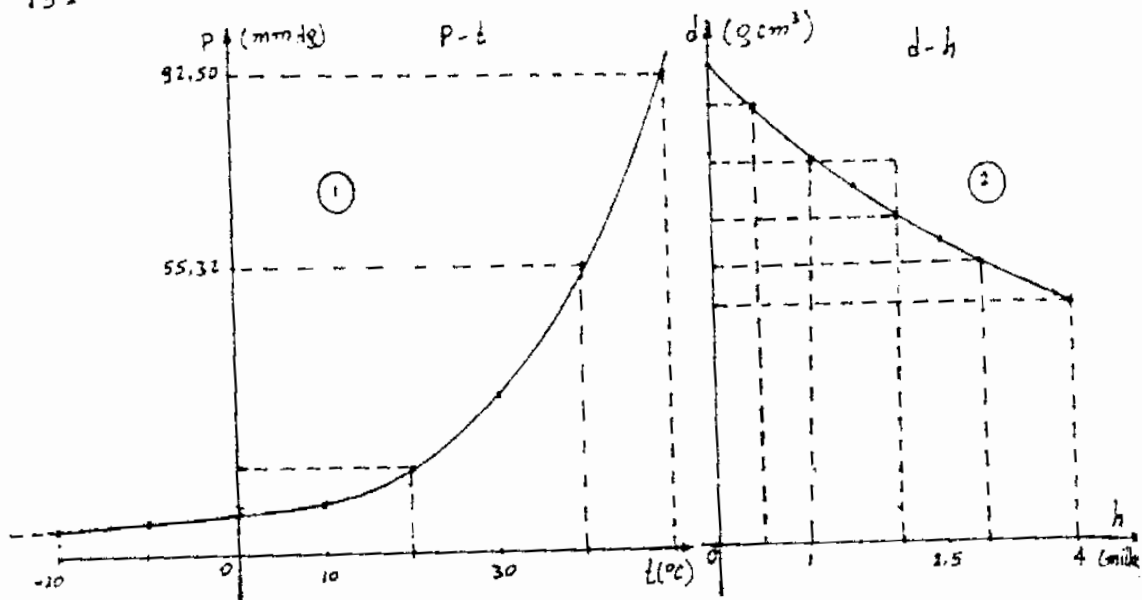
Para cada uno de los siguientes ejemplos escoger escalas convenientes y representar los datos que se proporcionan en las respectivas tablas. Unir los puntos obtenidos mediante una curva continua o poligonal de trazos (según que las magnitudes representadas sean continuas o discontinuas). Utilícese el eje horizontal para representar los datos que se dan en la primera columna de cada tabla. Cada eje debe tener un letrero explicativo y el gráfico debe llevar un título apropiado.

- La tabla 1 da la presión  $P$ , en milímetros de mercurio, del vapor de agua saturado a varias temperaturas  $t$  en grados centígrados. ¿Cuál será aproximadamente la presión a  $15^\circ\text{C}$ ?

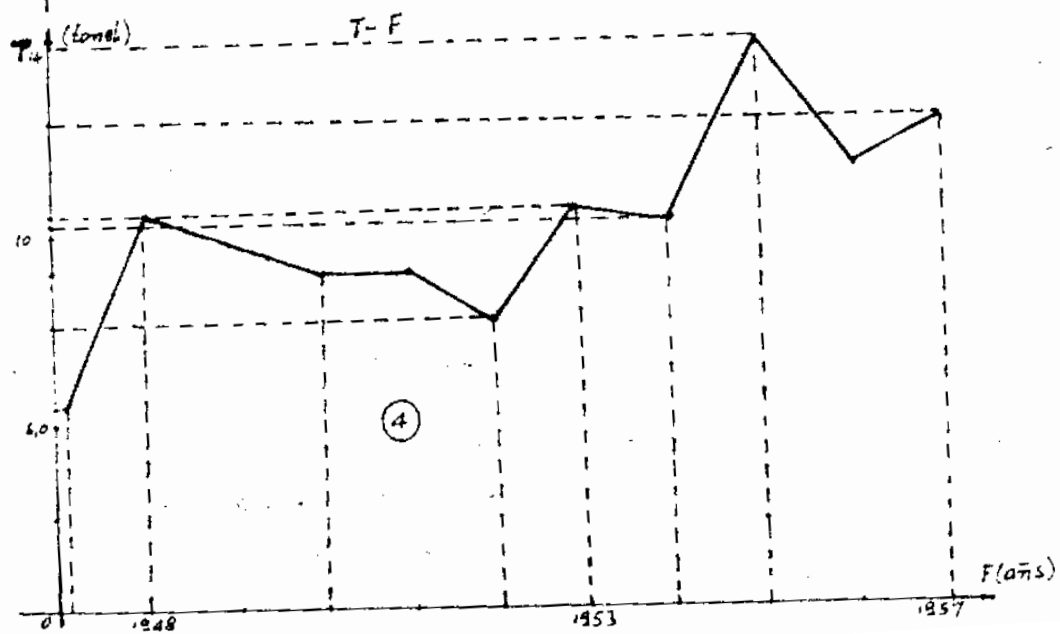
TABLA 1		TABLA 2		TABLA 3		TABLA 4		TABLA 5	
$t$	$P$	$h$	$d$	$F$	$P$	$F$	$T$	$D$	$M$
-20	0,78	0	,00122	1948	53,6	1938	6,63	0,25	0,21
-10	1,95	0,5	,00112	1950	48,4	1948	10,48	0,50	1,03
0	4,58	1	,00104	1952	65,2	1950	9,35	0,75	2,10
10	9,21	1,5	,00095	1954	46,8	1951	9,35	1,00	3,60
20	17,54	2,0	,00088	1956	54,4	1952	8,21	1,25	5,25
30	31,82	2,5	,00080	1957	46,2	1953	10,39	1,50	7,50
40	55,32	3,0	,00074			1954	10,21	1,75	10,25
50	92,50	3,5	,00067			1955	13,58	2,00	13,50
		4,0	,00061			1957	12,35		

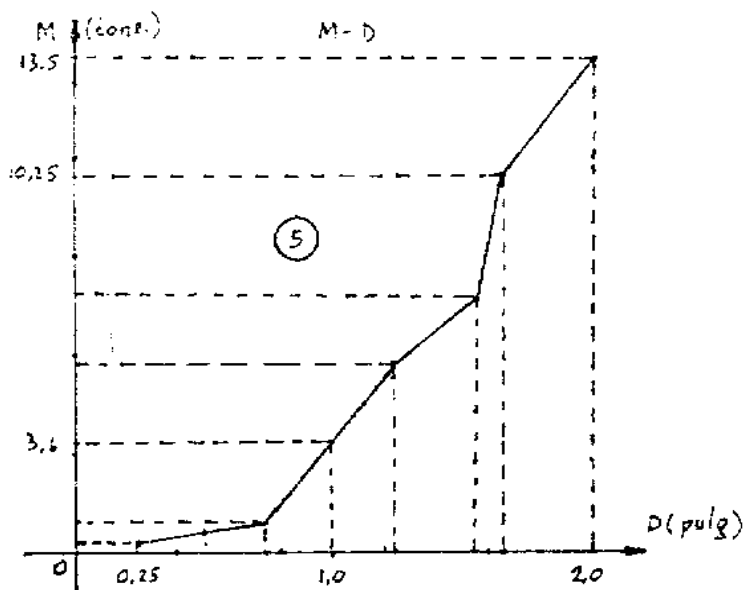
- La tabla 2 presenta la relación entre la altura  $h$  en millas sobre el nivel del mar y la densidad  $d$  de la atmósfera en gramos por  $\text{cm}^3$ .
- La tabla 3 presenta en distintas fechas la producción  $P$  de trigo en América, en millones de toneladas.
- En la tabla 4 se da en distintas fechas la producción total  $T$  de camiones y automóviles en el mundo, en millones de unidades.
- En la tabla 5 se dan los pesos máximos,  $M$ , en toneladas que puede soportar sin romperse una soga de diámetro  $D$  (en pulgadas). ¿Qué diámetro aproximado habrá de tener la soga para aguantar 4 toneladas?

→ Gráficos



Escala:

 $F: 1\text{cm} \equiv 1948\text{ años}$  $P: 1\text{cm} \equiv 13.04\text{ tonel.}$ 



Escala:

D: 1 cm  $\equiv$  0.4 pulg.

M: 1 cm  $\equiv$  2.7 cont.

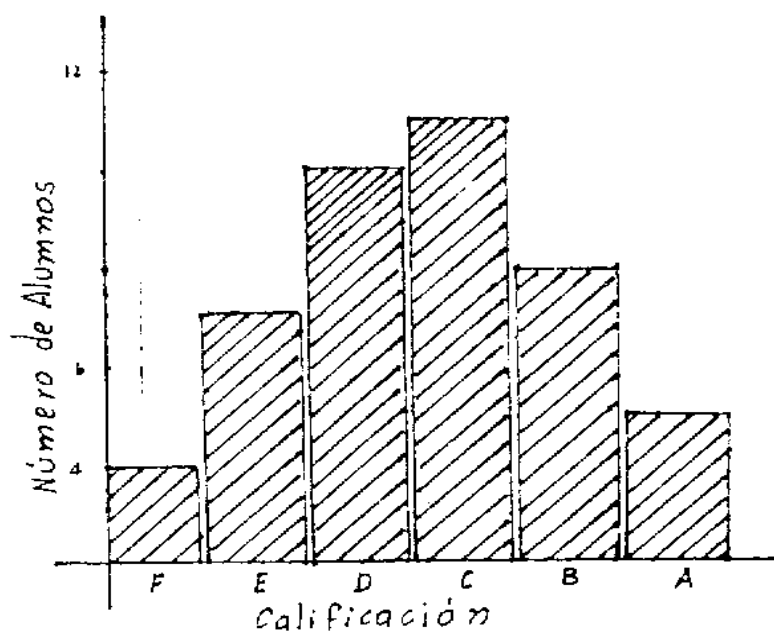
### Ejercicio 99

Construir un gráfico de barras en cada uno de los siguientes casos:

- En un examen Final de Historia la distribución de los alumnos según la calificación obtenida fue la siguiente:

Calificación	A	B	C	D	E	F
Número de alumnos	5	8	11	10	7	4

La calificación A equivale a sobresaliente (de 90 a 100), B equivale a notable (de 80 a 89.9) etc.



F (40-49)

E (50-59)

D (60-69)

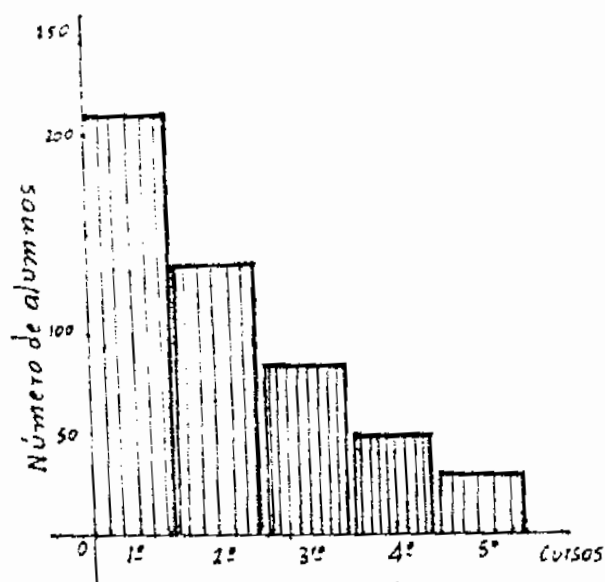
C (70-79)

B (80-89)

A (90-100)

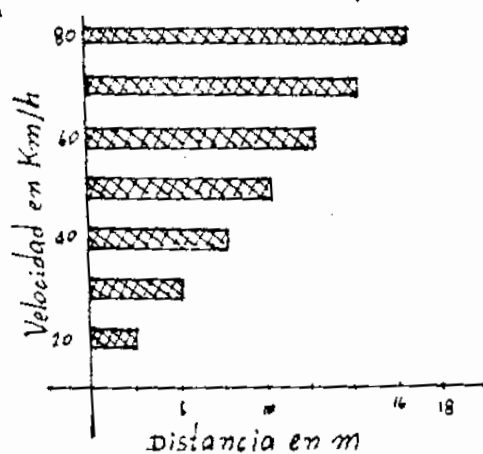
- En un instituto de segunda enseñanza la distribución de Alumnos por cursos es la siguiente:

Cursos	1º	2º	3º	4º	5º
Número de alumnos	210	140	90	50	36



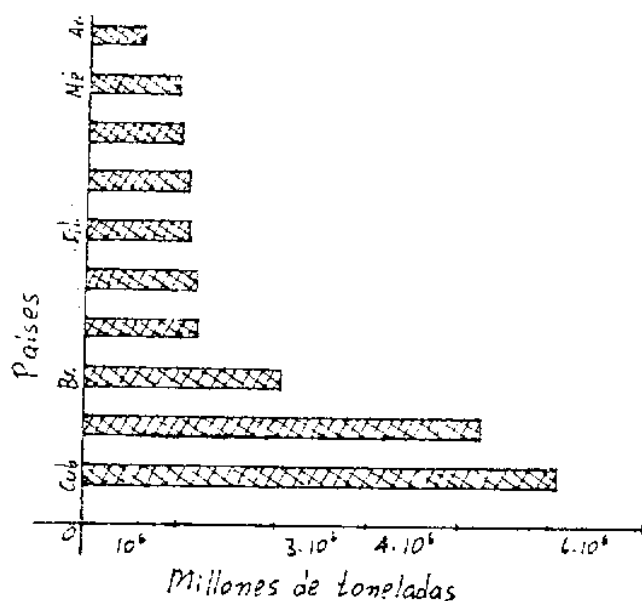
3. Distancias que a distintas velocidades, recorre un automóvil durante el "tiempo de reacción", esto es, durante el tiempo que transcurre entre el momento en que se ve un peligro y el momento en que se aplican los frenos.

Velocidad (en Km/h)	20	30	40	50	60	70	80
Distancia (en metros)	4,16	6,25	8,33	10,4	12,5	14,6	16,6

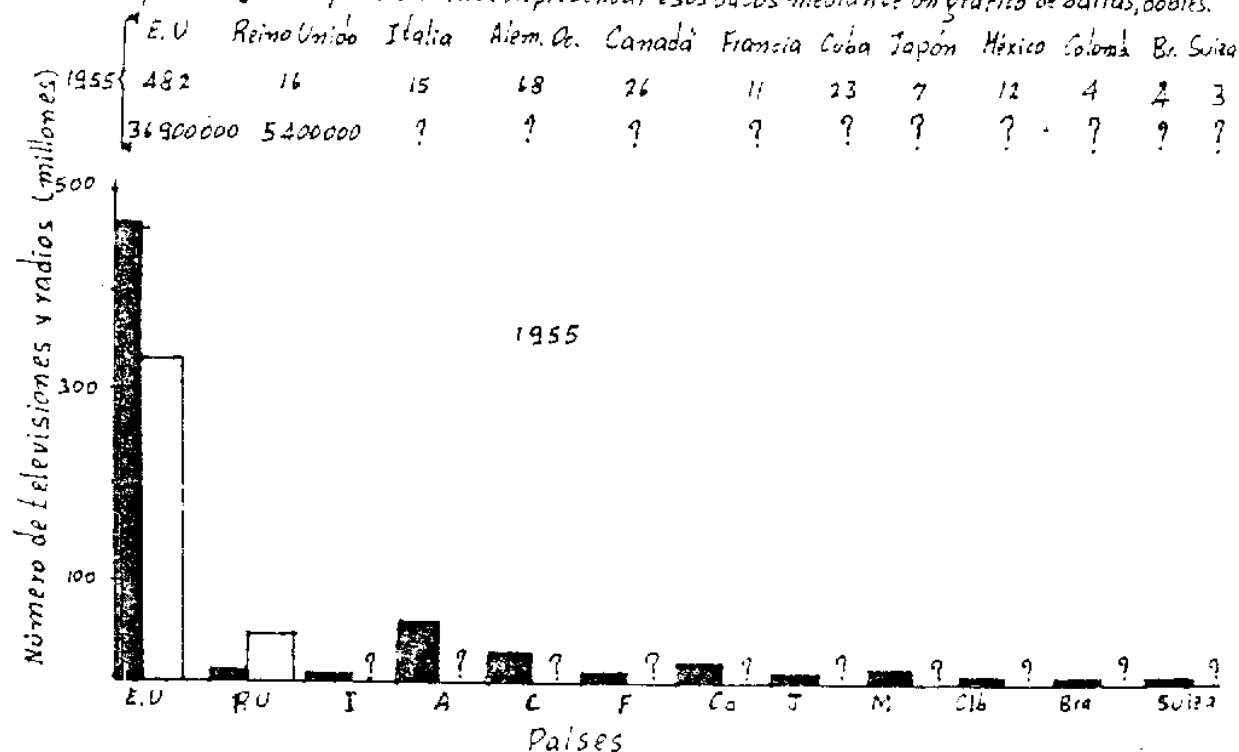


4. Producción de azúcar de caña, por principales países, en 1956, en toneladas:

Cuba	5 200 000	Filipinas	1 100 000
India	4 400 000	Puerto Rico	1 060 000
Brasil	2 100 000	Hawai	1 035 000
Australia	1 350 000	México	1 000 000
Pakistán	1 300 000	Argentina	750 000
Total mundial			25 000 000



5. La tabla siguiente de la cantidad de estaciones de televisión y la de receptores que hay en uso en los países indicados, según estimación de las Naciones Unidas para esos años. La interrogación indica que no hay cifra para ese año. Representar esos datos mediante un gráfico de barras dobles.



### Ejercicio 100

Construir un gráfico circular para cada uno de los siguientes casos:

1. Durante el mes de septiembre el Observatorio Nacional registró 10 días de lluvia, 8 días nublados y 12 días de buen tiempo con cielo despejado.

1 mes = 30 días

$$10 \text{ días de lluvia } \frac{10}{30} \times 100 = 33,3\% \rightarrow 33,3 \times 3,6 = 119,88^\circ$$

$$8 \text{ días Nublados } \frac{8}{30} \times 100 = 26,7\% \rightarrow 26,7 \times 3,6 = 96,12^\circ$$

$$12 \text{ días buen tiempo } \frac{12}{30} \times 100 = \frac{40\%}{100\%} \rightarrow 40 \cdot 3,6 = \frac{144}{360^\circ}$$

2. Una Familia con ingresos de 10 000 \$ distribuye su presupuesto en la forma siguiente:

Aquiler	Comida	Ropa	Otros gastos	Viajes	Imprevistos	Ahorros
1800\$	2500\$	2000\$	1500\$	600\$	600\$	1000\$

$$\text{alquiler } 1800/10000 \times 100 = 18\% \rightarrow 18 \cdot 3,6 = 64,8^\circ$$

$$\text{comida } 2500/10000 \times 100 = 25\% \rightarrow 25 \cdot 3,6 = 90^\circ$$

$$\text{Ropa } 2000/10000 \times 100 = 20\% \rightarrow 20 \cdot 3,6 = 72^\circ$$

$$\text{otros gastos } 1500/10000 \times 100 = 15\% \rightarrow 15 \cdot 3,6 = 54^\circ$$

$$\text{Viajes } 600/10000 \times 100 = 6\% \rightarrow 6 \cdot 3,6 = 21,6^\circ$$

$$\text{Imprevistos } 600/10000 \times 100 = 6\% \rightarrow 6 \cdot 3,6 = 21,6^\circ$$

$$\text{Ahorros } 1000/10000 \times 100 = 10\% \rightarrow 10 \cdot 3,6 = 36^\circ$$

3. Un estudiante distribuye su tiempo según el horario siguiente:

Instituto	Comidas	Transporte	Deportes	Estudio	Descanso	Total
6 horas	2 h.	1 h.	2 $\frac{1}{2}$ h.	3 h.	9 $\frac{1}{2}$ h	24 horas

$$\text{Instituto } 6/24 \times 100 = 25\% ; 25 \cdot 3,6 = 90^\circ$$

$$\text{Comida } 2/24 \times 100 = 8,33\% ; 8,33 \cdot 3,6 = 30^\circ$$

$$\text{Transporte } 1/24 \times 100 = 4\% ; 4 \cdot 3,6 = 14^\circ$$

$$\text{Deportes } 5/48 \times 100 = 10,4\% ; 10,4 \cdot 3,6 = 37,4^\circ$$

$$\text{Estudio } 3/24 \times 100 = 12,5\% ; 12,5 \cdot 3,6 = 45^\circ$$

$$\text{descanso } 9/48 \times 100 = 40\% ; 40 \cdot 3,6 = 144^\circ$$

4. Cuando se paga 15\$ por cierto objeto se puede calcular que esta cantidad se distribuye como sigue:

Materia prima	ManuFactura	Gastos del dept. de ventas	Ganancia líquida
6,0\$	3\$	4,50\$	1,50\$

$$\text{Materia prima } 6/15 \cdot 100 = 40\% ; 40 \cdot 3,6 = 144^\circ$$

$$\text{ManuFactura } 3/15 \cdot 100 = 20\% ; 20 \cdot 3,6 = 72^\circ$$

$$\text{Gastos } 4,5/15 \cdot 100 = 30\% ; 30 \cdot 3,6 = 108^\circ$$

$$\text{Ganancia } 1,5/15 \cdot 100 = 10\% ; 10 \cdot 3,6 = 36^\circ$$

5. Principales Flotas mercantes, por la cantidad de buques que poseen los siguientes países:

Comunidad Británica	7400	Japón	1600	Rusia	1100
Estados Unidos	4000	Holanda	1600	Suecia	1100
Noruega	1900	España	1200		
Alemania	1800	Francia	1100		
				Total:	22 800 buques



Británica	$7400/22800 \times 360 = 116,8^\circ$	Holanda	$1600/22800 \times 360 = 25,3^\circ$
E.U.	$4000/22800 \times 360 = 63,2^\circ$	España	$1200/22800 \times 360 = 19^\circ$
Noruega	$1900/22800 \times 360 = 30^\circ$	Francia	$1100/22800 \times 360 = 17^\circ$
Alemania	$1800/22800 \times 360 = 28,4^\circ$	Rusia	$17^\circ$
Japón	$1600/22800 \times 360 = 25,3^\circ$	Suecia	$17^\circ$

6. Distribución de la población de los continentes, por millones de habitantes:

Asia	Europa	Norteamérica	África	Sudamérica	Oceanía	Total
1540	560	240	220	130	16	2706 mili.

Asia	$1540/2706 \times 360 = 204,8^\circ$	África	$220/2706 \times 360 = 29,3^\circ$
Europa	$560/2706 \times 360 = 74,5^\circ$	Sudamérica	$130/2706 \times 360 = 17,3^\circ$
Norteamérica	$240/2706 \times 360 = 32^\circ$	Oceanía	$16/2706 \times 360 = 2,1^\circ$

7. Hacer dos gráficos, uno de importaciones y otro de exportaciones del Canadá en su comercio con los países iberoamericanos, de acuerdo con los siguientes datos que expresan el porcentaje de cada una de estas operaciones:

PAÍS	Argentina	Brasil	Cuba	México	Venezuela	Imp. Total en % 2,55
IMPORTACIONES	0,59	0,68	0,36	0,36	0,56	
EXPORTACIONES	0,45	0,48	—	0,32	—	

Importaciones:

A.	$0,59/2,55 \times 360 = 83,3^\circ$
B.	$0,68/2,55 \times 360 = 96^\circ$
C.	$0,36/2,55 \times 360 = 50,8^\circ$
M.	$0,36/2,55 \times 360 = 50,8^\circ$
V.	$0,56/2,55 \times 360 = 79,1^\circ$

Exportaciones Total 1,25%

A.	$0,45/1,25 \times 360 = 129,6^\circ$
B.	$0,48/1,25 \times 360 = 138,24^\circ$
C.	—
M.	$0,32/1,25 \times 360 = 92,16^\circ$
V.	—

8. Distribución de la población cubana por razas, según el censo de 1953:

Blanca	4 243 996	Mestiza	843 105	Total	5 829 069
Negra	725 311	Amarilla	16 657		

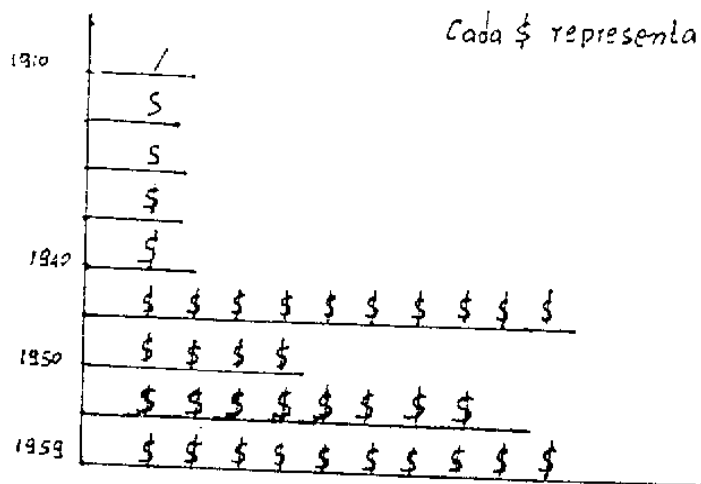
Blanca	$4 243 996/5 829 069 \times 360 = 262,1^\circ$
Negra	$725 311/5 829 069 \times 360 = 44,8^\circ$
Mestiza	$843 105/5 829 069 \times 360 = 52,1^\circ$
Amarilla	$16 657/5 829 069 \times 360 = 1,0^\circ$

### Ejercicio 101

1. Utilizando el signo de peso \$ para representar mil millones de dólares, construir un gráfico pictórico de los gastos del gobierno de los Estados Unidos, de acuerdo con los datos siguientes.

	1910	1922	1930	1935	1940	1945	1950	1955	1959
millones	700	3800	4000	7400	9200	98700	40200	75600	97100

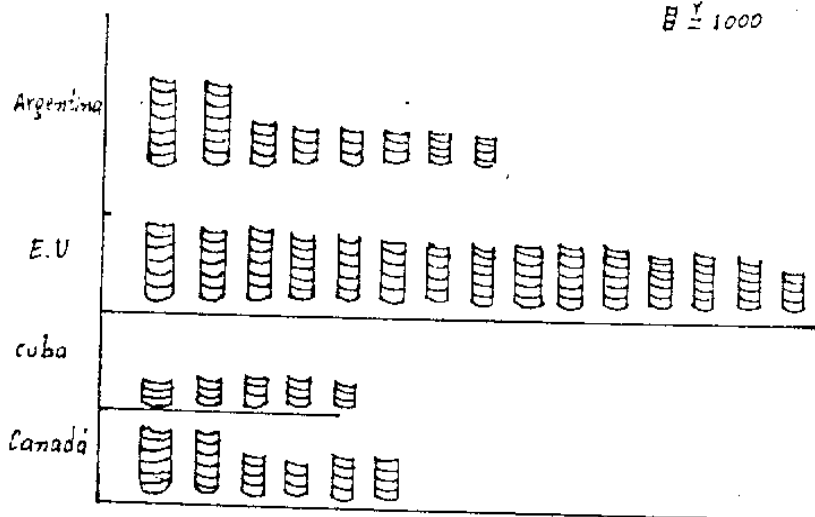
Cada \$ representa 10 mil millones de dólares



2. Representando con el dibujo de un libro cada millar, y otro de menor tamaño cada centena realizar un gráfico de la publicación de obras habida en 1957 en los siguientes países:

Canadá 2400 Cuba 450 E.U. 13140 Argentina 2600

$1 \text{ libro} = 1000$



### Ejercicio 102 (REPASO)

1. La base de un rectángulo es el doble de la altura. Si la altura tiene  $x$  metros, expresar el área  $A$  en función de  $x$ .

$$A = 2x^2$$

2. La altura de un cilindro es dos veces el diámetro de la base. Expresar el volumen del cilindro en función del radio  $r$  de la base.



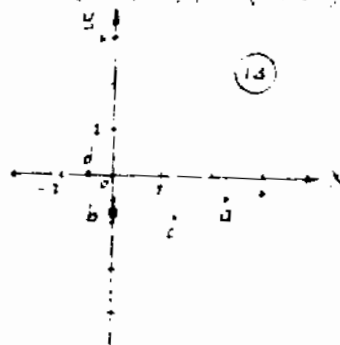
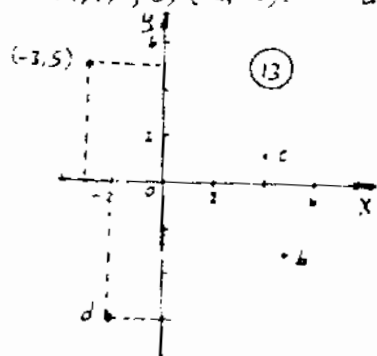
$$h = 4r; D = 2r$$

$$V = \pi r^2 h$$

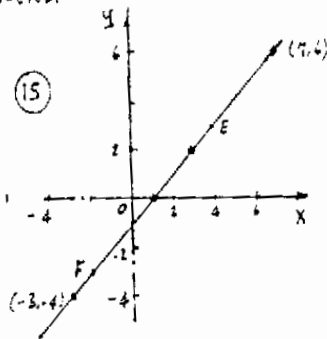
$$V = \pi (2r)^2 (4r)$$

$$V = 16\pi r^3$$

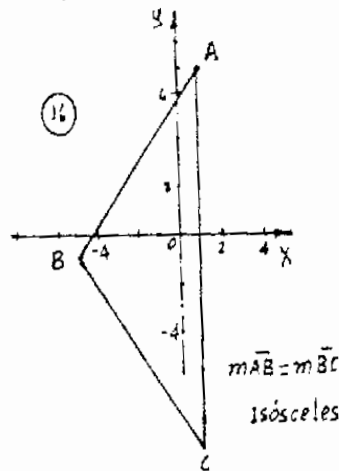
3. Si el trabajo de linotipo cuesta 80 pesos e imprimir cada ejemplar de un folio cuesta 8 centavos, expresar en pesos el costo total  $C$  de  $x$  ejemplares.  
 Costo = Valor de linotipo +  $c \times$  ejemplar  $\rightarrow C = 80 + 0,08x$
4. En cierto país la carrera de un taxímetro cuesta 30 centavos el primer kilómetro y después 20 centavos por cada kilómetro adicional. Expresar en centavos el costo  $C$  del viaje en función del número  $x$  de kilómetros recorridos.  
 El 1º Km. es 30 ; El 2º Km. en 20 ; El 3º en 20 ; El  $x-1$  en 20  $\rightarrow$   
 $C = 30 + 20(x-1)$  ;  $C = 30 + 20x - 20 \rightarrow C = 10 + 20x$
5. Se tiene una pieza de cartón rectangular de 30cm de largo por 20cm de ancho. De cada esquina se corta un cuadrado de  $x$ cm de lado y se dobla el cartón para formar una caja de  $x$ cm de altura. Expresar el volumen de la caja en función de  $x$ .  
 $V = Ah$  ;  $V = (30-2x)(20-2x)x \rightarrow V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$
6. Dado  $f(x) = 5x - 3$  hallar:  
 a.-  $f(4) = 5(4) - 3 = 17$       b.-  $f(-2) = 5(-2) - 3 = -13$       c.-  $f(0) = 5(0) - 3 = -3$
7. Dado  $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ , hallar:  
 a.-  $f(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) - 1 = -2$       b.-  $f(0) = 2(0)^2 + 3(0) - 1 = -1$       c.-  $f(2) = 2(2)^2 + 3(2) - 1 = 13$
8. Dado  $f(x) = x/(x-2)$ , hallar:  
 a.-  $f(3) = 3/(3-2) = 3$       b.-  $f(-2) = -2/(-2-2) = -0,5$       c.-  $f(a) = a/(a-2)$
9. Dado  $f(x) = ax + 3$ , hallar  $a$  si  $f(2) = 7$ .  $\rightarrow 7 = 2a + 3$  ;  $a = 2$
10. Dada la ecuación  $3x - y = 2$ , expresar:  
 a.-  $y$  en función de  $x$  ;  $3x - y = 2$  ;  $-y = 2 - 3x \rightarrow y = 3x - 2$   
 b.-  $x$  en función de  $y$  ;  $3x = 2 + y$  ;  $x = y/3 + 2/3 \rightarrow x = (y+2)/3$
11. Dada la ecuación  $xy + 2 = 0$ , expresar:  
 a.-  $y$  en función de  $x$  ;  $xy + 2 = 0$  ;  $xy = -2 \rightarrow y = -2/x$   
 b.-  $x$  en función de  $y$  ;  $xy = -2 \rightarrow x = -2/y$
12. Dada la ecuación  $xy + x - y - 3 = 0$ , expresar:  
 a.-  $y$  en función de  $x$  ;  $xy - y = 3 - x$  ;  $y(x-1) = 3-x \rightarrow y = (3-x)/(x-1)$   
 b.-  $x$  en función de  $y$  ;  $x(y+1) = y+3 \rightarrow x = (y+3)/(y+1)$
13. Dibuja ejes de coordenadas y marca los siguientes puntos: a)  $(-3, 5)$  ; b)  $(5, -3)$  ; c)  $(4, 1)$  ; d)  $(-2, -6)$  ; e)  $(4, 5, -1)$  ; f)  $(0, -1, 5)$  ; g)  $(2, 4, -5)$  ; h)  $(-1, 5, 0)$



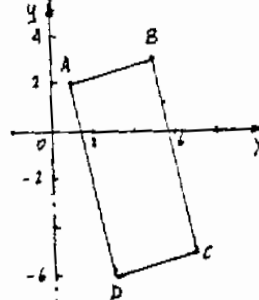
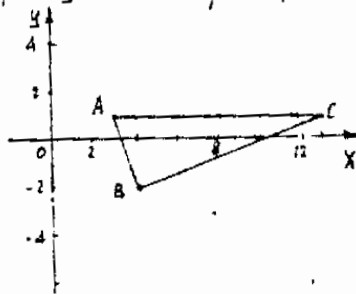
15. Comprobar que los siguientes puntos están sobre una misma recta:  $(-3, -4)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(7, 6)$ . Hallar gráficamente las coordenadas de otros dos puntos de esta recta.
16. Comprobar gráficamente que los puntos  $A(1, 7)$ ,  $B(-5, -1)$  y  $C(1, -9)$  son vértices de un triángulo isósceles.



gráficamente se encuentran  $E(4, 3)$ ,  $F(-2, -3)$



17. Comprobar gráficamente que los puntos  $A(3, 1)$ ,  $B(4, -2)$ ,  $C(13, 1)$  son vértices de un  $\Delta$  rectángulo.
18. Comprobar gráficamente que los puntos  $A(1, 2)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(7, -5)$ ,  $D(3, -6)$  son vértices de un paralelogramo.

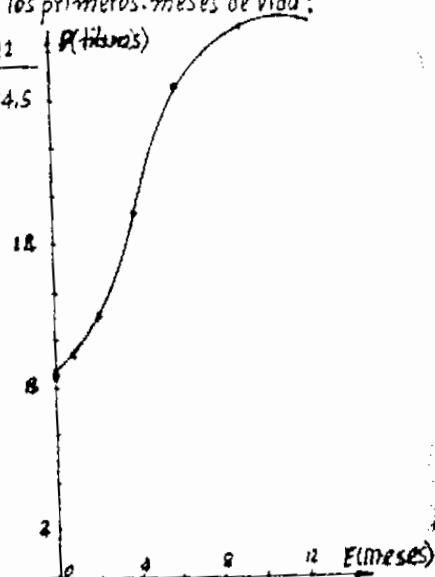
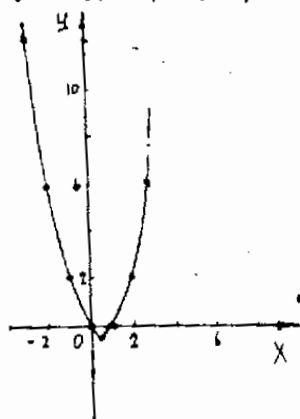


19. Construir el gráfico de la función dada por la tabla de valores siguientes:

X	-3	-2	-1	0	.5	1	2	3
Y	12	6	2	0	-15	0	2	6

20. La siguiente tabla da los pesos de una criatura durante los primeros meses de vida:

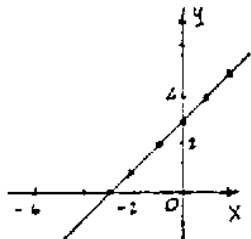
Edad (meses)	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Peso (libras)	8.5	9.3	11	13.2	15.5	18.5	20.4	23	24	24.5



Construir el gráfico de las funciones siguientes:

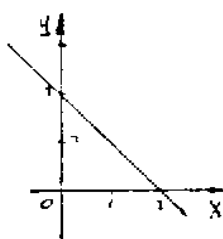
21.  $y = x + 3$

x	0	1	2	-1	-2	-3
y	3	4	5	2	1	0



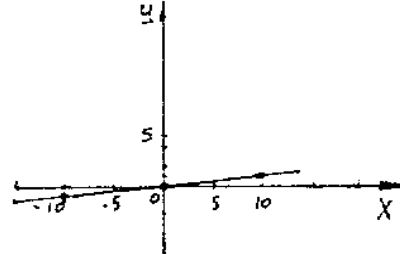
22.  $y = -x + 2$

x	0	2
y	2	0



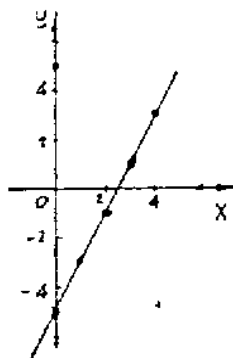
23.  $y = 0,1x$

x	0	10	-10
y	0	1	-1



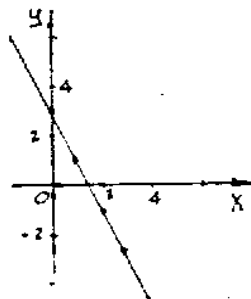
24.  $y = 2x - 5$

x	0	1	2	3	4
y	-5	-3	-1	1	3



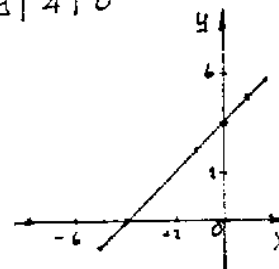
25.  $y = -2x + 3$

x	0	1	2	3
y	3	1	-1	-3



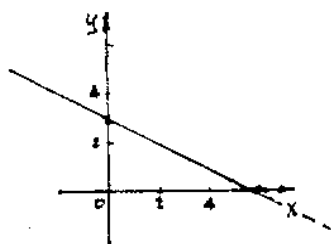
26.  $x = y - 4$

x	0	-4
y	4	0



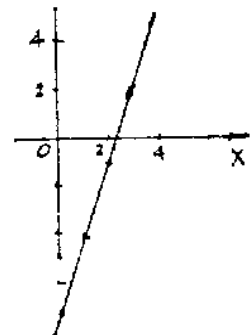
27.  $x + 2y = 6$

x	0	6
y	3	0



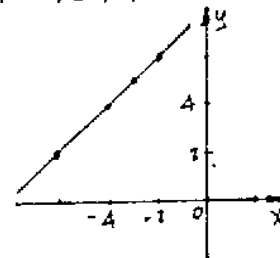
28.  $3x - y = 7$

x	0	1	2	3
y	-7	-4	-1	2



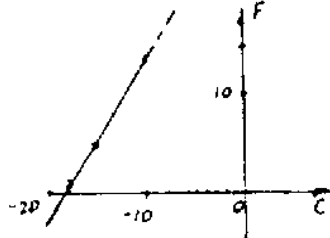
29.  $y - x = 8 \rightarrow y = x + 8$

x	-2	-3	-4	-5	-6
y	6	5	4	3	2



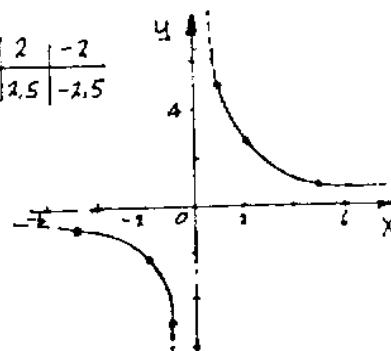
30.  $F = 9/5C + 32$

C	-10	-15	-18
F	14	5	0,4



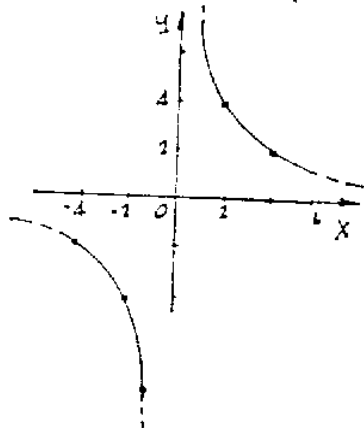
31.  $y = 5/x$

x	1	-1	5	-5	2	-2
y	5	-5	1	-1	2,5	-2,5



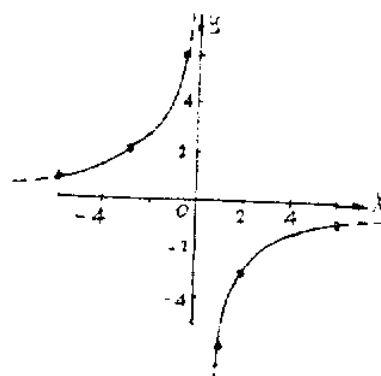
32.  $y = 8/x$

x	1	-1	2	-2	4	-4
y	8	-8	4	-4	2	-2



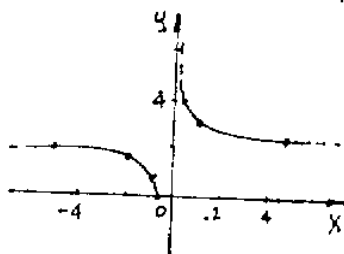
33.  $y = -6/x$

x	1	2	3	6	-1	-2	-3
y	-6	-3	-2	-1	6	3	2



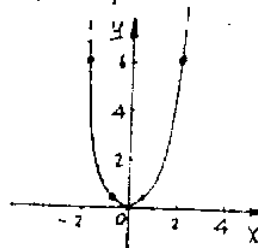
34.  $y = 1/x + 2$

x	1	-1	2	-2	5	-5	0.5	-0.5
y	3	1	2.5	1.5	2.2	1.8	4	0



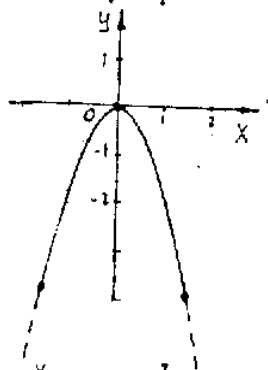
35.  $y = 3x^2$

x	0	±1	±1.5	±0.5
y	0	3	6.75	0.75



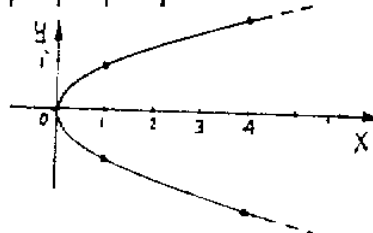
36.  $y = -2x^2$

x	0	±1	±2
y	0	-2	-8



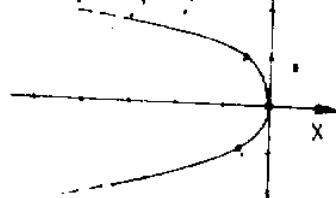
37.  $x = y^2$

y	0	±1	±2	±3
x	0	1	4	9



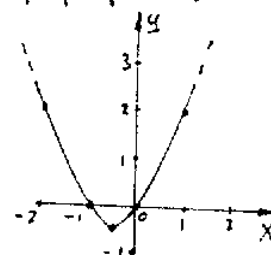
38.  $x = -0.5y^2$

x	0	-0.5	-2	-4.5
y	0	±1	±2	±3



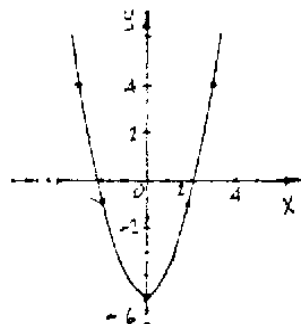
39.  $y = x^2 + x$

x	0	1	-1	2	-2	-0.5	-3
y	0	2	0	6	2	-0.5	6



40.  $y = x^2 - 5$

x	y
0	-5
±1	-4
±2	-1
±3	4



41. Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$  y para  $x=3$  es  $y=1$ , expresar  $y$  como función de  $x$ . Hallar el valor de  $y$  para  $x=12$ .

$$y = Kx ; 1 = K(3) \rightarrow K = 1/3 ; y = 1/3x ; y = 12/3 ; y = 4$$

42. Si  $y$  es directamente proporcional a  $x$  y para  $x=4$  es  $y=6$ , expresar  $y$  como función de  $x$ . Hallar el valor de  $y$  para  $x=-3$ .  $y = Kx$

$$6 = K(4) \rightarrow K = 3/2 ; y = 3/2x ; y = 1.5x ; y = 3/2(-3) ; y = -9/2 \rightarrow y = -4.5$$

43. La fuerza  $F$  necesaria para estirar un muelle es proporcional al estiramiento  $x$ . Para  $x=2\text{cm}$  se necesita  $F=5\text{lb}$ . Expresar  $F$  en función de  $x$  y hallar el valor de  $F$  cuando  $x=3\text{cm}$ .

$$F = Kx ; 5 = K(2) \rightarrow K = 5/2 ; F = 2.5x ; F = 2.5(3) \rightarrow F = 7.5\text{lb.}$$

44.  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ . Para  $x=20$  es  $y=5$ . Expresar  $y$  en función  $x$ . Determinar el valor de  $y$  cuando  $x=4$ .

$$y = K/x ; 5 = K/20 ; K = 100 ; y = 100/x ; y = 100/4 \rightarrow y = 25$$

45.  $u$  es inversamente proporcional a  $z$ . Para  $z=4.5$  es  $u=-10$ . Expresar  $u$  en función de  $z$ . Hallar  $u$  para  $z=9$ .

$$u = K/z ; -10 = K/4.5 \rightarrow K = -45 ; u = -45/z ; u = -45/9 \rightarrow u = -5$$

46. Si  $PW$  es constante y si  $P=30$  cuando  $W=6$ , ¿cuál es el valor de  $P$  para  $W=12$ ?

$$PW = K ; 30(6) = K \rightarrow K = 180 ; P = K/W ; P = 180/12 \rightarrow P = 15$$

47. Cuando el voltaje es constante la intensidad de la corriente  $I$  es inversamente proporcional a la resistencia  $R$  del circuito. Si la corriente es de 4 amperios cuando la resistencia es de 80 ohmios, expresar  $I$  en función de  $R$ . Hallar  $I$  cuando  $R=100$  ohmios.

$$I = V/R ; V = K ; 4 = V/80 \rightarrow V = 320 ; I = 320/R ; I = 320/100 \rightarrow I = 3.20\text{A}$$

48.  $y$  es proporcional al cuadrado de  $x$  y se sabe que  $y=72$  para  $x=3$ . Expresar  $y$  en función de  $x$ . Hallar  $y$  para  $x=4$ .

$$y = Kx^2 ; 72 = K(3)^2 \rightarrow K = 8 ; y = 8x^2 ; y = 8(4)^2 \rightarrow y = 128$$

49. El consumo  $C$  de carbón de una locomotora (en toneladas por hora) es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad  $v$  (en Km por hora). Se necesita 4 toneladas por hora para mantener una velocidad de 50 Km por hora. Expresar  $C$  en función de  $v$ . ¿Cuánto es el consumo cuando  $v=40\text{Km/h}$ ?

$$C = Kv^2 ; 4 = K(50)^2 \rightarrow K = 1/625 ; C = v^2/625 ; C = (40)^2/625 \rightarrow C = 2.56\text{ ton.}$$

50.  $y$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $x$  y se sabe que para  $x=2$  es  $y=5$ . Expresar  $y$

en función de  $x$  y hallar el valor de  $y$  para  $x=4$ .

$$y = K/x^3; 5 = K/1^3 \rightarrow K=5; y = 5/x^3; y = 5/4^3 \rightarrow y=1,25$$

51. La intensidad de iluminación sobre una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el foco de luz y la superficie. Si la iluminación que recibe el papel sobre el cual escribo es de 80 bujías cuando la luz se encuentra a una distancia de 200 cm, ¿cuál será la iluminación cuando la luz se encuentre a una distancia de 100 cm?

$$I = K/d^2; 80 = K/(200)^2 \rightarrow K = 3200000; I = 3200000/(100)^2 \rightarrow I = 320 \text{ bujías}$$

Escribir una fórmula que exprese la relación funcional que se indica en cada uno de los enunciados siguientes (nº 53 a 60):

52. Si  $u$  es directamente proporcional a  $y$  e  $y$  es inversamente proporcional a  $x$ , ¿cómo depende  $u$  de  $x$ ?

$$u = Ky \rightarrow y = K/x \text{ Sustituyendo } y \text{ en } u; u = K(K/x); u = K^2/x; \text{ si } K^2 = K = \text{cte.} \\ u = K/x$$

53.  $Z$  es directamente proporcional a  $u$  e inversamente proporcional a  $h$ .  $\rightarrow Z = K \frac{u}{h}$

54.  $S$  es directamente proporcional a  $r$  y a  $g$ .  $\rightarrow S = Krg$

55.  $V$  es directamente proporcional a  $r^2$  y a  $h$ . Para  $r=2$ ,  $h=3$  es  $V=4\pi$ .

$$V = Kr^2h; 4\pi = K(2)^2(3); K = \pi/3 \rightarrow V = 1/3 \pi r^2 h$$

56.  $F$  es directamente proporcional a  $m$  y a  $l$  e inversamente proporcional a  $r$ .  $\rightarrow F = Kml/r$

57.  $B$  es directamente proporcional a  $L$  e inversamente proporcional a  $V^2$ .  $\rightarrow B = K \frac{L}{V^2}$

58.  $H$  es directamente proporcional a  $m$  y al cubo de  $t$ .  $\rightarrow H = Kmt^3$

59.  $P$  es directamente proporcional a la raíz cuadrada de  $u$  e inversamente proporcional a  $v$ .  $\rightarrow P = K\sqrt{u}/v$

60.  $Q$  es directamente proporcional a  $ux$  e inversamente proporcional a  $yz$ .

$$Q = K ux/yz$$

61. La superficie de pared que se va levantando en una obra es directamente proporcional al número de obreros y al número de días que trabajan. Si hicieron  $720 \text{ m}^2$  de pared, trabajando 10 obreros, durante 9 días, ¿qué superficie levantarán 12 obreros, en 8 días?

$$S = Knt; n = \text{nº de obreros}; t = \text{nº de días}$$

$$720 = K(10)(9) \rightarrow K = 8; S = 8(12)(8) \rightarrow S = 768 \text{ m}^2$$

62. La presión del viento sobre una valla anunciadora es directamente proporcional al área de la valla y al cuadrado de la velocidad del viento. Cuando el viento es de  $24 \text{ Km/h}$  la presión sobre 1 pie cuadrado es de 1 libra. Calcular la presión sobre una valla de 20 pies cuadrados cuando la velocidad del viento es de  $30 \text{ Km/h}$ .

$$P = KAV^2; 1 = K(1)(24)^2; K = 1/576; P = 1/576(20)(30)^2 \rightarrow P = 31,25 \text{ lb.}$$

63. La intensidad de la gravedad en la superficie de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio. Sabiendo que la masa de Saturno es aproximadamente 93 veces la de la Tierra, y que la intensidad de la gravedad en



su superficie es  $8/7$  de la de la Tierra, hallar la longitud del radio de Saturno tomando el radio de la tierra como unidad.

$$g = km/r^2 \text{ (general)} \quad g_T = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$g_s = km_s/r_s^2 \text{ (Saturno)} \quad ; \quad m_s = 93 m_T \quad ; \quad g_s = 8/7 g_T$$

$$g_T = km_T/r_T^2 \text{ (Tierra)}$$

$$K = \frac{g_s r_s^2}{m_s} \Rightarrow \frac{g_s r_s^2}{m_s} = \frac{g_T r_T^2}{m_T} \quad ; \quad r_s^2 = \frac{g_T r_T^2 m_s}{g_s m_T} \quad \text{Si } r_T = 1$$

$$K = \frac{g_T r_T^2}{m_T} \quad r_s^2 = \frac{g_T r_T^2 \cdot 93 m_T}{8/7 g_T \cdot m_T} \quad ; \quad r_s^2 = \frac{651}{8} r_T^2 \quad ; \quad r_s = 9,02 r_T \quad ; \quad r_s = 9,02$$

Estudiar la proporcionalidad en las siguientes fórmulas:

64.  $A = 2\pi r h \rightarrow A$  es directamente proporcional al producto  $rh$  siendo  $K = 2\pi$

65.  $V = \frac{KT}{p} \rightarrow V$  es directamente proporcional a  $T$  e inversamente proporcional a  $p$ .

66.  $p = K \frac{WT}{V} \rightarrow p$  es directamente proporcional al producto  $WT$  e inversamente proporcional a  $V$ .

67.  $F = K \frac{qq'}{r^2} \rightarrow$  La intensidad de Fuerza eléctrica con que se atraen o rechazan dos cargas eléctricas es directamente proporcional al producto de las mismas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

68.  $S = \pi r(r+g) \rightarrow S$  es directamente proporcional a  $r$  siempre que la suma  $r+g$  sea constante o  $S$  es directamente proporcional a la suma  $r+g$  siempre que  $r$  sea constante.

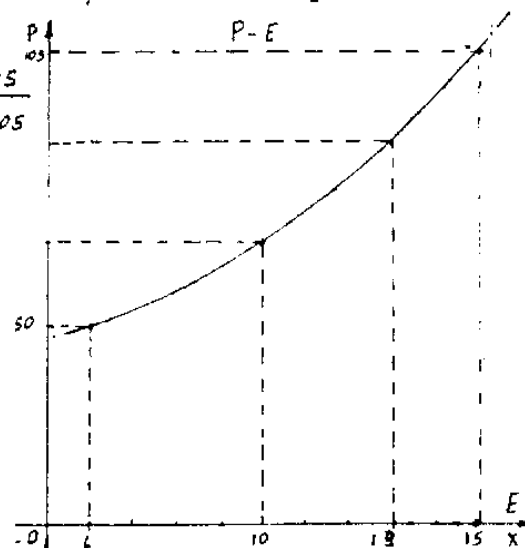
69.  $T^2 = Ka^3 \rightarrow$  El cuadrado de  $T$  es directamente proporcional al cubo de  $a$ .

70.  $D = -\frac{1}{3} \frac{P\rho^3}{EI} \rightarrow D$  es directamente proporcional al producto  $P\rho^3$  e inversamente proporcional al producto  $EI$ .

71.  $D = -\frac{5W\rho^4}{384EI} \rightarrow D$  es directamente proporcional al producto  $W\rho^4$  e inversamente proporcional al producto  $EI$ .

72. El peso promedio de los varones para edades comprendidas entre 6 y 15 años se ofrece en libras en la siguiente tabla:

Edad	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Peso	50	53	57	62	67	72	78	85	93	105



## CAPITULO 13

## SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

## Ejercicio 103

Resolver los sistemas siguientes aplicando el método de adición y sustracción:

1.  $X + Y = 30$

$X - Y = 8$

$2X = 38$

$X = 19; Y = 11$

2.  $X - Y = -5$

$X + Y = 7$

$2X = 2$

$X = 1; Y = 6$

3.  $-2X - Y = -4 \quad (-1)$

$3X + Y = 5$

$X = 1$

$2(1) + Y = 4; Y = 2$

4.  $X + 4Y = 14$

$-X + 3Y = 7 \quad (-1)$

$7Y = 21$

$Y = 3; X = 2$

5.  $6X - Y = 13$

$-3X + Y = -4 \quad (-1)$

$3X = 9$

$X = 3; Y = 5$

6.  $2X - 6Y = 21 \quad (3)$

$3X - 2Y = 7$

$18X + 6Y = 74 \quad (2)$

$5X + 3Y = 37$

$19X = 95$

$X = 5; Y = 4$

7.  $2X + 9Y = 31 \quad (-1)$

$-4X - 18Y = -64$

$4X + 3Y = 4$

$4X + 3Y = 4$

$-15Y = -60$

$Y = 4; X = -2$

8.  $-20X + 22Y = 72 \quad (2)$

$20X - 25Y = -90 \quad (5)$

$-3Y = -18$

$Y = 6; X = 3$

9.  $20X - 24Y = -8 \quad (4)$

$9X + 24Y = 240 \quad (3)$

$29X = 232$

$X = 8; Y = 7$

10.  $\begin{cases} 13X + 15Y = 17 \quad (2) \\ -7X + 10Y = 27 \quad (-3) \end{cases}$

$26X + 30Y = 34$

$21X - 30Y = -81$

$47X = -47$

$X = -1; Y = 2$

11.  $\begin{cases} X + 2Y = 58 \quad (-5) \\ 5X - 8Y = 18 \end{cases}$

$5X - 8Y = 18$

$-5X - 60Y = -290$

$5X + 8Y = 18$

$-68Y = -272$

$Y = 4; X = 10$

12.  $\begin{cases} 9X + 20Y = 33 \quad (3) \\ 8X + 15Y = 21 \quad (-4) \end{cases}$

$8X + 15Y = 21$

$27X + 60Y = 99$

$-32X - 60Y = -84$

$-5X = 15$

$X = -3; Y = 3$

13.  $\begin{cases} Y = 2X + 5 \quad (-1) \\ Y = 5X - 4 \end{cases}$

$Y = 5X - 4$

$-Y = -2X - 5$

$Y = 5X - 4$

$3X = 9; X = 3; Y = 11$

14.  $\begin{cases} 1/3X + 1/2Y = 6 \quad (1/2) \\ 1/6X - 1/4Y = -1 \end{cases}$

$1/6X - 1/4Y = -1$

$1/6X + 1/4Y = 3$

$1/6X - 1/4Y = -1$

$2/6X = 2; X = 6; Y = 8$

15.  $\begin{cases} 0.2X + Y = 1.6 \quad (5) \\ 2X - 5Y = 1 \end{cases}$

$2X - 5Y = 1$

$X + 5Y = 8$

$2X - 5Y = 1$

$3X = 9 \rightarrow X = 3; Y = 1$

16.  $\begin{cases} 2X - 3Y = -18 \quad (4) \\ -3X + 4Y = 12 \quad (3) \end{cases}$

$-3X + 4Y = 12$

$8X - 12Y = -72$

$-9X + 12Y = 36$

$-X = -36 \rightarrow X = 36; Y = 30$

17.  $\begin{cases} 0.2X + 0.3Y = 8 \quad (4) \\ 0.5X - 0.4Y = -3 \quad (3) \end{cases}$

$0.5X - 0.4Y = -3$

$0.8X + 1.2Y = 32$

$1.5X - 1.2Y = -9$

$2.3X = 23 \rightarrow X = 10; Y = 20$

18.  $\begin{cases} 0.6X - 0.5Y = -0.9 \\ 0.3X - 0.4Y = -1.8 \quad (-2) \end{cases}$

$0.3X - 0.4Y = -1.8$

$0.6X - 0.5Y = -0.9$

$-0.6X + 0.8Y = 3.6$

$0.3Y = 2.7 \rightarrow Y = 9; X = 6$

$$19. \begin{cases} 25X + 32Y = 13 & (3) \\ 35X - 12Y = 4 & (8) \end{cases}$$

$$75X + 96Y = 39$$

$$\underline{280X - 96Y = 32}$$

$$355X = 71$$

$$X = 1/5 ; Y = 1/4$$

$$20. \begin{cases} 100X + 33Y = 21 & (3) \\ 70X - 9Y = 4 & (11) \end{cases}$$

$$300X + 99Y = 63$$

$$\underline{770X - 99Y = 44}$$

$$1070X = 107$$

$$X = 1/10 ; Y = 1/3$$

$$100(1/10) + 33Y = 21$$

$$Y = 1/3$$

### Ejercicio 104

Resolver los sistemas siguientes aplicando el método de sustitución:

$$1. \begin{cases} 2X + Y = 7 \rightarrow Y = 7 - 2X \text{ en } \textcircled{2} \\ 3X - 2Y = 14 \rightarrow 3X - 2(7 - 2X) = 14 \rightarrow X = 4 ; Y = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5X + 9Y = 17 \\ X + 4Y = 10 \rightarrow X = 10 - 4Y \text{ en } \textcircled{1} \end{cases}$$

$$5(10 - 4Y) + 9Y = 17 \rightarrow Y = 3 ; X = -2$$

$$3. \begin{cases} 4X - 3Y = 8 \rightarrow X = (8 + 3Y)/4 \text{ en } \textcircled{2} \\ 3X + 2Y = 23 \end{cases}$$

$$X = 5$$

$$4. \begin{cases} 8X + 3Y = 5 \rightarrow X = (5 - 3Y)/8 \text{ en } \textcircled{2} \\ 7X - 6Y = 1.5 \end{cases}$$

$$7(5 - 3Y)/8 - 6Y = 1.5 \rightarrow Y = 1/3$$

$$X = (5 - 3(1/3))/8 \rightarrow X = 1/2$$

$$5. \begin{cases} 10X - 3Y = 16 \rightarrow X = (16 + 3Y)/10 \text{ en } \textcircled{2} \\ 4X - 7Y = 18 \end{cases}$$

$$4(16 + 3Y)/10 - 7Y = 18 \rightarrow Y = -2$$

$$X = (16 + 3(-2))/10 \rightarrow X = 1$$

$$6. \begin{cases} 0,3X - Y = 0 \rightarrow Y = 0,3X \text{ en } \textcircled{2} \\ 0,5X + 0,4Y = 12,4 \end{cases}$$

$$0,5X + 0,4(0,3X) = 12,4 \rightarrow X = 20$$

$$Y = 0,3(20) ; Y = 6$$

$$7. \begin{cases} 5X + 2Y = -21 \rightarrow Y = (-21 - 5X)/2 \text{ en } \textcircled{2} \\ 3X - 4Y = 3 \end{cases}$$

$$3X - 4(-21 - 5X)/2 = 3 \rightarrow X = -3$$

$$Y = [-21 - 5(-3)]/2 \rightarrow Y = -3$$

$$8. \begin{cases} 4X = 5Y + 22 \rightarrow X = (5Y + 22)/4 \text{ en } \textcircled{2} \\ 3Y = 2X - 10 \end{cases}$$

$$3Y = 2(5Y + 22)/4 - 10 \rightarrow Y = 2$$

$$X = [5(2) + 22]/4 ; X = 8$$

$$9. \begin{cases} 5X + 6Y = 2 \rightarrow X = (2 - 6Y)/5 ; \\ 2X - 3Y = -0,1 \end{cases}$$

$$2(2 - 6Y)/5 - 3Y = -0,1 \rightarrow Y = 1/6$$

$$X = [2 - 6(1/6)]/5 ; X = 1/5$$

$$10. \begin{cases} 1/3X + 1/5Y = 5 \rightarrow X = (45 - 3Y)/5 \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{45 - 3Y}{5} \right) + \frac{1}{4}Y = 4,25 \rightarrow Y = 5 \text{ y } X = 6 \\ 1/2X + 1/4Y = 4,25 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 6A + 5B = 22 \rightarrow A = \frac{22 - 5B}{6} \rightarrow 2 \left( \frac{22 - 5B}{6} \right) + 7B = -14 \rightarrow B = -4 ; A = 7 \\ 2A + 7B = -14 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -8u + 5v = 42 \rightarrow v = \frac{42 + 8u}{5} \text{ en } \textcircled{2} \\ 7u + 2v = 27 \end{cases}$$

$$7u + 2 \left( \frac{42 + 8u}{5} \right) = 27 ; u = 1$$

$$v = 10$$

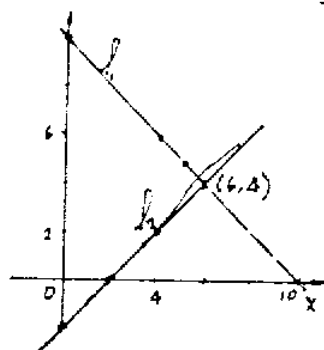
## Ejercicio 105

Resolver gráficamente los sistemas siguientes:

1.  $x + y = 10$  ( $l_1$ )

$x - y = 2$  ( $l_2$ )

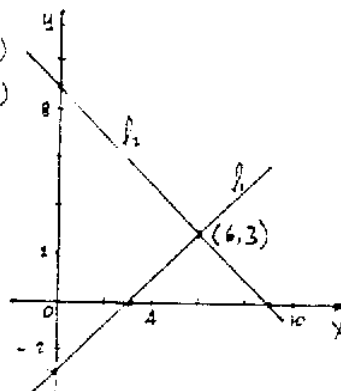
$x$	$y$	$x$	$y$
0	10	0	-2
4	6	2	0
5	5	4	2
10	0		



2.  $x - y = 3$  ( $l_1$ )

$x + y = 9$  ( $l_2$ )

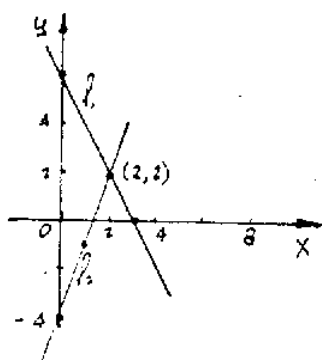
$x$	$y$	$x$	$y$
0	-3	0	9
3	0	9	0



3.  $2x + y = 6$  ( $l_1$ )

$3x - y = 4$  ( $l_2$ )

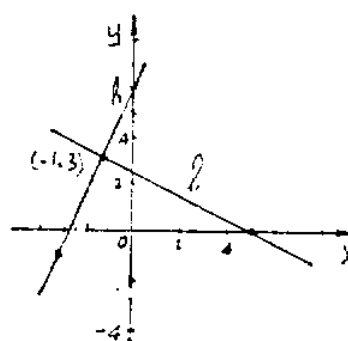
$x$	$y$	$x$	$y$
0	6	0	-4
3	0	1	-1
		2	2



4.  $x + 2y = 5$  ( $l_1$ )

$2x - y = -5$  ( $l_2$ )

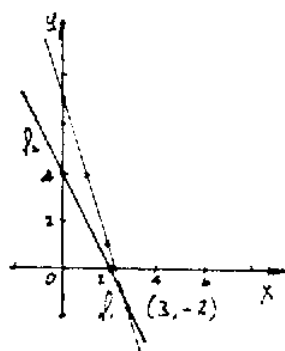
$x$	$y$	$x$	$y$
5	0	0	5
3	1	-1	3
1	2	-2	1
-1	3	-3	-1



5.  $3x + y = 7$  ( $l_1$ )

$2x + y = 4$  ( $l_2$ )

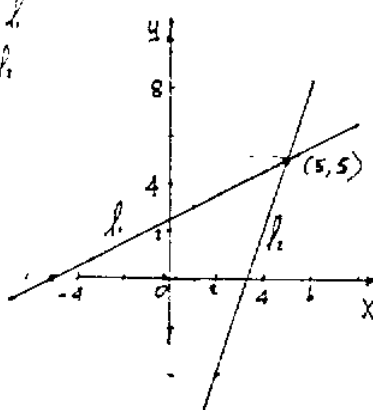
$x$	$y$	$x$	$y$
0	7	0	4
1	4	1	2
2	1	2	0
3	-2	3	-2



6.  $x - 2y = -5$  ( $l_1$ )

$3x - y = 10$  ( $l_2$ )

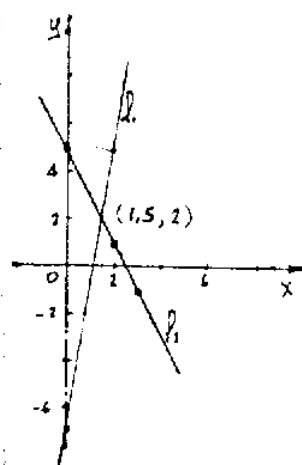
$x$	$y$	$x$	$y$
-5	0	2	-4
-3	1	3	-1
-1	2	4	2
1	3	5	5



7.  $6x - y = 7$  ( $l_1$ )

$2x + y = 5$  ( $l_2$ )

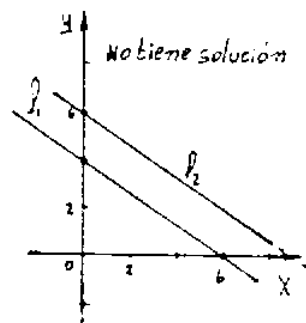
$x$	$y$	$x$	$y$
0	-7	0	5
2	5	1	3
1	-1	2	1
		3	-1



8.  $2x + 3y = 12$  ( $l_1$ )

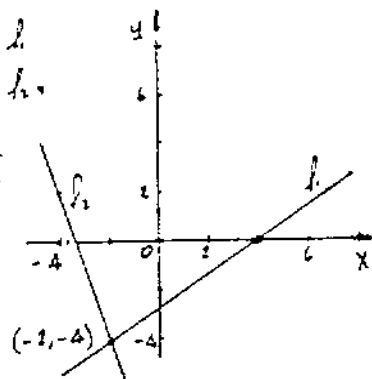
$4x + 6y = 36$  ( $l_2$ )

$x$	$y$	$x$	$y$
0	4	0	6
6	0	9	0



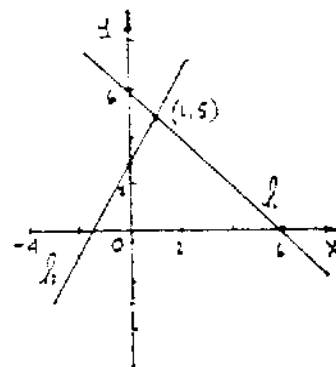
9.  $2x - 3y = 8$   $l_1$   
 $3x + 3 = -10$   $l_2$

x	y	x	y
4	0	-2	-4
7	2	-3	-1
-2	-4	-4	2



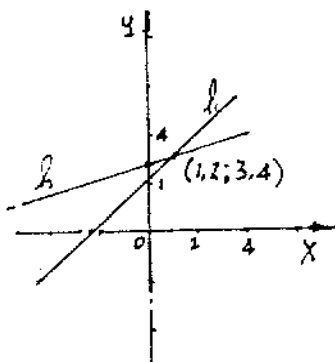
10.  $y = 2x + 3$   $l_1$   
 $y = -x + 6$   $l_2$

x	y	x	y
0	3	0	6
1	5	1	5
-1	1	2	4
-2	-1	3	3
		6	0



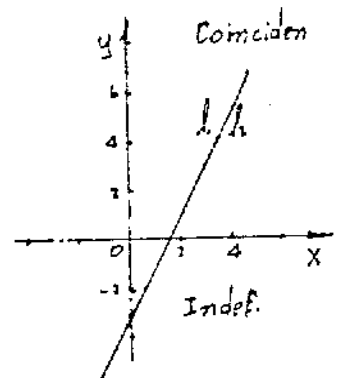
11.  $x = y - 2$   $l_1$   
 $x = 3y - 9$   $l_2$

x	y	x	y
-2	0	0	3
0	2	-9	0



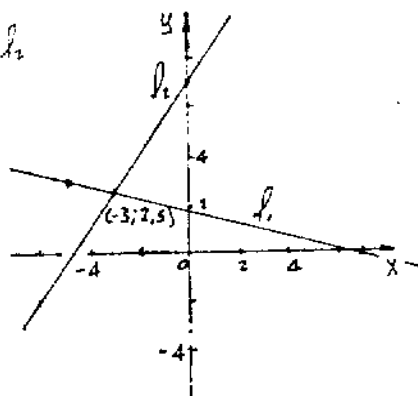
12.  $2x - y = 3$   
 $4x - 2y = 6$

x	y	x	y
0	-3	0	-3
1	-1	1	-1
2	1	2	1
3	3	3	3



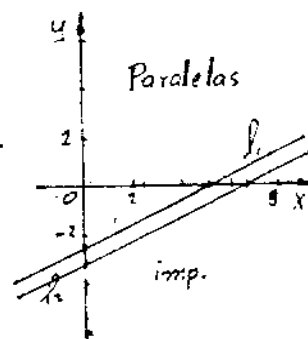
13.  $x + 4y = 7$   $l_1$   
 $-3x + 2y = 14$   $l_2$

x	y	x	y
7	0	0	7
3	1	-2	4
-1	2	-4	1
-5	3	-6	-2



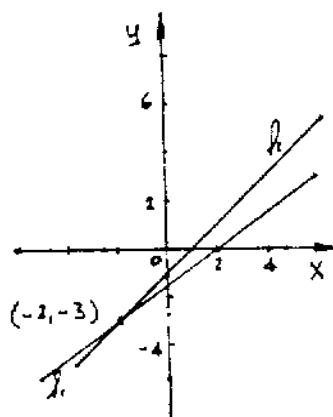
14.  $x - 2y = 5$   $l_1$   
 $2x - 4y = 13$   $l_2$

x	y	x	y
5	0	0	-3.25
0	-2.5	6.5	0



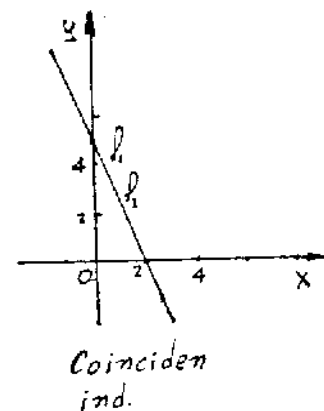
15.  $3x - 4y = 6$   $l_1$   
 $x - y = 1$   $l_2$

x	y	x	y
2	0	0	-1
0	-1.5	1	0
-2	-3	-2	-3



16.  $5x + 2y = 10$   $l_1$   
 $2.5x + y = 5$   $l_2$

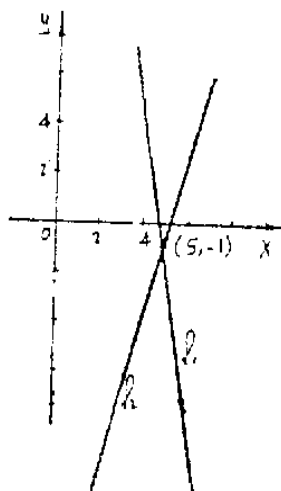
x	y	x	y
0	5	0	5
2	0	2	0



17.  $6x + y = 29 \quad l_1$

$3x - y = 16 \quad l_2$

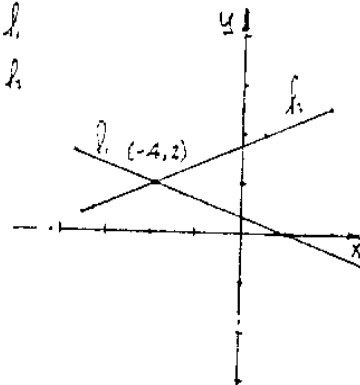
x	y	x	y
5	-1	3	-7
4	5	4	-4
6	-7	5	-1
		6	2



18.  $x + 3y = 2 \quad l_1$

$2x - 5y = -18 \quad l_2$

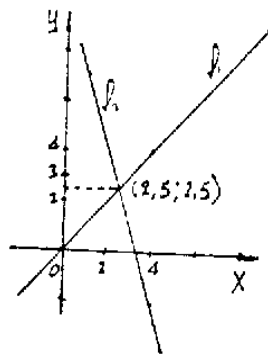
x	y	x	y
2	0	-4	2
-1	1	-15	3
5	-1	1	4
-4	2	0	3.6



19.  $x - y = 0 \quad l_1$

$3x + y = 10 \quad l_2$

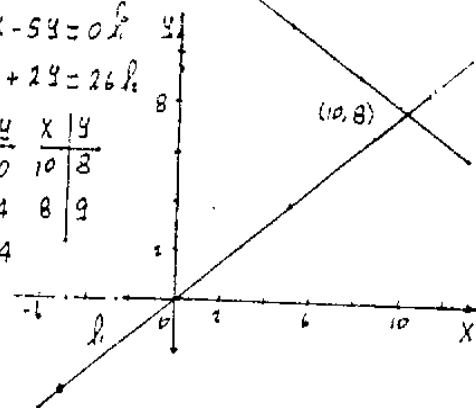
x	y	x	y
0	0	1	7
1	1	2	4
2	2	3	1
3	3	4	-2
4	4		



20.  $4x - 5y = 0 \quad l_1$

$x + 2y = 26 \quad l_2$

x	y	x	y
0	0	10	8
5	4	8	9
-5	-4		



## Ejercicio 106

Resolver los sistemas siguientes:

1.  $\begin{cases} x/5 + y/4 = 3/2 & (1/3) \\ x/2 + y/6 = 17/6 & (-1/2) \end{cases}$

$x/15 + y/12 = 1/2$

$-x/4 - y/12 = -17/12$

$-11/60x = -11/12$

$-11/60x = -11/12$

$x = 5; y = 2$

2.  $\begin{cases} x/2 - y/3 = 2 & (-1/2) \\ x/4 + y/2 = 5 \end{cases}$

$-x/4 + y/6 = -1$

$x/2 - y/3 = 2$

$x = 8$

$x/4 + y/2 = 5$

$2/3y = 4$

$y = 6; x = 8$

3.  $\begin{cases} x/3 + (x+y)/2 = 3 \\ (x-y)/5 + y/4 = 1 & (-3) \end{cases}$

$5x + 3y = 18$

$-12x - 3y = -60$

$-7x = -42$

$x = 6$

$x = 6$

$6/3 + (6+y)/2 = 3$

$y = -4$

4.  $\begin{cases} x/6 + y/4 = (x+y-1)/3 \rightarrow 2x+y = 4 & (-1) \\ (2x-y)/8 - 3/2 = (x+2y)/2 \rightarrow 2x+9y = -12 \end{cases}$

$-2x - y = -4$

$2x + 9y = -12$

$8y = -16$

$y = -2$

$2x - 2 = 4 \rightarrow x = 3$

$$5. \begin{cases} (3x-4)/(y-2) = 4 \\ (x+2y)/(2x-4) = 3 \quad (-5) \end{cases}$$

$$3x - 5y = -8$$

$$\underline{-5x + 5y = 0}$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4; y = 4$$

$$7. \begin{cases} (4x+y)/11 = 2x-4y \\ (3x-4)/13 + y = x-y \end{cases}$$

$$2x - 5y = 0 \rightarrow y = 2/5x$$

$$2x - 5y = 0$$

las ecuaciones son coincidentes

$$\text{Si } x=10 \rightarrow y=4$$

tienen infinitas soluciones

$$9. \begin{cases} (x-3)/2 + (y-2)/4 = x-4 \quad (2) \\ (x-4)/3 + (y-3)/6 = (x+y-10)/2 \end{cases}$$

$$4x - 2y = 16$$

$$\underline{x + 2y = 19}$$

$$5x = 35$$

$$x = 7; y = 6$$

$$11. \begin{cases} (2x+y+7)/3 = (3x+2y+5)/4 \quad (-31) \\ (4x-y+25)/5 = (x+4y-20)/9 \end{cases}$$

$$-31x - 62y = -403$$

$$\underline{31x - 29y = -325}$$

$$-91y = -728$$

$$y = 8; x = -3$$

$$13. \begin{cases} 2/x + 3/y = 23 \quad (-2) \\ 4/x - 5/y = -9 \end{cases}$$

$$-4/x - 6/y = -46$$

$$\underline{4/x - 5/y = -9}$$

$$-11/y = -55$$

$$y = 1/5; x = 1/4$$

$$15. \begin{cases} 8/x + 3/y = 5 \quad (3) \\ 10/x - 9/y = 2 \end{cases}$$

$$24/x + 9/y = 15$$

$$\underline{10/x - 9/y = 2}$$

$$34/x = 17$$

$$x = 2; y = 3$$

$$6. \begin{cases} (x+5y+2)/(2x+4y-2) = 2 \quad (-1) \\ (x+y+1)/(3x+4y-3) = 1/2 \end{cases}$$

$$-x - y = -2$$

$$\underline{x + 2y = 5}$$

$$y = 3; x = -1$$

$$8. \begin{cases} (5x+3y)/3 + y = 1 \quad (-7) \\ (10x-6y)/4 + x = 1/5 \end{cases}$$

$$-35x - 42y = -21$$

$$\underline{35x - 15y = 2}$$

$$-57y = -19$$

$$y = 1/3; x = 1/5$$

$$10. \begin{cases} (6+y)/5 - (2+x)/2 = x+y-2 \quad (-8) \\ (3x+2)/4 + (5y+8)/3 = 5x+7y \end{cases}$$

$$-120x - 64y = -176$$

$$\underline{51x + 64y = 38}$$

$$-69x = -138$$

$$x = 2; y = -1$$

$$12. \begin{cases} (5x+6)/14 + (2x+y-1)/(x+3) = (2.9x+24)/7 \\ (3y+5)/26 + (x+2y-6)/(y+2) = (1.5y+22)/13 \quad (+1/2) \end{cases}$$

$$x - y = 10$$

$$x = 10; y = 20$$

$$14. \begin{cases} 6/x + 5/y = 8 \quad (1) \\ 7/x + 2/y = 17 \quad (-5) \end{cases}$$

$$12/x + 10/y = 16$$

$$\underline{-35/x - 10/y = -85}$$

$$-23/x = -69$$

$$x = 1/3; y = -1/2$$

$$16. \begin{cases} 25/x - 12/y = 3 \quad (3) \\ 35/x - 18/y = 14 \quad (-2) \end{cases}$$

$$75/x - 36/y = 9$$

$$\underline{-70/x + 36/y = -108}$$

$$5/x = 1$$

$$x = 5; y = 6$$

$$17. \begin{cases} 3/4x + 4/5y = 2 & (1/3) \\ 5/2x + 2/3y = 25/6 & (-2/5) \end{cases}$$

$$1/4x + 4/15y = 2/3$$

$$\underline{-1/4x - 4/15y = -5/3}$$

$$-3/4x = -1$$

$$x = 3/4; y = 2$$

$$19. \begin{cases} 2/3x - 3/4y = -1 & (5/2) \\ 5/6x + 11/8y = 8 & (-2) \end{cases}$$

$$5/3x - 15/8y = -5/2$$

$$\underline{-5/3x - 11/4y = -16}$$

$$-37/8y = -37/2$$

$$y = 1/4; x = 1/3$$

$$21. \begin{cases} 3x + 2/y = 12 & (2) \\ 2x - 3/y = -5 & (-3) \end{cases}$$

$$6x + 4/y = 24$$

$$\underline{-6x + 9/y = 15}$$

$$13/y = 39$$

$$y = 1/3; x = 2$$

$$18. \begin{cases} 4/x - 3/y = -5 & (5) \\ 7/x - 5/y = -5 & (-3) \end{cases}$$

$$20/x - 15/y = -25$$

$$\underline{-21/x + 15/y = 15}$$

$$-1/x = -10$$

$$x = 1/10; y = 1/15$$

$$20. \begin{cases} 4/x + 3/5y = 4,2 & (2) \\ 9/2x - 6/y = 2,5 & (1/5) \end{cases}$$

$$8/x + 6/5y = 8,4$$

$$\underline{9/10x - 6/5y = 0,5}$$

$$89/10x = 8,9$$

$$x = 1; y = 3$$

$$22. \begin{cases} 4/x - y/4 = 1 & (1/3) \\ 6/x + y/6 = 11/3 & (1/2) \end{cases}$$

$$4/3x - y/12 = 1/3$$

$$\underline{3/x + y/12 = 11/6}$$

$$13/3x = 13/6$$

$$x = 2; y = 4$$

### Ejercicio 107

Resolver los sistemas siguientes:

$$1. \begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

$$\underline{x - y = n}$$

$$2x = m + n$$

$$x = \frac{m+n}{2}; y = \frac{m-n}{2}$$

$$2. \begin{cases} ax + by = k \\ ax - by = K \end{cases}$$

$$\underline{ax - by = K}$$

$$2ax = 2K$$

$$x = \frac{K}{a}; y = 0$$

$$3. \begin{cases} ax + by = c & (3) \\ 3ax + 3by = 3c \end{cases}$$

$$2x - 3y = 1 & (6) \quad \underline{2bx - 3by = b}$$

$$x(3a+2b) = b+3c$$

$$x = \frac{b+3c}{3a+2b}; y = \frac{2c-a}{3a+2b}$$

$$4. \begin{cases} x + ay = b \\ 2x - y = c & (a) \end{cases}$$

$$x + ay = b$$

$$\underline{2ax - ay = ac}$$

$$x(1+2a) = ac+b$$

$$x = \frac{ac+b}{2a+1}; y = \frac{2b-c}{2a+1}$$

$$5. \begin{cases} ax - by = 2 & (d) \\ cx + dy = 3 & (b) \end{cases}$$

$$adx - bdy = 2d$$

$$\underline{bcx + bd^2y = 3b}$$

$$x(ad+bc) = 3b+2d$$

$$x = \frac{3b+2d}{ad+bc}; y = \frac{3a-2c}{ad+bc}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 5y = a+b & (2) \\ 5x - 2y = a-b & (5) \end{cases}$$

$$4x + 10y = 2a+2b$$

$$\underline{25x - 10y = 5a-5b}$$

$$29x = 7a-3b$$

$$x = \frac{7a-3b}{29}; y = \frac{3a+7b}{29}$$



$$7. \begin{cases} 2bx + 3ay = 5ab & (1) \\ 3bx - 4ay = -ab & (2) \end{cases}$$

$$8bx + 12ay = 20ab$$

$$9bx - 12ay = -3ab$$

$$17bx = 17ab$$

$$x = a; y = b$$

$$8. \begin{cases} mx + y = n & (-m) \\ x + my = p \end{cases}$$

$$-m^2x - m^2y = -mn$$

$$x + my = p$$

$$x(1 - m^2) = p - mn$$

$$x = \frac{mn - p}{m^2 - 1}; y = \frac{mp - n}{m^2 - 1}$$

$$9. \begin{cases} (a-b)x + ay = a^2 - b^2 & (b) \\ (a+b)x + by = 2ab & (-a) \end{cases}$$

$$(ab - b^2)x + ab^2 = a^2b - b^3$$

$$-(a^2 + ab)x - ab^2 = -2a^2b$$

$$x(ab - b^2 - a^2 - ab) = -2a^2b - b^3$$

$$x(a^2 + b^2) = b(a^2 + b^2)$$

$$x = b; y = a - b$$

$$10. \begin{cases} bx - (a+b)y = b^2 - a^2 & (a) \\ ax - by = a^2 & (-b) \end{cases}$$

$$abx - a(a+b)y = a(b^2 - a^2)$$

$$-abx + b^2y = -a^2b$$

$$(b^2 - a^2 - ab)y = a(b^2 - a^2 - ab)$$

$$y = a; x = a + b$$

$$11. \begin{cases} cx + dy + c^2 + d^2 = 0 & (c) \\ dx + cy + 2cd = 0 & (-d) \end{cases}$$

$$c^2x + cd^2 + c(c^2 + d^2) = 0$$

$$-d^2x - cd^2 - 2cd^2 = 0$$

$$(c^2 - d^2)x + c(c^2 - d^2) = 0$$

$$x = -c; y = -d$$

$$12. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 3 \\ x + 2y = 4a - x = 4a - 2y \end{cases}$$

$$4a - 2y + x = 4a - 2y$$

$$\frac{4a - 2y}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 3$$

$$y = \frac{a^2 + 4ab + 3b^2}{a + 3b}$$

$$a + 3b$$

$$y = a + b; x = 2(a - b)$$

$$13. \begin{cases} a/x + b/y = c & (m) \\ m/x + n/y = p & (-b) \end{cases}$$

$$an/x + bn/y = cn$$

$$-bm/x - bn/y = -bp$$

$$\frac{an - bm}{x} = cn - bp$$

$$x = \frac{an - bm}{cn - bp}; y = \frac{an - bm}{ap - cm}$$

$$14. \begin{cases} a/(c+x) = c/(a-y) \rightarrow cx + ay = a^2 - c^2 & (c) \\ c/(a-x) = a/(c+y) \rightarrow ax + cy = a^2 - c^2 & (-a) \end{cases}$$

$$c^2x + acy = c(a^2 - c^2)$$

$$-a^2x - acy = -a(a^2 - c^2)$$

$$(c^2 - a^2)x = (a^2 - c^2)(c - a)$$

$$-(a^2 - c^2)x = -(a^2 - c^2)(a - c)$$

$$x = a - c; y = a - c$$

$$15. \begin{cases} x/(m+n) + y/(m-n) = 1/(m+n) \\ x/(m+n) - y/(m-n) = 1/(m-n) \end{cases}$$

$$\frac{2x}{m+n} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n}$$

$$x = \frac{m}{m-n}; y = -\frac{n}{m+n}$$

$$x = \frac{m}{m-n}; y = -\frac{n}{m+n}$$

$$16. \begin{cases} 1/a(3x+y) + 1/b(3x-y) = 1 \\ 1/a(3x-y) + 1/b(3x+y) = 2 \end{cases}$$

$$3(a+b)x - (a-b)y = ab$$

$$3(a+b)x + (a-b)y = 2ab$$

$$6(a+b)x = 3ab$$

$$x = \frac{ab}{2(a+b)}; y = \frac{ab}{2(a-b)}$$

### Ejercicio 108

Resolver los sistemas siguientes: NOTA:  $a/b; b \neq 0$  solución única;  $a=0$

$$1. x + y + z = 15$$

$$x + y + z = 15$$

$$x - y + z = 5$$

$$x - 5 = -2 \rightarrow x = 3$$

$$x - y + z = 5 \quad (-1)$$

$$-x + y - z = -5$$

$$x - y - z = -9$$

$$3 + 5 + z = 15 \rightarrow z = 7$$

$$x - y - z = -9$$

$$2y = 10; y = 5$$

$$x - y = -2$$

$$\begin{array}{llllll}
 2. & X+3Y+Z=8 & (2) & 2X+6Y+4Z=16 & 5X-2Y+Z=15 & 17X+7Z=61 & X=4 \\
 & 5X-2Y+Z=15 & (3) & 15X-6Y+3Z=45 & -3X+2Y+5Z=-13 & -17X-51Z=-17 & Y=2 \\
 & -3X+2Y+5Z=-13 & & 17X+7Z=61 & 2X+6Z=2 & (-17) & -44Z=44 & Z=-1 \\
 & & & & & & & X+3Z=1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 3. & 6X-2Y+3Z=-13 & (3)-(2) & 18X-6Y+9Z=-39 & -12X+4Y-6Z=26 & 28(-2)+13Z=-43; Z=1 \\
 & 5X+3Y+2Z=-2 & (2) & 10X+6Y+4Z=-4 & X-4Y+6Z=-4 & \\
 & X-4Y+6Z=-4 & & 28X+13Z=-43 & -11X=22; X=-2 & X=-2; Y=2; Z=1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 4. & 2X+Y-3Z=5 & (-2) & -4X-2Y+6Z=-10 & 28Y+21Z=70 & Z=2 \\
 & 4X-5Y+2Z=19 & & 4X-5Y+2Z=19 & -28Y+32Z=36 & Y=1 \\
 & 4Y+3Z=10 & (7) & -7Y+8Z=9 & (4) & 53Z=106 & X=5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 5. & 2X+4Y-Z=-2 & (4) & 8X+16Y-4Z=-8 & 6X+Y+4Z=15 & 14X+17Y=7 & Y=0 \\
 & 6X-Y+4Z=15 & & 6X+Y+4Z=15 & 8X-2Y-4Z=-8 & -14X+Y=-7 & X=1/2 \\
 & 4X-Y-2Z=-4 & (2) & 14X+17Y=7 & 14X-Y=7 & 18Y=0 & Z=3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 6. & X+Y-Z=0 & (3)-(2) & 3X+3Y-3Z=0 & 2X+2Y-2Z=0 & 5X+8Y=210 & Y=20 \\
 & 2X+5Y+3Z=210 & & 2X+5Y+3Z=210 & 3X-Y+2Z=70 & -5X-Y=-70 & X=10 \\
 & 3X-Y+2Z=70 & & 5X+8Y=210 & 5X+Y=70 & 7Y=140 & Z=30
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 7. & 3X-4Y+Z=145 & (2) & 6X-8Y+12Z=290 & 3X-4Y+6Z=145 & -4Y-108Z=-1580 & Z=15 \\
 & -2X+3Y+5Z=35 & (3) & -6X+9Y+15Z=105 & -3X+24Y+9Z=-120 & 4Y+3Z=5 & Y=10 \\
 & -X+8Y+3Z=-40 & (3) & Y+27Z=395 & (4) & 4Y+3Z=5 & -105Z=-1575 & X=5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 8. & 2X+Y+Z=10 & (-2) & -4X-2Y-2Z=-20 & 2X+Y+Z=10 & 3X+Z=10 & X=5/2 \\
 & X+2Y+Z=10 & & X+2Y+Z=10 & -X-Y-2Z=-10 & X-Z=0 & Z=5/2 \\
 & X+Y+2Z=10 & (-1) & 3X+Z=10 & X-Z=0 & X=10/4 & Y=5/2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 9. & X+Y=11 & & X+Y=11 & X+Z=12 & X=5 & X=5 \\
 & Y+Z=13 & (-1) & -Y-Z=-13 & X-Z=-2 & 5-Z=-2 & Z=7 \\
 & X+Z=12 & & X-Z=-2 & 2X=10 & Z=7 & Y=6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 10. & X-Y=8 & & X-Y=8 & X+Z=6 & X=12 \\
 & Y-Z=10 & & Y-Z=10 & X-Z=18 & Y=4 \\
 & X+Z=6 & & X-Z=18 & 2X=24 & Z=-6 \\
 & & & & X=12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 11. & 2x+3y+4z=3 & (2) & 2x+3y+4z=3 \\
 & 4x-9y+2z=-0,5 & (-1) & -8x+18y-4z=1 \\
 & 3x+6y-8z=1,5 & & -6x+21y=4 \quad (7)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & 4x+6y+8z=6 & & -42x+147y=28 \quad y=1/3 \\
 & 3x+6y-8z=1,5 & & 42x+72y=45 \quad x=1/2 \\
 & 7x+12y=7,5 & (6) & 219y=73 \quad z=1/4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 12. & 3x+4y+6z=56 & & 3x+4y+6z=56 \\
 & 2x-y+5z=29 & (4)-(3) & 8x-4y+10z=116 \\
 & 4x+3y+4z=23 & & 11x+26z=172 \quad (10)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & 6x-3y+15z=87 & & 110x+260z=1720 \quad z=10 \\
 & 4x+3y+4z=23 & & -110x+209z=-1210 \quad x=-8 \\
 & 10x+19z=110 & (-11) & 51z=510 \quad y=5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 *13. & 0,5x-0,2y+0,3z=2,3 & & 5x-2y+3z=23 \quad (3) \\
 & 0,7x+0,3y-0,4z=5,2 & (10) & 7x+3y-4z=52 \quad (2)-(5) \\
 & 1,0x-0,5y-0,2z=5,2 & & 10x-5y-2z=52 \quad (3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & 15x-6y+9z=69 & & 35x+15y-20z=260 \\
 & 14x+6y-8z=104 & & 30x-15y-6z=156 \\
 & 29x+z=173 \quad (2) & & 65x-26z=416 \\
 & & & 5x-2z=32
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 58x+2z=346 \\
 \underline{5x-2z=32} \\
 63x=378 \\
 x=6; y=2; z=-1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 14. & 0,7x+0,4y=0,15 & (5) & 3,5x+2y=0,75 \\
 & 0,5x-0,3z=0,01 & (-4) & -2y+1,2z=-0,04 \\
 & 0,6z-0,5x=0,13 & (7) & 3,5x+1,2z=0,71
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & -3,5x+4,2z=0,91 & & z=0,3 \\
 & 3,5x+1,2z=0,71 & & x=0,1 \\
 & 5,4z=1,62 & & y=0,2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 15. & x-2y+3z=4 & & x-2y+3z=4 \\
 & 2x-4y+6z=5 & & 2x-4y+6z=5 \\
 & x+y+z=9 & (2)-(4) & 3x+5z=22 \quad (-2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & 2x-4y+6z=5 & & 4x+4y+4z=36 \\
 & 4x+4y+4z=36 & & 6x+10z=41 \\
 & 6x+10z=41 & & 0=-370
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 16. & 3x+y-2z=1 & (-2)-(-3) & -6x-2y+4z=-2 \\
 & 6x+2y-4z=2 & & 6x+2y-4z=2 \\
 & 9x+3y-6z=3 & & 0=0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & -9x-3y+6z=-3 & & -9x-3y+6z=-3 \\
 & 9x+3y-6z=3 & & 0=0
 \end{array}$$

indeterminación  
infinitas soluciones

$$\begin{array}{llll}
 17. & x/2+y/3+z/4=9 & (1/2) & x/2+y/3+z/4=9 \\
 & x/3-y/4+z/2=3 & (-1/2) & -x/6+y/8-z/4=-3/2 \\
 & x/6+y/2-z/8=6 & & x/3+11y/24=15/2 \quad (2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & x/4+y/6+z/8=9/2 & & x/6+y/2-z/8=6 \\
 & x/6+y/2-z/8=6 & & 5x/12+2y/3=21/2 \quad (-11/8) \\
 & 2/3+22y/24=15 & & \\
 & -55x/96-22y/24=-23/16 & & x=6; y=12; z=8 \\
 & 3x/32=9/16; x=6 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 18. & x/5-y/8-z/6=-2 & & x/5-y/8-z/6=-2 \\
 & x/2+y/4-z/3=6 & (-1/2) & -x/4-y/8+z/2=-3 \\
 & -x/4+y/8+z/12=-1 & & -x/4-y/8+z/2=-3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 & x/5-y/8-z/6=-2 & \textcircled{1} \cdot (1/4) \wedge \textcircled{2} & x/8+y/16-z/12=3/2 \\
 & -x/4-y/8+z/2=-3 & & -x/4+y/8+z/12=-1 \\
 & -x/20-y/4=-5 \quad (1/2) & & -x/8+3y/16=1/2 \quad (-1/5) \\
 & -x/40-y/8=-5/2 & & x/40-3y/80=-1/10
 \end{array}$$

$$-x/40 - y/8 = -5/2$$

$$x/40 - 3y/80 = -1/10$$

$$-13y/80 = -13/5 \rightarrow y = 16; x = 20; z = 24$$

$$19. \begin{aligned} (x+y)/10 - z/6 &= 2 \rightarrow 3x+3y-5z=60 \quad (4) & 12x+12y-20z=240 & 15x+12y+12z=60 & x: \\ x/4 + (y+z)/5 &= 1 \rightarrow 5x+4y+4z=20 \quad (5) \rightarrow (3) & 25x+20y+20z=100 & 12x+10y-12z=180 & y: \\ y/6 + (x-z)/5 &= 3 \rightarrow 6x+5y-6z=90 \quad (2) & 37x+32y=340 \quad (1) & 27x+22y=240 \quad (-16) & z: \end{aligned}$$

$$20. \begin{aligned} 3x/2 + 4y/3 + 5z/4 &= 3(1/2) - (y/3) & 3x/4 + 2/3y + 5z/8 &= 3/2 & x/2 + 4y/9 + 5z/12 &= 1 & 2/3x + 4y/9: \\ 5x/4 + 2y/3 - 5z/8 &= 5/6 & 5x/4 + 2/3y - 5z/8 &= 5/6 & -x/4 - y/3 - 5z/12 &= -3/4 & -x - 4y/9 =: \\ x/20 + y/15 + z/12 &= 3/20 \quad (-5) & 2x + 4/3y &= 7/3 \quad (1/3) & x/4 + y/2 &= 1/4 \quad (-4) & -x/3 = -2/9 \\ x &= 2/3; y = 3/4; z = 4/5 \end{aligned}$$

$$21. \begin{aligned} 2/x - 1/y &= 2 \quad (3) & 6/x - 3/y &= 6 & -6/x - 18/z &= -108 & z = 1/5 \\ 3/y - 2/z &= 2 & 3/y - 2/z &= 2 & 6/x - 2/z &= 8 & x = 1/3 \\ 1/x + 3/z &= 18 \quad (-6) & 6/x - 2/z &= 8 & -20/z &= -100 & y = 1/4 \end{aligned}$$

$$22. \begin{aligned} 1/x + 1/y + 1/z &= 8 \quad (3) \rightarrow (2) & 3/x + 3/y + 3/z &= 24 & -2/x - 2/y - 2/z &= -16 & 25/x + 35/z &= 80 & x: \\ 2/x - 3/y + 4/z &= -8 & 2/x - 3/y + 4/z &= -8 & 5/x + 2/y - 3/z &= 44 & 21/x - 35/z &= 196 & z: \\ 5/x + 2/y - 3/z &= 44 & 5/x + 7/z &= 16 \quad (5) & 3/x - 5/z &= 28 \quad (7) & 46/x &= 276 & y: \end{aligned}$$

$$23. \begin{aligned} 10/x + 8/y - 9/z &= 1 \quad (2) - 5 & 20/x + 16/y - 18/z &= 2 & 50/x + 40/y - 45/z &= 5 & 65/x + 76/y &= 32 & x: \\ 15/x + 20/y + 6/z &= 10 \quad (3) & 45/x + 60/y + 18/z &= 30 & 40/x - 36/y + 45/z &= 18 & -1090/x - 76/y &= -437 & y: \\ 20/x - 12/y + 15/z &= 6 \quad (3) & 65/x + 76/y &= 32 & 110/x + 4/y &= 23 \quad (-19) & -2025/x &= -405 & z: \end{aligned}$$

$$24. \begin{aligned} 4/x + 6/y + 7/z &= 0 \quad (2) - (3) & 8/x + 12/y + 14/z &= 0 & -12/x - 18/y - 21/z &= 0 & 10/x + 21/y &= -1.5 & x = -3 \\ 2/x + 9/y - 14/z &= -1.5 & 2/x + 9/y - 14/z &= -1.5 & 6/x - 3/y + 21/z &= -0.5 & -6/x - 21/y &= -0.5 & y = 6 \\ 6/x - 3/y + 21/z &= -0.5 & 10/x + 21/y &= -1.5 & -6/x - 21/y &= -0.5 & 4/x &= -2 & z = 7 \end{aligned}$$

$$25. \begin{aligned} ax + y - z &= a^2 + a - 1 & ax + y - z &= a^2 + a - 1 & ax - a^2y - az &= -a(a^2 - a + 1) & (a^2 - 1)x + (a + 1)y &= 2a^2(a + 1) \\ -x + ay + z &= a^2 - a + 1 \quad (-a) & -x + ay + z &= a^2 - a + 1 & x - y + az &= a & -(a^2 - 1)x + (a^2 + 1)(a - 1)y &= -(a^2 - 1) \\ x - y + az &= a & (a + 1) \cdot (a - 1)x + (a + 1)y &= 2a^2 & (a + 1)x - (a^2 + 1)y &= a^2 - a^3 - (a - 1) & a(a^2 + 3)y &= a^3(a^2 + 3) \\ y &= a; x = a; z = 1 \end{aligned}$$

$$26. \begin{aligned} bx - ay + z &= c \quad (b) \rightarrow (a) & b^2x - ab^2y + bz &= bc & abx - a^2y + az &= ac \\ x + cy - bz &= a & x + cy - bz &= a & cx + y - az &= b \\ cx + y - az &= b & (b^2 + 1)x + (c - ab)y &= a + bc & (ab + c)x + (1 - a^2)y &= b + ac \\ (b^2 + 1)x + (c - ab)y &= a + bc \quad (1 - a^2) & (ab + c)x + (1 - a^2)y &= b + ac \quad (-c - ab) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1-a^3)(b^3+1)x + (1-a^3)(c-ab)y &= (1-a^3)(a+bc) \\
 - (ab+c)(c-ab)x - (1-a^3)(c-ab)y &= - (c-ab)(b+ac) \\
 (1+b^3-a^3-c^3)x &= a(1+b^3-a^3-c^3) \rightarrow x=a; y=b; z=c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad ax+by &= 0 \quad (c) \quad b^3x-bcy+abz=b^3 & (ac+b^3)x-bcy=b(2ac+b^3) & x=b \\
 bx-cy+az &= b^2 \quad (b) \quad \frac{acx}{-abz} = \frac{2abc}{-2abc} & \frac{acx}{+bcy} = 0 & y=-a \\
 cx-bz &= 2bc \quad (a) \quad (ac+b^3)x-bcy=b(2ac+b^3) & (2ac+b^3)x=b(2ac+b^3) & z=-c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad ax-ay+z &= a^2 \quad (-a) \rightarrow (-b) \quad -a^2x+a^2y-az=-a^3 & -abx+aby-bz=-a^2b \\
 1bx-by+az &= 2ab+b^2 & -2bx-by+az=2ab+b^2 & x+y+bz=a+2b \\
 x+y+bz &= a+2b & (1+ab)(2b-a^2)x+(a^2-b)y=b^2+2ab-a^3 & (1-ab)x+(1+ab)y=a-a^3b+2b \\
 (1+ab)(2b-a^2)x+(a^2-b)(1+ab)y &= (1+ab)(b^2+2ab-a^3) \\
 - (1-ab)(a^2-b)x - (a^2-b)(1+ab)y &= - (a^2-b)(a-a^3b+2b) \\
 (3b-2a^2+ab^3)x &= (a+b)(3b-2a^2+ab^3) \rightarrow x=a+b; y=b; z=0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29. \quad x+y+z &= 6 & y+z+u &= 9 & y+z+u &= 9 & x+y+z &= 6 & x+y+z &= 6 \\
 y+z+u &= 9 & -x-z-u &= -8 & -x-y-u &= -7 & -x+y &= 1 & -x &+z=2 \\
 z+u+x &= 8 \quad (1) & -x+y &= 1 & -x+z &= 2 & 2y+z &= 7 \quad (-2) & y+2z &= 8 \\
 u+x+y &= 7 \quad (-1) & & & & & & & & \\
 -4y-2z &= -14 & & & & & & & & \\
 y+2z &= 8 & & & & & & & & \\
 -3y &= -6 & \rightarrow y=2; x=1; z=3; u=4 & & & & & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30. \quad x+y+z+u &= 4 \quad (-2) \rightarrow (-3) & x+y+z+u &= 4 & -2x-2y-2z-2u &= -8 \\
 x+2y+3z+4u &= 3 \quad (-1) & -x-2y-3z-4u &= -3 & 2x+3y+5z+6u &= 9 \\
 2x+3y+5z+6u &= 9 & -y-2z-3u &= 1 \quad (7) & y+3z+4u &= 1 \\
 3x-4y+2z-3u &= 41. & & & & & & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -3x-3y-3z-3u &= -12 & -y-2z-3u &= 1 & 7y+14z+21u &= -7 \\
 3x-4y+2z-3u &= 41 & y+3z+4u &= 1 & -7y-7z-7u &= 7 \\
 -7y-z-6u &= 29 & z+u &= 2 \quad (-13) & 13z+15u &= 22
 \end{aligned}$$

$$-13z-13u = -26$$

$$13z+15u = 22$$

$$2u = -4 \rightarrow u = -2; z = 4; y = -3; x = 5$$

## Ejercicio 109

Desarrollar los determinantes siguientes:

1.  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2.  $\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -p & 2 \end{vmatrix} = 10 + 9p$

3.  $\begin{vmatrix} A & B \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3A - 2B$

4.  $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2$

Hallar el valor numérico de los determinantes siguientes:

5.  $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$

6.  $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7$

7.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

8.  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 16 = 37$

9.  $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$

10.  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$

11.  $\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2$

12.  $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/5 & 1/6 \end{vmatrix} = 1/12 - 1/15 = 1/60$

Resolver por determinantes los siguientes sistemas:

13.  $4x + 3y = 17$

$2x + 5y = 19$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 3 \\ 19 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{85 - 57}{20 - 6} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{76 - 34}{20 - 6} = 3$$

14.  $3x - 8y = 20$

$2x + 3y = 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{60 + 40}{9 + 16} = 4 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15 - 40}{25} = -1$$

15.  $x - 2y = 9$

$3x - 11y = 15$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 15 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-36 + 30}{-4 + 6} = -3 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{15 - 27}{2} = -6$$

16.  $2x + 5y = 60$

$7x - 3y = 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-180 - 25}{-6 - 35} = 5 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 60 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 420}{-41} = 10$$

$$17. \begin{cases} 8x + y = 11,5 \\ 6x - 5y = 11,5 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 11,5 & 1 \\ 11,5 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-57,5 - 11,5}{-40 - 6} = 1,5 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 11,5 \\ 6 & 11,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{92 - 69}{-46} = -0,5$$

$$18. \begin{cases} 10x - 7y = 95 \\ 4x + 9y = -21 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 95 & -7 \\ -21 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{855 - 147}{90 + 28} = 6 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 95 \\ 4 & -21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-210 - 380}{118} = -5$$

$$19. \begin{cases} 0,2x + 0,3y = 0,8 \\ 0,4x - 0,5y = 3,8 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 3,8 & -0,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & -0,5 \end{vmatrix}} = \frac{-0,4 - 1,14}{-0,1 - 0,12} = 7 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 3,8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & -0,5 \end{vmatrix}} = \frac{0,76 - 0,32}{-0,22} = -2$$

$$20. \begin{cases} x/2 - y/3 = 1 \\ 3x/4 + y/6 = 7/2 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1/3 \\ 7/2 & 1/6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 3/4 & 1/6 \end{vmatrix}} = \frac{1/6 + 7/6}{1/12 + 1/4} = 4 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/4 & 7/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 3/4 & 1/6 \end{vmatrix}} = \frac{7/4 - 3/4}{1/3} = 2$$

### Ejercicio 110

Desarrollar los determinantes siguientes: (Método de Sarrus)

$$1. \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & -b & 1 & a \\ -a & 1 & c & -a & 1 \\ b & -c & 1 & b & -c \end{vmatrix} = 1 + abc - abc + a^2 + c^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$2. \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b & a & c \\ b & a & c & b & a \\ c & b & a & c & b \end{vmatrix} = a^3 + c^3 + b^3 - abc - abc - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Hallar el valor numérico de los determinantes siguientes:

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 60 + 0 + 16 - 5 = 37$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 15 - 12 - 18 - 10 + 6 = -13$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 72 - 48 - 105 = 0$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 1 & 5 \end{vmatrix} = +0 + 6 + 175 - 210 - 10 - 0 = -39$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 - 1 + 1 = -4$$

$$8. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 16 - 9 - 20 + 5 + 24 - 24 = -8$$

$$9. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & -1 \\ -10 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 8 & 0 \\ -10 & 2 & 4 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 10 + 48 - 32 + 12 - 0 = 38$$

$$10. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 6 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -28 - 60 + 36 + 28 - 36 + 60 = 0$$

Resolver por determinantes los sistemas siguientes:

$$11. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 19 \\ 3x + y - 2z = -5 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 19 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 19 - 15 - 5 - 9 + 38}{2 + 2 + 9 + 3 - 3 + 4} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 19 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{17} = -3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 19 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{17} = 4$$

$$12. \begin{cases} 2x - y - z = 12 \\ x + 2y + 3z = -3 \\ 4x - 3y + 2z = 6 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{48 - 9 - 18 + 12 + 108 - 6}{8 + 3 - 12 + 8 + 18 + 2} = -5; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{27} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 12 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{27} = -4$$

$$13. \begin{cases} 5x + y + 2z = -2 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ -x + 6y - 3z = 35 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 35 & 6 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-12 + 84 + 35 - 140 + 12 + 21}{-30 + 36 - 14 - 30 + 9} = -2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 35 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = 6; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 6 & 35 \end{vmatrix}}{-12} = 1$$



$$\begin{array}{l}
 14. \quad x - y + z = 3 \\
 \quad \quad 2y + 3z = 15 \\
 \quad \quad 3x + z = 12
 \end{array}
 \quad X = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 15 & 2 & 3 \\ 12 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{0+15-36-24-9+0}{0+0-9-6-3+0} = 3; \quad Y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 3 \\ 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}}{-18} = 3; \quad Z = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 15 \\ 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}}{-18} = 3$$

$$\begin{array}{l}
 15. \quad 4x + 5y - 6z = 1 \\
 \quad \quad 2x + 3z = 1 \\
 \quad \quad x - y = 0.05
 \end{array}
 \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0.05 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \frac{0+6+0.75+0+3+0}{0+12+15+0+12+0} = \frac{1}{4}; \quad Y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}}{39} = \frac{1}{5}; \quad Z = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0.05 \end{bmatrix}}{39} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{l}
 16. \quad 3x - y + 4z = 50 \\
 \quad \quad x + 2y + 3z = 47 \\
 \quad \quad 2x - y - z = 5
 \end{array}
 \quad X = \begin{bmatrix} 50 & -1 & 4 \\ 47 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{100-188-15-40+150-47}{-6-4-6-16+9-1} = 10; \quad Y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 50 & 4 \\ 1 & 47 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}}{-24} = 8; \quad Z = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 50 \\ 1 & 2 & 47 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}}{-24} = 7$$

$$\begin{array}{l}
 17. \quad 5x + 4y - 9z = 14 \\
 \quad \quad -2x + 3y + 5z = -19 \\
 \quad \quad x + y + z = -6
 \end{array}
 \quad X = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -9 \\ -19 & 3 & 5 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{42+171-120-162-70+76}{15+18+20+27-25+8} = -1; \quad Y = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 14 & -9 \\ -2 & -19 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}}{63} = -2; \quad Z = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 14 \\ -2 & 3 & -19 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}}{63} = -3$$

$$\begin{array}{l}
 18. \quad 2x + y + 1z = 3 \\
 \quad \quad x + 2y + 6z = 1 \\
 \quad \quad 3x - 3y - 4z = 10
 \end{array}
 \quad X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 10 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \frac{-24-6+60-40+54+4}{-16-6+18-12+36+4} = 2; \quad Y = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 10 & -4 \end{bmatrix}}{24} = -2; \quad Z = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l}
 19. \quad u + v + w = 12 \\
 \quad \quad 2u + 3v + 4w = 34 \\
 \quad \quad 3u + 2v - w = 20
 \end{array}
 \quad X = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 34 & 3 & 4 \\ 20 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{-36+68+80-60-96+34}{-3+4+12-9-8+2} = 5; \quad Y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 34 & 4 \\ 3 & 20 & -1 \end{bmatrix}}{-2} = 4; \quad W = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 34 \\ 3 & 2 & 20 \end{bmatrix}}{-2} = 3$$

$$\begin{array}{l}
 20. \quad 2p+3q+r=1 \\
 6p-6q-5r=46 \\
 6p-q-3r=29
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 46 & -6 & -5 \\ 29 & -1 & -3 \end{array} \right| \\
 \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{array} \right|
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{18-46-435+174-5+414}{36-6-90+36-10+54} = 6; \quad q = \frac{\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 6 & 46 \end{array} \right|}{20} \\
 \frac{-18-46-435+174-5+414}{36-6-90+36-10+54} = 6; \quad q = \frac{\left| \begin{array}{cc} 6 & 46 \\ 6 & 29 \end{array} \right|}{20} = -5
 \end{array}$$

$$r = \frac{\left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 6 & -6 \end{array} \right|}{20} = \frac{-348-6+828+36+92-522}{20} = 4$$

## Ejercicio 111

1. La suma de dos números es 10,8 y su diferencia es 4,4. ¿Cuáles son los números?

Sea  $x, y$  los números  $x+y=10,8$

$$x-y=4,4$$

$$2x=15,2 \rightarrow x=7,6; y=3,2$$

2. La diferencia de dos números es  $1/6$ . El triple del mayor menos el duplo del menor es igual a 1. ¿Cuáles son los números?

$x$  número mayor Planteo:  $x-y=1/6 \cdot (-2) \quad -2x+2y=-1/3$

$y$  número menor  $3x-2y=1 \quad \underline{3x-2y=1}$

$$x=2/3; y=1/2$$

3. Cinco veces lo que tiene A menos tres veces lo que tiene B es igual a 7\$. Tres veces lo que tiene A más dos veces lo que tiene B es igual a 46\$. ¿Cuánto tiene cada uno?

Sean A:  $x$  Planteo:  $5x-3y=7 \quad (1) \quad 10x-6y=14$

B:  $y \quad 3x+2y=46 \quad (2) \quad \underline{9x+6y=138}$

$$19x=152 \rightarrow x=8; y=11$$

A: 8\$

B: 11\$

4. La edad de Juan más el duplo de la edad de Pedro suma 65 años. El duplo de la edad de Juan menos la edad de Pedro de 30 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

J:  $x$  Planteo:  $x+2y=65 \quad x+2y=65$

P:  $y \quad 2x-y=30 \quad (2) \quad \underline{4x-2y=60}$

J: 25 años

P: 20 años

$$5x=125 \rightarrow x=25; y=20$$

5. Una lancha de motor navega río arriba a una velocidad de 21 Km por hora y río abajo a una velocidad de 27 Km por hora. Hallar la velocidad de la corriente del río y la velocidad de la lancha en agua tranquila.

río abajo  $x+y=21 \rightarrow x=24 \text{ Km/h}$

río arriba  $x-y=27 \quad y=3 \text{ Km/h}$

6. Un aeroplano vuela a una velocidad de 525 millas por hora a favor del viento y a una velocidad de 495 millas por hora en contra del mismo viento. Hallar la velocidad del viento y la velocidad del aeroplano en aire tranquilo.

$$\begin{array}{l} \text{A favor } x + y = 525 \\ \text{en contra } x - y = 495 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 510 \text{ millas/h} \\ y = 15 \text{ millas/h} \end{array}$$

7. Un bote navega 26 Km río abajo en 2 horas y 6 Km río arriba en 1 hora y 30 minutos. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

	d	v	t	
río abajo	26	$x+y$	2	Planteo: $26 = 2(x+y) \rightarrow x+y=13$ <span style="margin-left: 20px;">1h 30 min = 1.5h</span>
río arriba	6	$x-y$	1.5	

$$6 = 1.5(x-y) \quad \underline{x-y=4}$$

$$x = 8.5 \text{ Km/h}; y = 4.5 \text{ Km/h}$$

8. Un hombre rema 30 Km río abajo en 3 horas. El mismo hombre puede remar 2.5 Km río abajo en el mismo tiempo que rema 1.5 Km río arriba. Hallar la velocidad con que rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

	d	v	t	
río abajo	30	$x+y$	3	$2.5 = 1.5 \rightarrow x-4y=0 \rightarrow -x+4y=0$ $x+y=10 \quad \underline{x+y=10}$
	2.5	$x+y$	$2.5/(x+y)$	
río arriba	1.5	$x-y$	$1.5/(x-y)$	$y = 2 \text{ Km/h}; x = 8 \text{ Km/h}$

9. Una lancha de motor navega río abajo a una velocidad de 18 millas por hora y tarda doble tiempo en navegar una milla río arriba que en navegar una milla río abajo. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

Planteo:  $x+y=18$   $-x-y=-18$   $x=13.5 \text{ millas/h}$

$$2t_1 = t_2 \quad \frac{2}{x+y} = \frac{1}{x-y} \rightarrow x-3y=0 \quad \underline{x-3y=0}$$

$$y = 4.5 \text{ millas/h}$$

10. Un bote navega 10 Km río abajo en 75 minutos y al regreso demora 150 minutos en recorrer la misma distancia. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

	d	v	t	
río abajo	10	$x+y$	1.25	$75 \text{ min} = 1.25 \text{ h}$ <span style="margin-left: 20px;"><math>10 = 1.25(x+y) \rightarrow x+y=8 \Rightarrow x=6 \text{ Km/h}</math></span>
río arriba	10	$x-y$	2.5	

$$150 \text{ min} = 2.5 \text{ h} \quad 10 = 2.5(x-y) \quad x-y=4 \quad y=2 \text{ Km/h}$$

11. Un aeroplano hace un viaje de 300 millas en 1 hora y 40 minutos si vuela a favor del viento pero si vuela en contra del mismo viento entonces tarda 2 horas. Hallar la velocidad del aeroplano en aire tranquilo y la velocidad del viento. 1h 40 min = 5/3 h

	d	v	t	
A favor	300	$x+y$	5/3	$300 = 5/3(x+y) \rightarrow x+y=180$ $300 = 2(x-y) \rightarrow \underline{x-y=150}$ $x = 165 \text{ millas/h del aeroplano}; y = 15 \text{ mill/h}$
En contra	300	$x-y$	2	

12. Navegando a toda velocidad río arriba una canoa automóvil hace 18 millas por hora. Navegando a media velocidad río abajo hace 15 millas por hora. Hallar la velocidad máxima de la canoa en agua tranquila y la velocidad de la corriente.

$$\begin{array}{l} x-y=18 \\ x/2+y=15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -x+y=-18 \\ \underline{x+2y=30} \end{array}$$

$$y = 4 \text{ mill/h}; x = 22 \text{ mill/h}$$

13. Si a la cuarta parte del mayor de dos números se le suma la tercera parte del menor se obtiene 14. Si el duplo del mayor se divide entre el menor, el cociente es 6 y el resto es 8. Hallar los números.

$$\begin{array}{l} \text{Nº mayor } X \quad \frac{2X + \frac{Y}{3}}{6} \rightarrow 2X = 6Y + 8 \\ \text{Nº menor } Y \quad X/4 + Y/3 = 14 \rightarrow 3X + 4Y = 168 \end{array} \quad \text{resolviendo el sistema}$$

$$X - 3Y = 4 \rightarrow X - 3Y = 4 \cdot (-3) \rightarrow X = 40; Y = 12$$

- \* 14. La tercera parte de un número, más la mitad de otro, es 13. Si se divide el primero entre el segundo, el cociente es 2, y el resto es 4. Hallar los números.

$$\begin{array}{l} \text{Sean } X, Y \text{ los } \text{Nº} \quad X \overline{)Y} \rightarrow X = 2Y + 4 \quad 2X + 3Y = 78 \quad Y = 10 \\ X/3 + Y/2 = 13; \quad 4 \quad 2 \quad X - 2Y = 4 \cdot (-2) \Rightarrow X = 24 \end{array}$$

15. En una granja  $2/3$  del número de gallinas blancas es igual a  $5/7$  del número de gallinas pintadas  $2/5$  del número de gallinas blancas, más 10 gallinas, es igual a la mitad del número de gallinas pintadas. ¿Cuántas gallinas hay de cada clase?

$$\begin{array}{l} \text{gall. blancas } X \quad 2X/3 = 5Y/7; \quad 14X - 15Y = 0 \quad 14X - 15Y = 0 \\ \text{gall. pintadas } Y \quad 2X/5 + 10 = Y/2; \quad 4X - 5Y = -100 \cdot (-3) \quad -12X + 15Y = 300 \end{array}$$

$$X = 150 \text{ blancas}; Y = 140 \text{ pintadas}$$

16. Dos números están en la relación de 5 a 8. Si a cada uno se le suma 6, los nuevos números están entonces en la relación de 2 a 3. Hallar los números primitivos.

$$\begin{array}{l} \text{N: } X \quad X/Y = 5/8 \quad 8X - 5Y = 0 \quad (2) \quad 16X - 10Y = 0 \\ \text{D: } Y \quad \frac{X+6}{Y+6} = \frac{2}{3} \quad 3X - 2Y = -6 \quad (-5) \quad -15X + 10Y = 30 \end{array}$$

$$X = 30; Y = 48$$

17. Si se suma 4 al numerador y al denominador de un quebrado, la fracción resultante es reducible a  $1/2$ . Si se resta 2 del numerador y del denominador la fracción resultante es equivalente a  $3/8$ . ¿Cuál es la fracción original?

$$\begin{array}{l} \text{N: } X \quad \frac{X+4}{Y+4} = \frac{1}{2} \rightarrow 2X - Y = -4 \quad (-3) \quad -6X + 3Y = 12 \\ \text{D: } Y \quad \frac{X-2}{Y-2} = \frac{3}{8} \rightarrow 8X - 3Y = 10 \quad (-5) \quad -15X + 10Y = 30 \end{array}$$

$$X = 11; Y = 26$$

18. En una batalla del Norte de África había 4 tanques italianos por cada 3 tanques ingleses.

Durante la batalla los italianos perdieron 20 tanques y los ingleses 10 tanques y quedaron entonces 5 tanques italianos por cada 4 tanques ingleses. ¿Cuántos tanques italianos y cuántos tanques ingleses había al comienzo de la batalla?

$$\begin{array}{l} \text{I. italianos } X \quad X/Y = 4/3 \quad 3X - 4Y = 0 \quad (5) \quad 15X - 20Y = 0 \quad X = 120 \text{ italianos} \\ \text{I. ingleses } Y \quad \frac{X-20}{Y-10} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4X - 5Y = 30 \quad (-4) \quad -16X + 20Y = -120 \quad Y = 90 \text{ ingleses} \end{array}$$

$$X = 120$$

19. La tercera parte de lo que tiene Juan más la cuarta parte de lo que tiene Ramón es igual a 16\$. Si Juan le diese 4\$ a Ramón entonces la quinta parte de lo de Juan más la sexta parte de lo de Ramón serían 10\$. ¿Cuánto tiene cada uno al principio?

$$\text{J: } X \quad X/3 + Y/4 = 16 \rightarrow 4X + 3Y = 192 \quad (5) \quad \text{resolviendo } X = 24$$

$$\text{R: } Y \quad (X-4)/5 + (Y+4)/6 = 10 \quad 6X + 5Y = 304 \quad (-3) \quad Y = 32$$

10. La edad de un hijo más la tercera parte de la edad del padre suma 22 años. Dentro de 6 años la edad del padre excederá al duplo de la edad del hijo en 10 años. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

$$\begin{array}{llll}
 \text{Hijo : } X & X + \frac{Y}{3} = 22 & 3X + Y = 66 & X = 10 \text{ años} \\
 \text{padre : } Y & Y + 6 = 2(X + 6) + 10 & 2X - Y = -16 & Y = 36 \text{ años} \\
 & 5X = 50 \rightarrow X = 10 \text{ hijo} & & 
 \end{array}$$

11. Tres veces la edad de Alicia menos cuatro veces la edad de Ester son 3 años. Hace 4 años el duplo de la edad de Ester excedía en 1 año a la edad de Alicia. ¿Cuáles es la edad actual de cada una?

$$\begin{array}{llll}
 \text{Alicia } X & 3X - 4Y = 3 & 3X - 4Y = 3 & \text{Alicia } 13 \text{ años} \\
 \text{Ester } Y & 2(Y - 4) = (X - 4) + 1 \quad (-2) & -2X + 4Y = 10 & \text{Ester } 9 \text{ años} \\
 & X = 13 ; Y = 9 & & 
 \end{array}$$

12. Tomás y Pedro juegan entre sí. Al comenzar el juego la tercera parte del dinero de Pedro excede en 4 \$ a la cuarta parte del dinero de Tomás. Al terminar el juego Tomás ha perdido 30 \$ y entonces el duplo de lo que le queda a Tomás, más 2 \$, es lo que tiene Pedro. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

$$\begin{array}{llll}
 \text{Tomás } X & \text{Tomás pierde } 30 \quad X - 30 & \Rightarrow \quad \frac{Y}{3} = \frac{X}{4} + 4 & 3X - 4Y = -48 \Rightarrow X = 80 \\
 \text{Pedro } Y & \text{Pedro gana } 30 \quad Y + 30 & 2(X - 30) + 2 = Y + 30 & 2X - Y = 88 \quad (-4) \quad Y = 72
 \end{array}$$

13. Se reparten 80 monedas entre 3 niños y 4 niñas. Cada niño recibe igual número de monedas, y las niñas otro número, igual para cada una de ellas. Si ese reparto se hubiere hecho

$$\begin{array}{llll}
 \text{Niños } X & 3X + 4Y = 80 \quad (2) & 6X + 8Y = 160 \\
 \text{Niñas } Y & 2X + 5Y = 86 \quad (-3) & -6X - 15Y = -258 \\
 & & Y = 14 ; X = 8
 \end{array}$$

14. El empresario de un cine resuelve contribuir a una obra benéfica con 60 centavos por cada entrada de mayores y con 40 por las de niños. Asisten 250 personas y el importe que dona es de 128 pesos. ¿A cuántas entradas de mayores y cuántas de niños corresponden?

$$\begin{array}{llll}
 \text{Mayores } X & X + Y = 250 & (-0,4) & -0,4X - 0,4Y = -100 \\
 \text{Niños } Y & 0,6X + 0,4Y = 128 & & 0,6X + 0,4Y = 128 \\
 & & & 0,2X = 28 \rightarrow X = 140 ; Y = 110
 \end{array}$$

15. Con el mismo fin, otro empresario contribuyó con parte del importe de las entradas de varias funciones. En la primera función, entraron 144 mayores y 240 niños, y se reunieron 264 \$; en la segunda función entraron 180 mayores y 150 niños, y se alcanzó a 255 \$. ¿Con cuánto contribuyó por entrada de mayor y con cuánto por la de niño?

$$\begin{array}{llll}
 \text{Sea } X \text{ el valor q. paga un mayor} & 144X + 240Y = 264 \rightarrow 36X + 60Y = 66 & Y = 0,5 \\
 \text{Sea } Y \text{ el valor q. paga un niño} & 180X + 150Y = 255 \rightarrow 36X + 30Y = 51 \quad (-1) & X = 1 \\
 & \Rightarrow \text{mayor } \$1,00 ; \text{niño } \$0,50 & & 
 \end{array}$$

16. Cuarenta y una monedas, de 5 y 10 centavos suman 2,95 \$. Hallar cuántas hay de cada clase.

Monedas de 5 céntos  $X$   $X + Y = 41$   $(-0,1)$   $-0,1X - 0,1Y = -4,1$

Monedas de 10 céntos  $Y$   $0,05X + 0,10Y = 2,95$   $0,05X + 0,1Y = 2,95$

$$-0,05X = -1,15 \rightarrow X = 23; Y = 18$$

27. La diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número de dos cifras es 1. El número aumentado en 6 es igual a 7 veces la suma de las cifras. Hallar el número.

D:  $X$   $X - Y = 1$  ;  $X - Y = 1$   $X - Y = 1$

M:  $Y$   $10X + Y + 6 = 7(X + Y)$   $X - 2Y = -2$   $(-1)$   $-X + 2Y = 2$

N:  $10X + Y$

$$Y = 3; X = 4 \rightarrow \text{El número es } 43$$

28. La suma de las cifras de un número de dos cifras es 8. Si al número se añaden 18 el número resultante está formado de las mismas cifras en orden inverso. Hallar el número primitivo.

D:  $X$  N:  $10X + Y$   $X + Y = 8$   $X + Y = 8$

M:  $Y$  N: Inv.  $10Y + X$   $10X + Y + 18 = 10Y + X$   $X - Y = -2$

$$X = 3; Y = 5 \rightarrow \text{El N: es } 35$$

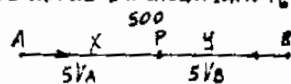
29. En un número de dos cifras el triple de las decenas más el duplo de las unidades es 16. Si el número se divide entre la suma de los valores absolutos de sus cifras el cociente es 3 y el residuo es 4. ¿Cuál es el número?

D:  $X$   $3X + 2Y = 16$   $3X + 2Y = 16$

M:  $Y$   $10X + Y \mid \begin{matrix} X+Y \\ 4 \end{matrix} ; \frac{10X+Y-4}{X+Y} = 3$   $7X - 2Y = 4$

N:  $10X + Y$   $4 \quad 3$   $X + Y$   $X = 2; Y = 5 \rightarrow \text{El N: es } 25$

30. La distancia entre A y B es de 500 km. Un móvil parte de A hacia B, con velocidad constante, al mismo tiempo que otro sale de B hacia A, también con velocidad constante, y tardan 5 horas en encontrarse. Si el segundo móvil saliese de B en dirección opuesta a A, el primero tardaría 25 horas en alcanzarlo. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?



$$V_A + V_B = 100$$

$$V_A - V_B = 20$$

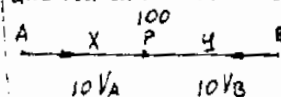
$$2V_A = 120 \rightarrow V_A = 60 \text{ km/h}$$

$$V_B = 40 \text{ km/h}$$

①  $X + Y = 500$  ②  $X = 500 + Y$

$$5V_A + 5V_B = 500 \quad 25V_A = 500 + 25V_B$$

31. Dos muchachos están a 100 metros de distancia. Si corren en sentido opuesto, uno hacia el otro, se encuentran en 10 segundos, pero si corren en el mismo sentido el más rápido alcanza al otro en 50 segundos. Hallar la velocidad de cada uno.



$$V_A + V_B = 10$$

$$V_A - V_B = 2$$

$$2V_A = 12 \rightarrow V_A = 6 \text{ m/s}$$

$$V_B = 4 \text{ m/s}$$

$X + Y = 100$

$X = 100 + Y$

①  $10V_A + 10V_B = 100$  ②  $50V_A = 100 + 50V_B$

32. Una sociedad científica invirtió cierta suma de dinero al 5% para instituir, con el interés de esta suma, un premio anual. La tasa del interés fue reducida al 4% y entonces la sociedad tuvo que incrementar el capital invertido en 750\$ para poder mantener el mismo premio. ¿

cuánto ascendía el premio?

Sea  $x$  la suma a capital;  $y$  el interés o premio producido por el capital  $x$

$$I = \frac{CTI}{100} \quad \text{ó} \quad i = 0,01CT$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$0,05x = 0,04(x + 750) \rightarrow x = 3000$$

$$\textcircled{1} \quad y = 0,05x$$

$$y = 0,05(3000) \rightarrow y = \$150$$

$$\textcircled{2} \quad y = (x + 750) 0,04$$

33. ¿Cuántas libras de plomo y cuántas de cobre puro se deben agregar a 200 libras de una aleación que contiene 20% de plomo y 30% de cobre para obtener una aleación que contenga 25% de plomo y 50% de cobre?

Plomo  $x$      $\textcircled{1} \quad x + y = 200$

$$x + y = 200$$

Cobre  $y$      $\textcircled{2} \quad \frac{0,2(200) + x}{0,3(200) + y} = \frac{25}{50}$

$$2x - y = -20$$

$$3x = 180 \rightarrow x = 60; y = 140$$

34. Dividir el número  $m$  en dos partes que estén entre sí como  $p$  es a  $q$ .

$$x + y = m$$

$$\frac{py}{q} + y = m \rightarrow y = \frac{mq}{p+q}$$

$$x/y = p/q \rightarrow x = py/q$$

35. Dos máquinas de imprenta trabajando juntas pueden imprimir un libro en 20 horas. A las 15 horas una de ellas se rompe y entonces tarda la otra 4 horas más en terminar el trabajo. ¿Cuántas horas necesitaría cada máquina para imprimir ella sola el libro?

1ª  $x$      $\textcircled{1} \quad 1/x + 1/y = 1/20$

$$20y + 20x = xy$$

$$4x - 5x = 0$$

2ª  $y$      $\textcircled{2} \quad 1/5x = 1/4y \quad (4)$

$$16y - 20x = 0$$

$$4x - 5(3x) = 0$$

$$20h - 15h = 5$$

$$36y = xy$$

$$y = 180/4$$

$$15h + 4h = 24 \quad y \quad 24h - 20h = 4$$

$$x = 36h$$

$$y = 45h$$

36. Para un experimento necesitamos 18 gramos, en total, de dos productos, y los pagamos 5,80\$. Uno de ellos cuesta 0,30\$ el gramo y el otro 0,35\$. ¿Cuántos gramos hemos comprado de cada uno?

Sea  $x$  gramos de 0,30\$

$$x + y = 18 \quad (-0,30)$$

$$-0,30x - 0,30y = -5,4$$

$y$  gramos de 0,35\$

$$0,30x + 0,35y = 5,8$$

$$0,30x + 0,35y = 5,8$$

$$0,05y = 0,4 \rightarrow y = 8; x = 10$$

37. Un granjero desea cercar un lote rectangular de terreno. Si usa un material que cuesta 2,40\$ por vara para el frente del lote y un material que cuesta 1,10\$ por vara para los otros tres lados, la cerca le cuesta 589,50\$. Si usa el material más caro para los cuatro lados la cerca le cuesta 648\$. ¿Cuáles son las dimensiones del lote?

$$\textcircled{1} \quad 2,40x + 1,10(x + 2y) = 589,50$$

$$4,5x + 4,2y = 589,5$$

$$x = 75v$$

$$\textcircled{2} \quad 2,40(2x + 2y) = 648 \rightarrow x + y = 135 \quad (-4,2)$$

$$-4,2x - 4,2y = -567$$

$$y = 60v$$

$$0,3x = 22,5 \rightarrow x = 75v$$

38. Dos nadadores A y B se entran para una competencia de relevo en una piscina de 30 metros de largo. A nada 2 largos y le sigue B que nada también 2 largos y lo hacen en un tiempo total de 76 segundos. Si A nada 1 largo y B 3 largos, entonces lo hacen en 74 segundos.

Hallar la velocidad de cada uno.

Sea $x$ la velocidad de A	①	A	60	$x$	76	②	A	30	$x$	74
y la velocidad de B		B	60	$y$			B	90	$y$	

$$t_A + t_B = 76$$

$$① \quad 60/x + 60/y = 76$$

$$60/x + 60/y = 76$$

$$② \quad 30/x + 90/y = 74 \quad (-2)$$

$$-60/x - 180/y = -148$$

$$-120/y = -72 \rightarrow y = 5/3 ; x = 3/2$$

39. Dos corredores se entrenan en una pista circular que tiene 180 metros de circunferencia. Cuando corren en sentidos opuestos se encuentran cada 15 segundos. Cuando corren en el mismo sentido el más rápido alcanza al otro cada 90 segundos. Hallar la velocidad de cada uno.

$$d_A + d_B = 180 \rightarrow 15V_A + 15V_B = 180 \quad ①$$

$$d_A - 180 = d_B \rightarrow 90V_A - 90V_B = 180 \quad ②$$

$$V_A + V_B = 12$$

$$V_A - V_B = 2$$

$$V_A = 7 \text{ m/s} ; V_B = 5 \text{ m/s}$$

40. Cierta día la velocidad del viento era de 40 millas por hora a 2000 pies de altura y de 25 millas por hora (en el mismo sentido) a 6000 pies de altura. Un aeroplano voló cierta distancia a 2000 pies de altura en 4 horas y regreso a 6000 pies de altura en 5 horas. Hallar la velocidad del aeroplano en aire tranquilo y la distancia que voló en el viaje de ida.

Sea  $x$  la distancia

		$d$	$v$	$t$	
y la velocidad	ida (a favor)	2000	$x$	$y + 40$	4
	regreso (en contra)	6000	$x$	$y - 25$	5

$$① \quad x = 4(y + 40) \rightarrow 4(y + 40) = 5(y - 25) ; \rightarrow y = 285 \text{ millas/h}$$

$$② \quad x = 5(y - 25)$$

$$x = 1300 \text{ millas}$$

### Ejercicio 112

1. La suma de tres números es 13. El triple del menor más el mediano excede en 5 al duplo del mayor. El triple del mayor más el duplo del menor excede en 4 a cuatro veces el mediano. Hallar los números.

$$\text{Mayor } x \quad x + y + z = 13$$

$$x + y + z = 13$$

Resolviendo se obtiene  $x = 5$

$$\text{Mediano } y \quad 3z + y = 5 + 2x$$

$$2x - y - 3z = -5$$

$$y = 4,5$$

$$\text{Menor } z \quad 3x + 2z = 4 + 4y$$

$$3x - 4y + 2z = 4$$

$$z = 3,5$$

2. La suma de tres números es 36. El mayor más el duplo del mediano más el triple del menor suma 58. El duplo del mayor más el triple del mediano menos el quintuplo del menor es igual a 40. ¿Cuáles son los números?



Mayor	$x$	$x + y + z = 36$	Resolviendo	$x = 20$
Mediano	$y$	$x + 2y + 3z = 58$		$y = 10$
Menor	$z$	$2x + 3y + 5z = 40$		$z = 6$

3. La suma de las edades de Manuel, Pedro y Julián es 44 años. La suma de las edades de Manuel y Pedro excede en 10 años a la edad de Julián. La suma de las edades de Manuel y Julián es un año menos que el duplo de la edad de Pedro. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Manuel	$x$	$x + y + z = 44$	Resolviendo	$x = 12$	M 12 años
Pedro	$y$	$x + y = 10 + z$		$y = 15$	P 15 años
Julián	$z$	$x + z + 1 = 2y$		$z = 17$	J 17 años

4. A, B y C tienen 52 \$ entre los tres. Lo que tiene C es  $\frac{3}{10}$  de lo que tiene A y B conjuntamente. Si B le diese 5 \$ a A entonces A y B tendrían la misma cantidad. ¿Cuánto tiene cada uno?

A:	$x$	$x + y + z = 52$	Resolviendo	$x = 15$ \$ A
B:	$y$	$z = \frac{3}{10}(x + y)$		$y = 25$ \$ B
C:	$z$	Si B da 5 a A $y - 5 = x + 5$		$z = 12$ \$ C

5. En una hora, una lancha, un automóvil y una avioneta recorrieron 510 Km. Si la lancha corre 2 horas, el automóvil 3 y la avioneta 2, hacen en total 1170 Km. Si la lancha corre 6 horas, el auto 2, y la avioneta 5, hacen 2160 Km. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

lancha	$x$	En 1 h recorren	$x + y + z = 510$	$x = 60$ Km/h
auto	$y$	$d = vt$	$2x + 3y + 2z = 1170$	$y = 150$ Km/h
avioneta	$z$		$6x + 2y + 5z = 2160$	$z = 300$ Km/h

6. La suma de las edades de tres hermanos es 35 años. El mayor tiene dos veces la edad del menor y el triple de la edad del mediano excede en 1 al duplo de la edad del mayor. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Mayor	$x$	$x + y + z = 35$	Resolviendo	$x = 16$ años
Mediano	$y$	$x = 2z$		$y = 11$ años
Menor	$z$	$3y = 1 + 2x$		$z = 8$ años

7. La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es  $180^\circ$ . En cierto triángulo el ángulo mayor es igual a la suma del mediano y del duplo del menor; y el mediano es igual a la semisuma de los otros dos. ¿Cuánto vale cada uno?

Mayor	$x$	$x + y + z = 180$	Resolviendo	$x = 100^\circ$
Mediano	$y$	$x = y + 2z$		$y = 60^\circ$
Menor	$z$	$y = \frac{(x + z)}{2}$		$z = 20^\circ$

8. Una parte de un capital de 20000 \$ está invertida al 3%, otra parte al 4% y otra al 5%, lo que produce un total un interés de 750 \$. Las inversiones al 4% y al 5% producen entre ambas 210 \$ más que la inversión al 3%. ¿A cuánto ascienden las cantidades invertidas al 3%, 4% y 5% respectivamente?

Sean  $x, y, z$  las partes del capital

$$\begin{array}{lll} X \text{ al } 3\% & X + Y + Z = 20000 & \text{Resolviendo } X = 9000 \$ \\ Y \text{ al } 4\% & 0,03X + 0,04Y + 0,05Z = 750 & Y = 7000 \$ \\ Z \text{ al } 5\% & 0,04Y + 0,05Z = 210 + 0,03X & Z = 4000 \$ \end{array}$$

9. Tengo 60 monedas, de las cuales unas son de 5 centavos, otras de 10, y las restantes de 20, con un valor total de 7,25\$. Si las de 5 centavos fueran de 10, las de 10 fueran de 20, y las de 20 fueran de 5, su valor total sería de 7,50\$. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

$$\begin{array}{lll} \text{De 5 ctvs. } X & X + Y + Z = 60 & \text{Resolviendo } X = 15 \\ 10 \text{ ctvs. } Y & 0,05X + 0,1Y + 0,2Z = 7,25 & Y = 25 \\ 20 \text{ ctvs. } Z & 0,1X + 0,2Y + 0,05Z = 7,50 & Z = 20 \end{array}$$

10. Entre A y B y C tienen 210\$. Si A da 10\$ a B y B 30\$ a C los tres tienen entonces la misma cantidad. ¿Cuánto tiene cada uno?

$$\begin{array}{lll} A: X & X + Y + Z = 210 & \text{Resolviendo } X = 100 \\ B: Y & X - 10 = Y + 10 & Y = 80 \\ C: Z & Y + 10 - 30 = Z + 30 & Z = 30 \end{array}$$

11. A y B pueden hacer un trabajo en 3 días  $3/7$ ; B y C pueden hacer el mismo trabajo en 4 días  $4/9$ ; y A y C, en 3 días  $3/4$ . ¿Cuánto tiempo tardará cada uno trabajando solo?

$$\begin{array}{lll} A: X & 1/X + 1/Y = 7/24 & \text{Resolviendo } X = 6 \text{ días} \quad 3 \frac{3}{4} = 24/7 \\ B: Y & 1/Y + 1/Z = 9/40 & Y = 8 \text{ días} \quad 4 \frac{4}{9} = 40/9 \\ C: Z & 1/X + 1/Z = 4/15 & Z = 10 \text{ días} \quad 3 \frac{3}{4} = 15/4 \end{array}$$

12. La suma de las tres cifras de un número es 12. La suma de las cifras de las centenas y decenas excede en dos a la cifra de las unidades. Si al número se suma 198 el nuevo número tiene las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es el número?

$$\begin{array}{lll} C: X & X + Y + Z = 12 & X + Y + Z = 12 \\ D: Y & X + Y = 2 + Z & X + Y = 2 + Z \\ M: Z & N: 100X + 10Y + Z & 100X + 10Y + Z + 198 = 100Z + 10Y + X \\ & N: Inv. 100Z + 10Y + X & \end{array}$$

$X = 3; Y = 4; Z = 5$   
→ El N° es 345

13. La suma de las tres cifras de un número es 15. El triple de las unidades más la cifra de las decenas excede en 1 a la cifra de las centenas. Si al número se resta 45 el nuevo número tiene las mismas cifras del número primitivo exceptuando el orden de las decenas y unidades, las cuales aparecen intercambiadas. Averiguar cuál es el número primitivo.

$$\begin{array}{lll} C: X & N: 100X + 10Y + Z & X + Y + Z = 15 \\ D: Y & N: Inv. 100X + 10Z + Y & 3Z + Y = 1 + X \\ M: Z & & \end{array}$$

$X = 8; Y = 6; Z = 1$   
El N° es 861

$$100X + 10Y + Z - 45 = 100X + 10Z + Y$$

14. La suma de las tres cifras de un número es 13. Si el número de dos cifras formado por las decenas y unidades se divide por la cifra de las centenas el cociente es 6 y el resto es 0. Si del número se resta 270 resultan intercambiadas las cifras de las centenas y decenas pero se conserva la cifra de las unidades. ¿Cuál es el número?

$$C: X \quad X + Y + Z = 13$$

$$\text{Resolviendo } X = 7; Y = 4; Z = 2$$

$$D: Y \quad 10Y + Z = 6X$$

$$\text{El N}^\circ \text{ es } 742$$

$$M: Z \quad 100X + 10Y + Z - 270 = 10X + 100Y + Z$$

15. En un número de tres cifras la cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de las decenas y unidades. El duplo de las centenas es igual al triple de las decenas. Si el número se divide por el número de dos cifras formado por sus decenas y unidades el cociente es 15 y el resto es 18. ¿Cuál es el número?

$$C: X \quad X = Y + Z$$

$$\text{El N}^\circ: 100X + 10Y + Z$$

$$\text{Resolviendo } X = 9; Y = 6; Z = 3$$

$$D: Y \quad 2X = 3Y$$

$$\text{N}^\circ \text{ de 2 cifras } 10Y + Z$$

$$\text{El N}^\circ \text{ es } 963$$

$$M: Z \quad 100X + 10Y + Z = 15(10Y + Z) + 18$$

16. La suma de las tres cifras de un número es 9. El número no varía porque se escriban sus cifras en orden inverso, y si se le suma 27 se intercambian las cifras de las decenas y unidades. Hallar el número.

$$\text{El N}^\circ: 100X + 10Y + Z; \text{ N}^\circ \text{ Invert. } 100Z + 10Y + X$$

$$C: X \quad X + Y + Z = 9$$

$$D: Y \quad 100X + 10Y + Z = 100Z + 10Y + X$$

$$\text{Resolviendo } X = 4; Y = 1; Z = 4$$

$$M: Z \quad 100X + 10Y + Z + 27 = 100X + 10Z + Y$$

$$\text{El N}^\circ \text{ es } 414$$

17. Un tanque tiene tres llaves de agua. Si se abren las llaves A y B, el tanque se llena en 6 horas; si se abren las llaves B y C, se llena en 8 horas; y si se abren las llaves A y C, se llena en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque por cada una de las llaves abiertas separadamente?

$$A: X \quad 1/X + 1/Y = 1/6$$

$$\text{Resolviendo } X = 48/7; Y = 48; Z = 48/5$$

$$B: Y \quad 1/Y + 1/Z = 1/8$$

$$A: 6 \frac{6}{7} \text{ h}; B: 48 \text{ h}; Z: 9 \frac{3}{5} \text{ h}$$

$$C: Z \quad 1/X + 1/Z = 1/4$$

18. Tres jugadores A, B, C, convienen en que el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Juegan tres partidos. A pierde el primer partido; B pierde el segundo; y C, el tercero. Si cada jugador finaliza con 16 \$, ¿cuánto tenía cada uno al comienzo del juego?

Sean X, Y, Z con lo que inicia cada uno

$$\textcircled{1} \text{ Pierde A} \rightarrow X - Y - Z \quad \textcircled{2} \text{ Pierde B: } A: 2(X - Y - Z)$$

$$B: 2Y$$

$$B: 2Y - 2(X - Y - Z) - 4Z = 3Y - X - Z$$

$$C: 2Z$$

$$C: 4Z$$

$$\textcircled{3} \text{ Pierde C: } A: 4(X - Y - Z)$$

$$B: 2(3Y - X - Z)$$

$$C: 4Z - 2(X - Y - Z) - (3Y - X - Z)$$

$$4(X - Y - Z) = 16 \quad \text{Resolviendo } X = 26 \$$$

$$\Rightarrow 2(3Y - X - Z) = 16 \quad Y = 14 \$$$

$$7Z - X - Y = 16 \quad Z = 8 \$$$

19. La dieta de un individuo se compone de 5 onzas de proteína, 2 onzas de grasa y 18 onzas de carbohidratos, y consiste en leche, cereal y huevo. Si la leche tiene 3% de proteínas 4% de grasa y 5% carbohidratos, el cereal tiene 14% de proteína, 1% de grasa y 71% de carbohidratos, y el huevo tiene 15% de proteína y 10% de grasa, hallar las onzas que debe tomar diariamente de cada alimento. (1 onza = 28,35 gramos; pero conviene resolver el problema en onzas y fracción decimal).

		Proteínas 5	grasas 2	Carbohidratos 18
leche	X	3% X	4% X	5% X
Cereal	Y	14% Y	2% Y	72% Y
Huevo	Z	15% Z	10% Z	

$$\begin{aligned}
 3\%X + 14\%Y + 15\%Z &= 5 \\
 4\%X + 2\%Y + 10\%Z &= 2 \\
 5\%X + 72\%Y &= 18
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 3X + 14Y + 15Z = 500 \\
 2X + Y + 5Z = 100 \\
 5X + 72Y = 1800
 \end{cases}
 \begin{array}{l}
 \text{Resolviendo } X=19,9 \approx 20 \text{ onzas} \\
 Y=23,6 \text{ onzas} \\
 Z=7,28 \approx 7,3 \text{ onzas}
 \end{array}$$

### Ejercicio 113 (REPASO)

Resolver algebraicamente los sistemas siguientes:

1.  $\begin{cases} 3X - Y = 10 & (3) \\ X + 3Y = 10 \end{cases}$

$$9X - 3Y = 30$$

$$\underline{X + 3Y = 10}$$

$$X = 4; Y = 2$$

2.  $\begin{cases} -4X + 3Y = 27 \\ 2X + 5Y = 19 & (2) \end{cases}$

$$-4X + 3Y = 27$$

$$\underline{4X + 10Y = 38}$$

$$Y = 5; X = -3$$

3.  $\begin{cases} 7X + 4Y = 80 & (3) \\ 5X - 6Y = 4 & (2) \end{cases}$

$$21X + 12Y = 240$$

$$\underline{10X - 12Y = 8}$$

$$X = 8; Y = 6$$

4.  $\begin{cases} 3u + 8v = -1 & (-2) \\ 6u - 6v = 3,5 \end{cases}$

$$-6u - 16v = 2$$

$$\underline{6u - 6v = 3,5}$$

$$v = -1/4; u = 1/3$$

5.  $\begin{cases} 0,6X - 0,5Y = -0,5 & (0,4) \\ 0,9X + 0,4Y = 7,3 \end{cases}$

$$0,24X - 0,2Y = -0,2$$

$$\underline{0,45X + 0,2Y = 3,65}$$

$$X = 5; Y = 7$$

6.  $\begin{cases} 0,25X + 0,17Y = 0,101 & (4) \\ 0,20X - 0,09Y = 0,013 & (-5) \end{cases}$

$$X + 0,68Y = 0,404$$

$$\underline{-X + 0,45Y = -0,065}$$

$$Y = 0,3; X = 0,2$$

7.  $\begin{cases} X/5 + Y/3 = 9 & (1/3) \\ X/3 - Y/9 = 3 \end{cases}$

$$X/15 + Y/9 = 3$$

$$\underline{X/3 - Y/9 = 3}$$

$$X = 15; Y = 18$$

8.  $\begin{cases} X/4 + Y/5 = -4 & (1/7) \\ X/6 - Y/7 = 7 & (1/5) \end{cases}$

$$X/28 + Y/35 = -4/7$$

$$\underline{X/30 - Y/35 = 7/5}$$

$$X = 12; Y = -35$$

9.  $\begin{cases} (X+Y)/2 - (X-Y)/3 = 3 \\ (X+2Y)/3 - (X-2Y)/4 = 3 \end{cases}$

$$-X - 5Y = -18$$

$$\underline{X + 14Y = 36}$$

$$Y = 2; X = 8$$

10.  $\begin{cases} (2X+Y)/5 + (2X+3Y)/6 = 6 & (9) \\ (3X-Y)/10 + (X-3Y)/6 = 8 & (2) \end{cases}$

$$198X + 189Y = 1620$$

$$\underline{147X - 189Y = 2520}$$

$$X = 12; Y = -4$$

11.  $\begin{cases} (X-3)/3 + (Y-3)/4 = (X+Y-1)/6 & (25) \\ (2X+3)/5 + (3Y+3)/8 = (4X+Y+5)/6 \end{cases}$

$$50X + 25Y = 475$$

$$\underline{32X - 25Y = 17}$$

$$X = 6; Y = 7$$

12.  $\begin{cases} 4/X + 5/Y = 5 & (4) \\ 3/X - 4/Y = 27 & (5) \end{cases}$

$$16/X + 20/Y = 20$$

$$\underline{15/X - 20/Y = 135}$$

$$X = 1/5; Y = -1/3$$

13.  $\begin{cases} 2/3X + 3/4Y = 7 \\ 5/3X - 1/2Y = 8 & (3/2) \end{cases}$

$$2/3X + 3/4Y = 7$$

$$\underline{5/2X - 3/4Y = 12}$$

$$19/6X = 19 \rightarrow X = 1/6; Y = 1/4$$

14.  $\begin{cases} 3X + 4/Y = 35 & (3) \\ 5X - 6/Y = -5 & (2) \end{cases}$

$$9X + 12/Y = 105$$

$$\underline{10X - 12/Y = -10}$$

$$19X = 95 \rightarrow X = 5; Y = 1/5$$

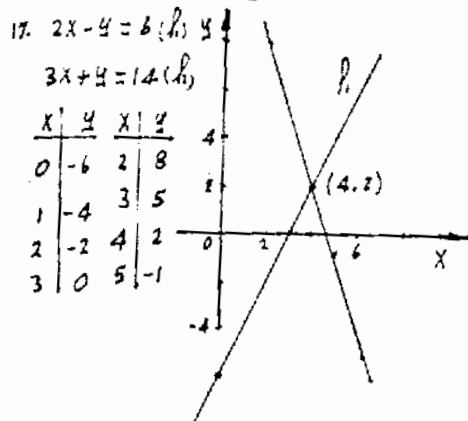
$$15. \begin{cases} x+y=2b \rightarrow x=2b-y \\ \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2} \end{cases}$$

$$\frac{2b-y}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$(a+b)(2b-y) + y(a-b) = 4ab$$

$$y = b-a; x = a+b$$

Resolver gráficamente los siguientes:



$$16. \begin{cases} ax/(a^2+b^2) + by/(a^2+b^2) = 1 \\ bx/(a+b) - ay/(a-b) = 2ab/(b^2-a^2) \end{cases}$$

$$ax+by=a^2+b^2 \quad a(a+b)$$

$$b(a-b)x - a(a+b)y = -2ab^2 \quad (b)$$

$$a^2(a+b)x + ab(a+b)y = a(a+b)(a^2+b^2)$$

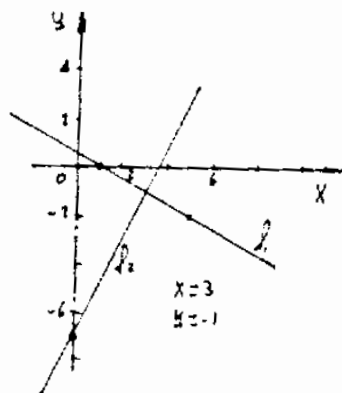
$$\underline{b^2(a-b)x - ab(a+b)y = -2ab^3}$$

$$x=a; y=b$$

18.  $x+2y=1$  l<sub>1</sub>

$2x-y=7$  l<sub>2</sub>

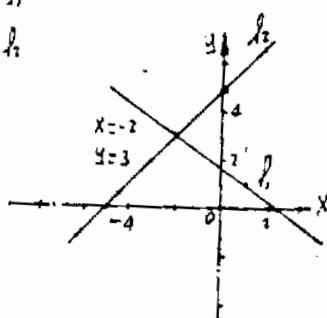
x	y	x	y
1	0	0	-7
3	-1	1	-5
5	-2	2	-3
		3	-1



19.  $2x+3y=5$  l<sub>1</sub>

$x-y=-5$  l<sub>2</sub>

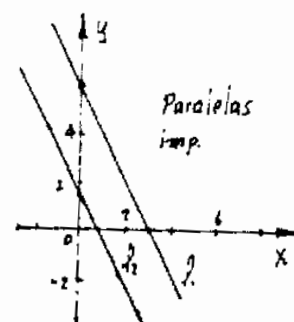
x	y	x	y
1	1	0	5
4	-1	-5	0
-2	3	-2	3



20.  $2x+y=6$  l<sub>1</sub>

$4x+2y=3$  l<sub>2</sub>

x	y	x	y
0	6	0	1.5
1	4	1	-0.5
2	2	2	-1.5
3	0		



21. Si 5 piezas de cobre y 4 de níquel pesan 15 Kg; 7 de cobre y 5 de níquel pesan 20,1 Kg.  
 ¿Cuánto pesa la pieza de cada metal?

Cobre x  $5x+4y=15$  Resolviendo  $x=1.8$  Cobre 1.8 Kg

Níquel y  $7x+5y=20,1$   $y=1.5$  Níquel 1.5 Kg

22. Si la longitud de un rectángulo fuese 9 metros más corta y la anchura fuese 6 metros más larga, la figura sería un cuadrado con la misma área que el rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

l x  $xy = (x-9)(y+6)$  ① áreas iguales  $\Rightarrow 2x-3y=18$  Resolviendo  $x=27$   
 a y  $x-9 = y+6$  ② cuadrado  $x-y=15$   $y=12$

23. Un capitalista tiene invertida cierta cantidad de dinero al 5% y otra cantidad al 6%, lo cual le produce en total un interés anual de 5850\$. Si la primera cantidad estuviese invertida al 6% y la segunda al 5% el interés total anual sería de 150\$ menos. ¿Cuánto tiene invertido al 5% y cuánto al 6%?

$$\begin{aligned} 5\%X + 6\%Y &= 5850 \\ 6\%X + 5\%Y &= 5850 - 150 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 5X + 6Y &= 585000 \\ 6X + 5Y &= 570000 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Resol. } X=45000 \$ \text{ al } 5\% \\ Y=60000 \$ \text{ al } 6\% \end{array} \right\}$$

24. El equipo de pelota de un Instituto se compone de 20 jugadores entre regulares y suplentes. Para competir con otro club, una parte del equipo se trasladó en ómnibus y el resto en automóvil. Los que fueron en ómnibus pagaron 1,60\$ cada uno y los que fueron en automóvil 1,80\$ cada uno. En total el viaje costó 33,80\$. ¿cuántos fueron en ómnibus y cuántos en automóvil?

$$\begin{aligned} \text{En ómnibus } X & \quad X + Y = 20 \\ \text{En auto } Y & \quad 1,60X + 1,80Y = 33,80 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo } X=11 \text{ ómnibus } 11 \\ Y=9 \text{ automóvil } 9 \end{array} \right\}$$

25. Un tanque contiene una mezcla de alcohol y agua. Si se añaden 8 litros de alcohol la mezcla contendrá 90% de alcohol, pero si se añaden 8 litros de agua la mezcla contendrá 75% de alcohol. Hallar las cantidades de alcohol y de agua que hay en la mezcla primitiva, en galones y fracción.

$$\begin{aligned} \text{alcohol } X & \quad X + 8 + Y \stackrel{!}{=} 100\% \Rightarrow 90(X + Y + 8) = 100(X + 8) \text{ ① Resolviendo } X = 40 \text{ litros} \\ \text{agua } Y & \quad X + 8 \stackrel{!}{=} 90\% \Rightarrow 75(X + Y + 8) = 100X \text{ ② } Y = 5 \frac{1}{3} \text{ litros} \end{aligned}$$

$$X + Y + 8 \stackrel{!}{=} 100\% \wedge X \stackrel{!}{=} 75\%$$

26. Un ómnibus hace normalmente el viaje de A a B en 2 1/2 horas. Aumentando su velocidad en 8 Km/h podría hacer el viaje en 2 1/4 horas. Hallar la distancia de A a B y la velocidad usual del ómnibus. Sea X la distancia entre A y B y la Velocidad del ómn.  $A \xrightarrow{X} B$

$$\begin{aligned} X &= 5/2 Y \\ X &= 9/4 (Y + 8) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo } X = 180 \text{ Km} \\ Y = 72 \text{ Km/h} \end{array} \right\}$$

27. Un número de dos cifras es igual a 7 veces la suma de los valores absolutos de sus cifras. Si se invierte el orden de sus cifras el número resulta disminuido en 27. ¿Cuál es el número?

$$\begin{aligned} D \quad X & \quad N^{\circ} 10X + Y & 10X + Y &= 7(X + Y) \\ U \quad Y & \quad N^{\circ} Inv. 10Y + X & 10Y + X &= 10X + Y - 27 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo } X=6 ; Y=3 \\ \text{El } N^{\circ} \text{ es } 63 \end{array} \right\}$$

28. Una lancha puede viajar 40 Km río arriba y regresar en 9 horas. La misma lancha puede viajar 32 Km río abajo y hacer la mitad del viaje de regreso en 5 horas y 12 minutos. Hallar la velocidad de la lancha en agua tranquila y la velocidad de la corriente. [ Si x e y son las incógnitas, comiencese por determinar los valores de las incógnitas auxiliares  $X+Y=X'$ ,  $X-Y=Y'$ . ]

Y río abajo ①	40	$\frac{d}{v}$	$\frac{t}{t}$		Y río arriba ②	32	$\frac{d}{v}$	$\frac{t}{t}$
		$X+Y$	$40/(X+Y)$			$X+Y$	$30/(X+Y)$	
	40	$X-Y$	$40/(X-Y)$			16	$X-Y$	$16/(X-Y)$

$$\begin{aligned} \text{① } 40/(X+Y) + 40/(X-Y) &= 9 \\ \text{② } 30/(X+Y) + 16/(X-Y) &= 5,2 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo } X=9 \text{ Km/h} \\ Y=1 \text{ Km/h} \end{array} \right\}$$

29. Una compañía naviera concede un número fijo de horas de licencia por los 20 primeros días de navegación corridos, y un cierto número de horas por cada día adicional en exceso. Si por un viaje de 25 días se dieron 90 h de licencia y por uno de 40 días, 180 h, hallar el fijo por los primeros 20 días y el adicional por día.

$$\begin{aligned} N^{\circ} \text{ horas fijo } X & \quad \text{por 20 días } X & 25 \rightarrow 90 & \quad 40 \rightarrow 180 & \quad \text{Resol } X=60h \\ N^{\circ} \text{ horas adicional } Y & \quad \text{1 día } Y & X+5Y=90 \text{ ①} & \quad X+20Y=180 \text{ ②} & \quad Y=6h \end{aligned}$$

30. Un automóvil recorre un camino AB compuesto de subidas, bajadas y tramos horizontales. En la subida su velocidad es de 60 km/h; en las bajadas, de 80 km/h; y en los tramos horizontales, de 70 km/h. Si el automóvil tarda 9 horas en ir de A a B y 8 horas 40 minutos en el regreso de B a A, hallar la longitud total de las subidas y la longitud total de las bajadas (de A hacia B) sabiendo que los tramos horizontales suman en total 210 Km.  $t = 8h40min = 26/3 h$

subida	x	60	t = 9h	regreso	subidas	y	80	t = 8h40min = 26/3 h	② $\frac{x}{80} + \frac{y}{60} + \frac{210}{70} = \frac{26}{3}$				
										bajadas	y	80	① $\frac{x}{60} + \frac{y}{80} + \frac{210}{70} = 9$

Resolviendo  $x = 240 \text{ Km}$ ;  $y = 160 \text{ Km}$

Resolver los sistemas siguientes:

31.  $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 & (3) \\ 3x + 4y - 3z = 2 & (2) \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$   $\begin{cases} 15x - 9y + 6z = 15 \\ 6x + 8y - 6z = 4 \\ 21x - 4y = 19 \end{cases}$   $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ 7x = 7 \rightarrow x = 1 \end{cases}$   $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

32.  $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 9 & (3) \\ 4x + 5y - 3z = -4 & (4) \\ 6x + y + 6z = 3 & (-2) \end{cases}$   $\begin{cases} 6x - 9y + 12z = 27 \\ 16x + 20y - 12z = -16 \\ 22x + 11y = 11 \end{cases}$   $\begin{cases} 6x - 9y + 12z = 27 \\ -12x - 24y - 12z = -6 \\ -6x - 11y = 21 \end{cases}$   $\begin{cases} 22x + 11y = 11 \\ -6x - 11y = 21 \\ x = 2 \\ z = -1 \end{cases}$   $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$

33.  $\begin{cases} 3x + y = 20 & (6) \\ x + 2z = 26 \\ 3y + z = -22 & (-2) \end{cases}$   $\begin{cases} x + 2z = 26 \\ -6y - 2z = 44 \\ x - 6y = 70 \end{cases}$   $\begin{cases} x - 6y = 70 \\ 18x + 6y = 120 \\ 19x = 190 \end{cases}$   $\begin{cases} x = 10 \\ y = -10 \\ z = 8 \end{cases}$

34.  $\begin{cases} 8u - 3v + 4w = 1 \\ 5u + 2v - w = 7 & (4) + (6) \\ 2u + 3v + 6w = 19 \end{cases}$   $\begin{cases} 8u - 3v + 4w = 1 \\ 20u + 8v - 4w = 28 \\ 28u + 5v = 29 & (3) \end{cases}$   $\begin{cases} 30u + 12v - 6w = 42 \\ 2u + 3v + 6w = 19 \\ 32u + 15v = 61 \end{cases}$   $\begin{cases} 32u + 15v = 61 \\ -84u - 15v = -87 \\ u = 1/2 \\ w = 3/2 \end{cases}$   $\begin{cases} u = 1/2 \\ v = 3 \\ w = 3/2 \end{cases}$

35.  $\begin{cases} x/2 + y/3 + z/5 = 9 & (1/3) \\ x/3 - y/9 + z/3 = 6 \\ x/6 + y/2 + z/2 = 13 & (-1/3) \end{cases}$   $\begin{cases} x/6 + y/9 + z/15 = 3 \\ x/3 - y/9 + z/3 = 6 \\ x/2 + 2z/5 = 9 & (1/3) \end{cases}$   $\begin{cases} x/4 + y/6 + z/10 = 9/2 \\ -x/18 - y/6 - z/6 = -13/3 \\ 7/36 - z/15 = 1/6 & (2) \end{cases}$   $\begin{cases} x/6 + 2z/5 = 9 \\ 7x/36 - 2z/15 = 1/3 \\ x = 6 ; z = 15 ; y = 9 \end{cases}$

36.  $\begin{cases} 2/x + 1/y + 2/z = 12 & (3) \\ -3/x + 5/y + 3/z = -13 & (4) \\ 2/x + 3/y + 4/z = -2 & (-2) \end{cases}$   $\begin{cases} 12/x + 3/y + 6/z = 36 \\ -12/x + 20/y + 12/z = -52 \\ 23/y + 18/z = -16 \end{cases}$   $\begin{cases} 4/x + 1/y + 2/z = 12 \\ -4/x - 6/y - 8/z = 4 \\ -5/y - 6/z = 16 & (3) \end{cases}$   $\begin{cases} -15/y - 18/z = 48 \\ 23/y + 18/z = -16 \\ y = 1/4 ; z = -1/6 ; x = 1/5 \end{cases}$

37.  $\begin{cases} -x + 2y - 2z = a \\ 2x + y - z = 3a & (-2) \\ 3x + y + 3z = 4b & (-1) \end{cases}$   $\begin{cases} -x + 2y - 2z = a \\ -4x - 2y + 2z = -6a \\ -5x = -5a \rightarrow x = a \end{cases}$   $\begin{cases} 2x + y - z = 3a \\ -3x - y - 3z = -4b \\ -x - 4z = 3a - 4b \end{cases}$   $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -a + b \end{cases}$

38.  $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2a \\ 3x - y - z = 4b & (-1) + (-3) \\ 4x + 3y - 3z = a + b \end{cases}$   $\begin{cases} 2x + 2y - z = 2a \\ -3x + y + z = -4b \\ -x + 3y = 2a - 4b & (-1) \end{cases}$   $\begin{cases} -9x + 3y + 3z = -12b \\ 4x + 3y - 3z = a + b \\ -5x + 6y = a - 11b \end{cases}$   $\begin{cases} 2x - 6y = -4a + 8b \\ -5x + 6y = a - 11b \\ x = a + b ; y = a - b ; z = 2a \end{cases}$

39.  $\begin{cases} ax + cy - bz = a^3 & (a) - (c) \\ cx - by + az = 2ac - b^3 & (b) \\ bx + ay + cz = 2ab + c^3 & (b) \end{cases}$   $\begin{cases} a^2x + acy - abz = a^3 \\ bcx - b^2y + abz = 2abc - b^3 \\ (a^2 + bc)x + (ac - b^2)y = a^3 + 2abc - b^3 \end{cases}$   $\begin{cases} acx + c^2y - bcz = a^3 \\ b^2x + ab^2y + bc^2z = 2ab^2 + bc^3 \\ (ac + b^2)x + (ab + c^2)y = a^3 + 2ab^2 + bc^3 \end{cases}$   $\begin{cases} Resolv. x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 40. & X + 2Y + 3Z - 4U = 16 & (-2) & -2X - 4Y - 6Z + 8U = -32 & 3X + 6Y + 9Z - 12U = 48 & -8X - 16Z + 36U = -128 \\
 & 2X & + Z & = 10 & (-41) & 4Y + 2Z + 4U = 25 & -2X - 4Z + 8U = -7 & (4) & -5X + 19Z - 12U = 6 & (3) & -15X + 57Z - 36U = 18 \\
 & 4Y + 2Z + 4U = 25 & & -2X - 4Z + 8U = -7 & (4) & -5X + 19Z - 12U = 6 & (3) & -15X + 57Z - 36U = 18 \\
 & 4X + 3Y - 5Z & = 21 & -23X + 41Z = -10 & & -82X - 41Z = -410
 \end{array}$$

$$X = 4 ; Z = 2 ; Y = 5 ; U = 1$$

41. La cilindrada de las motocicletas de Carlos, Luis y Raúl suma 1225 cm<sup>3</sup>. La moto de Raúl es de 175 cm<sup>3</sup> más que la de los otros dos motos juntas. Sumada la cilindrada de las de Carlos y Raúl, excede en 25 cm<sup>3</sup> al doble de la otra. ¿Cuál es la cilindrada de cada una?

$$C: X \quad X + Y + Z = 1225 \quad X = 125 C$$

$$L: Y \quad Z = 175 + X + Y \quad \text{Resolviendo} \quad Y = 400 L$$

$$R: Z \quad X + Z = 25 + 2Y \quad Z = 700 R$$

42. Las edades combinadas de un padre y sus dos hijos suman 73 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el duplo de la edad del hijo menor. Hace 12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Padre	X	Dentro de 10 años	X+10		X-12	X=40
Hijo mayor	Y		Y+10	$\Rightarrow X+10 = 2(Y+10)$ ①	Y-12	$\Rightarrow Y-12 = 2(Z-12)$ ②
Hijo menor	Z		Z+10		Z-12	Z=15

43. En una caja registradora hay 355\$ en billetes de 1,5 y 10\$. El número total de billetes es 58 y el número de billetes de 1\$ es 5/6 del número de billetes de 5\$. ¿Cuántos billetes hay de cada denominación?

$$\text{billetes de } 1\$ \quad X + Y + Z = 58 \quad X = 15 \text{ de } 1\$$$

$$\text{billetes de } 5\$ \quad Y + 5Z + 10Z = 355 \quad \text{Resolviendo} \quad Y = 18 \text{ de } 5\$$$

$$\text{billetes de } 10\$ \quad Z = 5/6 Y \quad Z = 25 \text{ de } 10\$$$

44. Entre A y B y C tienen 630\$. Si A tuviese 10\$ menos, B 10\$ más y C diez veces lo que tiene, los tres tendrían el mismo dinero. ¿Cuánto tiene cada uno?

$$A: X \quad X + Y + Z = 630 \quad X = 310$$

$$B: Y \quad X - Y = 20 \quad \text{Resolviendo} \quad Y = 290$$

$$C: Z \quad X - 10Z = 10 \quad Z = 30$$

45. En un corral hay ovejas, vacas y caballos en un total de 54 animales. Sabiendo que el número de vacas representa los 3/4 del número de ovejas, y el de caballos los 2/3 del de las vacas, ¿cuántos animales de cada clase hay en el corral?

$$\text{Ovejas} \quad X \quad X + Y + Z = 54 \quad X = 24 \text{ ovejas}$$

$$\text{vacas} \quad Y \quad Y = 3/4 X \quad \text{Resolviendo} \quad Y = 18 \text{ vacas}$$

$$\text{caballos} \quad Z \quad Z = 2/3 Y \quad Z = 12 \text{ caballos}$$

46. Se tiene tres aleaciones de plomo, cobre y zinc las cuales contienen estos metales en distintas proporciones (en peso), como muestra el cuadro siguiente:



197

	1ª aleación X	2ª aleación Y	3ª aleación Z	
plomo	30 %	60 %	40 %	¿ Cuántos gramos deben tomarse de cada una de estas aleaciones para obtener una nueva aleación que contenga 170 g de plomo, 85 g de cobre y 95 g de zinc ?
cobre	20 %	25 %	30 %	
zinc	50 %	15 %	30 %	

$$\begin{aligned}
 30\%X + 60\%Y + 40\%Z &= 170 & 3X + 6Y + 4Z &= 1700 & X &= 100 \quad 1^\circ \\
 20\%X + 25\%Y + 30\%Z &= 85 & 4X + 5Y + 6Z &= 8500 & \text{Resolviendo} & Y &= 200 \quad 2^\circ \\
 50\%X + 15\%Y + 30\%Z &= 95 & 10X + 3Y + 6Z &= 1900 & & Z &= 50 \quad 3^\circ
 \end{aligned}$$

47. Se clasifican 260 fichas de cartulina en 30 casilleros, divididos en tres grupos. A cada casillero del primer grupo corresponden 20 fichas, a los del segundo grupo 10, y a los del tercero 5. Si en los casilleros del primer grupo hay tantas fichas como en los del tercero; ¿ de cuántos casilleros se compone cada grupo ?

$$\begin{aligned}
 1^\circ \text{ grupo } X & & X + Y + Z &= 30 & X + Y + Z &= 30 & X &= 4 \\
 2^\circ \text{ grupo } Y & & 20X + 10Y + 5Z &= 260 & \Rightarrow & 4X + 2Y + Z &= 52 & \text{Resolviendo} & Y &= 10 \\
 3^\circ \text{ grupo } Z & & 20X &= 5Z & & 4X - Z &= 0 & & Z &= 16
 \end{aligned}$$

48. La fórmula  $h = a + bt + ct^2$  da la relación entre la temperatura  $t$  en grados centígrados a que hierve el agua y la altura  $h$  sobre el nivel del mar. Si para  $t = 100$  es  $h = 0$ , para  $t = 99$  es  $h = 1500$  y para  $t = 98$  es  $h = 2994$ , hallar los valores de las constantes  $a, b$  y  $c$  en la fórmula anterior.  $\Delta = a + bt + ct^2$

$$\begin{aligned}
 t=100 \Rightarrow 0 &= a + 100b + 10000c & t=99 \Rightarrow 1500 &= a + 99b + 9801c & t=98 \Rightarrow 2994 &= a + 98b + 9604c \\
 h=0 & & h=1500 & & h=2994 &
 \end{aligned}$$

Resolviendo  $a = 120300$ ;  $b = -903$ ;  $c = -c$

49. La suma de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las unidades es igual a la suma de las cifras de las decenas y centenas. Si el número se suma 270 resultan invertidas las cifras de las decenas y centenas. ¿ Cuál es el número ?

$$\begin{aligned}
 C: X & \quad N^\circ 100X + 10Y + Z \Rightarrow X + Y + Z = 14 & X + Y + Z &= 14 & X &= 2 \\
 D: Y & & Z &= X + Y & \Rightarrow & X + Y - Z &= 0 \Rightarrow Y &= 5. \\
 U: Z & & 100X + 10Y + Z + 270 &= 10X + 100Y + Z & X - Y &= -3 & Z &= 7 \quad \text{El N}^\circ \text{ es } 257
 \end{aligned}$$

50. La suma de los valores absolutos de las cifras de un número de cuatro cifras es 21. La cifra de los millares más la cifra de las decenas es igual a la cifra de las unidades. La cifra de los millares más la cifra de las centenas es igual al duplo de la cifra de las decenas. Si el número se suma 4635 resulta un nuevo número con las mismas cifras pero en orden inverso. ¿ Cuál es el número ?

$$\begin{aligned}
 M: X & \quad N^\circ 1000X + 100Y + 10Z + W & X + Y + Z + W &= 21 & X &= 1; Y &= 9; Z &= 5; W &= 6 \\
 C: Y & \quad N^\circ 1000W + 100Z + 10Y + X & X + Z - W &= 0 & \text{El N}^\circ \text{ es } & 1956 \\
 D: Z & & X + Y - 2Z &= 0 & \\
 U: W & & 111X + 10Y - 10Z - 111W &= -515
 \end{aligned}$$

Hallar el valor numérico de los determinantes siguientes:

$$\text{Si } \begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} = 136 - 105 = 31 \quad \text{Si } \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ -5 & 12 \end{vmatrix} = 72 + 55 = 127$$

$$53. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 24 - 0 - 72 + 6 = -81$$

$$54. \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 60 - 6 - 8 + 6 - 60 = 0$$

Desarrollar los determinantes siguientes:

$$55. \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ b & a & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & b & 0 & b \\ b & a & a & b & a \\ a & b & 0 & a & b \end{vmatrix} = 0 + a^3b + b^3 + 0 - 0 - a^3b = b^3$$

$$56. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a & b \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = bc^2 + a^2c + ab^2 - ac^2 - b^2c - a^2b$$

Resolver por determinantes los sistemas siguientes:

$$57. \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 7x - 2y = 66 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 66 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-14 - 330}{-8 - 35} = 8 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 66 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{264 - 49}{-43} = -5$$

$$58. \begin{cases} 6x - 5y = 2.5 \\ 8x + 10y = 5 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2.5 & -5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{25 + 25}{60 + 40} = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2.5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{30 - 20}{100} = \frac{1}{10}$$

$$59. \begin{cases} 2x - 5y + 2z = -2 \\ 3x + y - 4z = 14 \\ x + 8y - 3z = 20 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 14 & 1 & -4 \\ 20 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-6 + 224 + 400 - 40 - 64 - 210}{-6 + 48 + 20 - 2 + 64 - 45} = 4 \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{matrix} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$60. \begin{cases} x + 2y + 3z = 24 \\ 2x - 5y + 4z = 16 \\ 3x + y + 2z = 13 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 2 & 3 \\ 16 & -5 & 4 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-240 + 48 + 104 + 195 - 96 - 64}{-10 + 6 + 24 + 45 - 4 - 8} = -1 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 2 & 16 & 4 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix}}{53} = 2$$

Resolviendo  $x = -1$ ;  $y = 2$ ;  $z = 7$

## EJERCICIOS DE REPASO de los capítulos 11 a 13

1. Resolver:  $\frac{X+8}{6} + \frac{X^2+21}{1-12X} = \frac{26+X}{12}$  ;  $2(X+8)(1-12X) + 12(X^2+21) = (1-12X)(26+X)$  ;  $121X = -241$  ;  $X = -2$

2. Resolver:  $\frac{X^3+2b^3}{X+b} + 2bx = \frac{X^3-2b^3}{X-b} + \frac{b^3}{X^2-b^2}$  ;  $(X+b)(X^3+2b^3) + 2bx(X^2-b^2) = (X+b)(X^3-2b^3) + b^3$   
 $X^4 + 2b^3X - bX^3 - 2b^4 + 2bX^3 - 2b^3X = X^4 - 2b^3X + bX^3 - 2b^4 + b^3$  ;  $X = 1/2$

3. En la fórmula  $L = \pi(R+r) + 2d$  despejar  $r$ . Hallar el valor de  $r$  cuando  $R = 70\text{m}$ ,  $L = 5,54\text{m}$ ,  $d = 120\text{m}$  ( $\pi = 3,14$ )  $\rightarrow L - 2d - \pi R = \pi r$  ;  $r = \frac{L - 2d - \pi R}{\pi}$  ;  $r = \frac{5,54 - 2(120) - 0,7}{3,14}$  ;  $r = 0,3\text{m} \rightarrow r = 3\text{dm}$

4. Dos lanchas de motor entablan una competencia desde un muelle hasta una boya y regreso. Una de las lanchas hace 12 millas por hora a la ida, pero solamente 8 millas por hora al regreso. La otra mantiene una velocidad constante de 10 millas por hora (tanto a la ida como al regreso). ¿gana la competencia por una diferencia de 18 segundos. ¿Cuál es la distancia entre el muelle y la boya?

	d	v	t		d	v	t	
① ida	X	12	X/12	}	② ida	X	10	X/10
regreso	X	8	X/8		regreso	X	10	X/10
								$t_1 - t_2 = 18$

$X/12 + X/8 + 2X/10 = 18/3600 \rightarrow X = 0,6 \text{ millas}$

5. Un barco navega 16 millas por hora en agua tranquila. Si el barco puede hacer 80 millas a favor de la corriente en el mismo tiempo que hace 48 millas en contra de la corriente, ¿cuáles la velocidad de ésta? Sea  $x$  la velocidad de la corriente, los tiempos son iguales

	d	v	t	
a favor	80	$16+x$	$80/(16+x)$	$\frac{80}{16-x} = \frac{48}{16+x} \rightarrow x = 4 \text{ millas/h}$
en contra	48	$16+x$	$48/(16+x)$	

6. A puede hacer un trabajo en  $a$  días y B en  $b$  días. A trabaja cierto número de días y es sustituido por B que concluye la obra. Entre los dos han demorado  $m$  días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

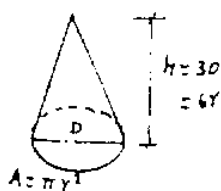
	A	B	
A: $x$	$\frac{x}{a}$	$\frac{m-x}{b}$	$\frac{x}{a} + \frac{m-x}{b} = 1$
B: $m-x$			

A:  $bx + am - ax = ab$  ;  $(b-a)x = a(b-m) \rightarrow x = a(b-m)/(b-a)$   
 B:  $m - \frac{a(b-m)}{b-a} = \frac{b(m-a)}{b-a}$

7. Dado  $f(x) = X/(X+3)$ , hallar:

a.  $f(-1) = -1/(-1+3) = -0,5$     b.  $f(2) = 2/(2+3) = 0,4$     c.  $f(0) = 0/(0+3) = 0$

8. La altura de un cono es tres veces el diámetro de su base. Expresar el volumen del cono en función del radio  $r$  de la base.



$V = f(r)$  ;  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  ;  $V = \frac{\pi r^2 (6r)}{3} \rightarrow V = 2\pi r^3$

9. La presión del agua sobre una superficie es directamente proporcional a la profundidad a que esté sumergida. Si la presión sobre cada  $\text{cm}^2$  del traje de un buzo es de  $0,52 \text{ Kg}$  a  $5 \text{ m}$  de profundidad, ¿a qué profundidad podrá descender sin peligro si el traje soporta una presión de

2.6 Kg por  $\text{cm}^2$ ?

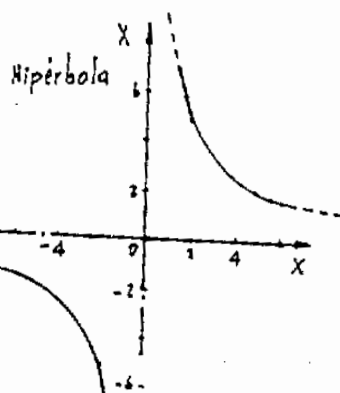
$$P = Kh; 0.52 = K(50\text{cm}) \rightarrow K = 0.0104$$

$$2.6 = 0.0104h; h = 250\text{cm} \rightarrow h = 25\text{m}$$

10. Constrúyase el gráfico de cada una de las funciones siguientes:

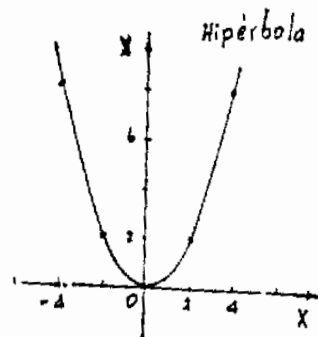
a.  $y = 10/x$

x	y
1	10
2	5
4	2.5
5	2
10	1
-1	-10
-2	-5
-5	-2



b.  $y = 2.5x^2$

x	y
0	0
±1	2.5
±2	10
±4	40



11. Estudiar la proporcionalidad entre los elementos de la fórmula:

$$S = \frac{d^2 W}{8p}$$

S es directamente proporcional al producto del cuadrado de d por W e inversamente proporcional a ocho veces p

12. En el análisis de 1000 gramos de una muestra de leche se encontró lo siguiente:

Agua . . . 870g

Carbohidratos . . . 50g

Proteínas . . . 33g

Miñerales . . . . . 7g

Grasas . . . . . 40g

Representar el resultado del análisis mediante un gráfico circular.

No es estadística

13. Resolver el sistema:

$$\frac{x-y}{4} + \frac{x-2y}{3} = y+1$$

$$7x - 23y = 12 \quad (1)$$

$$35x - 115y = 60$$

$$5x - 18y = 7 \quad (2)$$

$$-35x + 126y = -49$$

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{4y+1}{5} = x+y+1$$

$$11y = 11$$

$$y = 1; x = 5$$

14. Resolver el sistema:

$$ax + by = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \quad (a-b)$$

$$a(a-b)x + b(a-b)y = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} (a-b)$$

$$(a+b)x + (a-b)y = 2 \quad (-b)$$

$$\begin{aligned} -b(a+b)x - b(a-b)y &= -2b \\ (a^2 - 2ab - b^2)x &= \frac{a^2 - 2ab - b^2}{a+b} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{a+b}$$

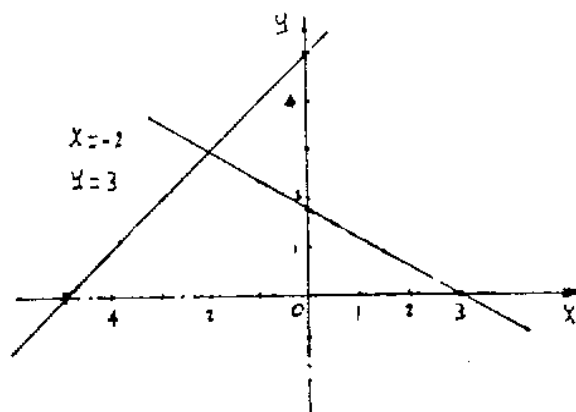
$$y = \frac{1}{a-b}$$

15. Resolver gráficamente el sistema:

$$3x + 5y = 9 \quad P$$

$$y - x = 5 \quad R$$

X	Y	X	Y
3	0	0	5
0	1.8	1	6
1	1.2	2	7
		-1	4
		-2	3
		-3	2
		-5	0



16. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 1/5x + 1/3y + 1/2z &= 4 & (-1/2) & -1/10x - 1/6y - 1/2z = -2 & -1/20x - 1/12y - 1/4z = -1 \\ 1/4x - 1/6y + 1/2z &= 7/4 & & 1/4x - 1/6y + 1/2z = 7/4 & 1/2x + 1/2y + 1/4z = 9/2 \\ 1/2x + 1/2y + 1/4z &= 9/2 & & 3/20x - 1/3y = -1/4 & (-3) & 9/20x + 5/12y = 7/2 \end{aligned}$$

$$-9/20x + 1/4y = 3/4$$

$$9/20x + 5/12y = 7/2$$

$$17/12y = 17/4 \rightarrow y = 1/3; x = 1/5; z = 1/2$$

17. Resolver el sistema:

$$x + y + z = 0$$

$$(a+b)x + (b+c)y + (a+c)z = 0$$

$$abx + bcy + acz = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+c & a+c \\ 1 & bc & ac \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & a+c \\ ab & bc & ac \end{vmatrix}} = \frac{a+c-b-c}{abc+ac^2+abc+b^2c+a^2b+abc-ab^2-abc-abc-bc^2} = \frac{a+c-b-c}{(a-b)(c-a)(c-b)} = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a+b & 0 & a+c \\ ab & 1 & ac \end{vmatrix}}{(a-b)(c-a)(c-b)} = \frac{-(a+c-a-b)}{(a-b)(c-a)(c-b)} = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a+b & b+c & 0 \\ ab & bc & 1 \end{vmatrix}}{(a-b)(c-a)(c-b)} = \frac{b+c-a-b}{(a-b)(c-a)(c-b)} = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$$

18. Resolver por determinantes el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8 \\ 4x - y - 5z &= -12 \\ -3x + 2y + 4z &= 4 \end{aligned} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -12 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-32 - 24 - 60 + 4 + 80 + 144}{-8 + 8 + 45 - 3 + 20 - 48} = 8 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & -12 & -5 \\ -3 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = -6 ; z = 10$$

19. Tres recipientes contienen, respectivamente, 15, 25 y 30 litros de alcohol de distinta concentración. Si el contenido de los dos primeros recipientes se juntase la solución resultante contendría 47,5% de alcohol. Si se juntase el contenido del primer recipiente con el del tercero, la solución contendría 25% de alcohol. Análogamente, mezclando el contenido de los recipientes segundo y tercero resultaría una solución con el 22,5% de alcohol. Hallar el tanto por ciento de alcohol de cada uno de los recipientes. Sean  $x, y, z$  los porcentajes

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad 15 \quad 15x + 25y &= 47,5(15+25) & x &= 59,583 \rightarrow 60\% \\ 2^\circ \quad 25 \quad 15x + 30z &= 25(15+30) & \text{Resolviendo} \quad y &= 40,25 \rightarrow 40\% \\ 3^\circ \quad 30 \quad 25y + 30z &= 22,5(25+30) & z &= 12,375 \rightarrow 10\% \end{aligned}$$

20. Un metalúrgico quiere hacer una aleación con 6 partes (en peso) de plomo, 5 partes de estaño y 3 de bismuto. El único plomo que tiene en existencia se halla en una aleación que contiene 8 partes de plomo, 5 de estaño y 2 de bismuto. ¿Cuánto debe tomar de esta aleación y qué cantidades debe añadir de estaño y de bismuto para hacer 280 Kg de la primera aleación?

## CAPITULO 14

### EXPONENTES Y RADICALES

### NUMEROS COMPLEJOS

#### Ejercicio 114

I. Hallar el valor de las expresiones siguientes o simplificarlas, y expresar la respuesta con exponentes positivos.

$$1. \quad 3^{-2} + 5^0 = 1/3^2 + 1 = 1/9 + 1 = 10/9$$

$$2. \quad 4^0(3^{-1} + 6^{-1}) = 1(1/3 + 1/6) = 1/3 + 1/6 = 1/2$$

$$3. \quad 4^1(4^{-2} + 2^2) = 4^{1-2} + 4^1 \cdot 2^2 = 4^{-1} + 2^4 = 1/4 + 16 = 16.25$$

$$4. \quad (3^0 + 5^3)^2 = (1 + 125)^2 = (126)^2 = 15876$$

$$5. \quad (2^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 4^0)^2 = (1/2 \cdot 1/3^2 \cdot 1)^2 = (1/2 \cdot 1/9)^2 = (1/18)^2 = 1/324$$

$$6. \quad \frac{5^{-2} \cdot 4}{4^{-1} \cdot 5} = \frac{1/5^2 \cdot 4}{1/4 \cdot 5} = \frac{4/25}{5/4} = \frac{16}{125}$$

$$7. \quad \frac{(2^{-1} \cdot 6)^2}{(2 \cdot 6^{-1})^2} = \left( \frac{1/2 \cdot 6}{2 \cdot 1/6} \right)^2 = \left( \frac{3}{1/3} \right)^2 = 81$$

$$8. \quad \frac{1^0 + 2^{-1}}{3^{-2} + 4^{-1}} = \frac{1 + 1/2}{1/3^2 + 1/4} = \frac{3/2}{13/36} = \frac{36 \cdot 3}{2 \cdot 13} = \frac{54}{13}$$

$$9. \quad \frac{(3^{-1} + 2^{-2})}{6^{-3}} = \frac{1/3 + 1/2^2}{1/6^3} = \frac{1/3 + 1/4}{1/216} = \frac{7/12}{1/216} = 126$$

$$10. \quad \frac{(2^{-1} + 3^{-1})}{(2 + 3)^{-1}} = \frac{1/2 + 1/3}{1/2 + 3} = \frac{5/6}{19/2} = \frac{5}{38}$$

$$11. a^0 \cdot a^{-1} \cdot a^3 = a^{0-1+3} = a^2 = a$$

$$12. 5a^0 + 3a^{-1} = 5(1) + 3/a = 5a + 3/a$$

$$13. (5a^0)^{-2} = (5 \cdot 1)^{-2} = 1/5^2 = 1/25$$

$$14. (a^{-1} b^{-2} c^{-3})^2 = (1/a \cdot 1/b^2 \cdot 1/c^3)^2 = 1/a^2 b^4 c^6$$

$$15. (3ab^{-2})^{-1} = (3a/b^2)^{-1} = 1/3a/b^2 = b^2/3a$$

$$16. \frac{(abc)}{(a^{-1}b^{-2}c^{-3})} = \frac{abc}{1/a^2 b^2 c^3} = a^3 b^3 c^4$$

$$17. \frac{(a^{-1}b^0c^{-3})^2}{(a^{-1}b^{-1}c^{-1})^2} = \frac{(1/a \cdot 1 \cdot 1/c^3)^2}{(1/abc)^2} = \frac{1/a^2 c^6}{1/a^2 b^2 c^2} = \frac{b^2}{c^4}$$

$$18. \frac{1}{(a^{-1} + b^{-1})} = \frac{1}{1/a + 1/b} = \frac{1}{b+a/ab} = \frac{ab}{a+b}$$

$$19. \frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^2 - y^2} = \frac{1/x^2 - 1/y^2}{x^2 - y^2} = \frac{y^2 - x^2/x^2 y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2)}{x^2 y^2 (x^2 - y^2)} = \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$20. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}} = \frac{1/x + 1/y}{1/x+y} = \frac{y+x/xy}{1/x+y} = \frac{(x+y)^2}{xy}$$

$$21. [(15^{-8} + 3^4)/(8^{10} + 2^{10})]^0 \text{ aplicando } a^0 = 1 \longrightarrow = 1$$

$$22. [(x^{-2})^{-2}]^{-2} = x^{(-2)(-2)(-2)} = x^{-8} = 1/x^8$$

$$23. \frac{x^{-3}(2x) - (x^2+1)(-3x^{-4})}{x^{-6}} = \frac{2x/x^3 + 3(x^2+1)/x^4}{1/x^6} = \frac{x^4(5x^2+3)}{x^4} \\ = 5x^4 + 3x^2$$



$$14. \frac{a^{-1} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}}{a^{-4} + a^{-2}b^{-2} + b^{-4}} = \frac{1/a^1 + 1/ab + 1/b^2}{1/a^4 + 1/a^2b^2 + 1/b^4} = \frac{b^2 + ab + a^2/a^1b^1}{b^4 + a^1b^1 + a^4/a^4b^4}$$

$$= \frac{a^2b^2(a^2 + ab + b^1)}{a^4 + a^1b^1 + b^4}$$

si factoramos  $(a^4 + a^1b^1 + b^4)$

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{+ a^1b^1} = \frac{a^2b^2}{a^4 + 2a^1b^1 + b^4 - a^2b^1}$$

$(a^2 + b^1)^2 - a^2b^1$  diferencia de cuadrados

$$= \frac{a^2b^2(a^2 + ab + b^1)}{(a^2 + ab + b^1)(a^2 - ab + b^1)} = \frac{a^2b^2}{a^2 - ab + b^1}$$

$$25. \frac{x^n - x^{-n}}{x^{2n} - x^{-2n}} = \frac{x^n - 1/x^n}{x^{2n} - 1/x^{2n}} = \frac{x^{2n} - 1/x^n}{x^{4n} - 1/x^{2n}} = \frac{x^{2n}(x^{2n} - 1)}{x^n(x^{4n} - 1)}$$

$$= \frac{x^n(x^{2n} - 1)}{(x^{2n} + 1)(x^{2n} - 1)} = \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$$

$$26. (2a^1 + b^{-1})(4a^2 - 2a^1b^{-1} + b^2) = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^1}\right) = \left(\frac{2b+a}{ab}\right)\left(\frac{4b^2 - 2ab + a^1}{a^1b^2}\right)$$

$$= \frac{(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b)}{a^3b^3} = \frac{a^3 + 8b^3}{a^3b^3}$$

$$27. (x^{-1} - y^{-1})^{-1} = \frac{1}{x^{-1} - y^{-1}} = \frac{1}{1/x - 1/y} = \frac{1}{y - x/xy} = \frac{xy}{y - x}$$

$$28. \frac{a^{-1}b^{-2}}{a^1 - b^1} = \frac{1/a^1b^2}{1/a^1 - 1/b^1} = \frac{1/a^1b^2}{b^2 - a^2/a^1b^1} = \frac{1}{b^2 - a^2}$$

$$29. \frac{8^{n+1} - 4^n \cdot 2^n}{4(2^{2n})^{-1}} = \frac{(2^3)^{n+1} - (2^2)^n \cdot 2^n}{2^2(2^{2n})} = \frac{(2^{-3n+3} - 2^{-n})(2^{-1+2n})}{2^2(2^{2n})}$$

$$= 2^{-n+1} - 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{-n} - 2^n \cdot 2^{-2} = 2/2^n - 2^n/4 = \frac{8 - 2^{2n}}{2^{1+n}}$$

$$= \frac{8 + 2^{2n}}{2^{n+2}}$$

$$30. \frac{nX^m X^{n-1} - mX^n X^{m-1}}{X^{1m}} \div \frac{X^n}{X^m} = \frac{nX^m X^{n-1} - mX^n X^{m-1}}{X^{1m}} \cdot \frac{X^m}{X^n}$$

14. La masa del electrón  $0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 910\ \text{kg} = 9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$

15. La edad de la Tierra:  $700\ 000\ 000\ 000\ \text{días} = 7,10^8\ \text{días}$

II Expresar los siguientes números utilizando la notación usual.

1.  $3,2 \cdot 10^3 = 3\ 200$

4.  $1,2 \cdot 10^5 = 120\ 000$

2.  $8,41 \cdot 10^{-2} = 0,0841$

5.  $9,65 \cdot 10^{-3} = 0,00965$

3.  $6,1 \cdot 10^{-4} = 0,00061$

6.  $7,6 \cdot 10^{-1} = 0,76$

7. Velocidad máxima de crecimiento de una planta:  $3 \cdot 10^{-2}\ \text{mm/s} = 0,03\ \text{mm/s}$

8. Número de Avogadro:  $6,023 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} = 602\ 300\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ \text{mol}^{-1}$

9. Constante de la gravitación Universal  $6,67 \cdot 10^{-8}\ \text{din} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2 = 0,000\ 000\ 0667\ \text{din} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$

10. Carga del electrón:  $1,602 \cdot 10^{-19}\ \text{culombio (c)} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 1602\ (\text{c})$

### Ejercicio 116

Efectuar las operaciones siguientes comenzando por expresar los datos en notación científica.

1.  $43\ 000\ 000 \cdot 6\ 200\ 000 = 4,3 \cdot 10^7 \cdot 6,2 \cdot 10^6 = (4,3 \cdot 6,2)(10^{7+6}) = 26,66 \cdot 10^{13} = 2,666 \cdot 10^{14}$

2.  $750\ 000\ 000 \cdot 240\ 000 = 7,5 \cdot 10^8 \cdot 2,4 \cdot 10^5 = (7,5 \cdot 2,4)(10^{8+5}) = 18 \cdot 10^{13} = 1,8 \cdot 10^{14}$

3.  $0,000\ 006 \cdot 0,000\ 000\ 25 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^{-7} = (6 \cdot 2,5)(10^{-6-7}) = 15 \cdot 10^{-13} = 1,5 \cdot 10^{-12}$

4.  $83\ 000\ 000 \div 214\ 000 = 8,3 \cdot 10^7 \div 2,14 \cdot 10^4 = 8,3/2,14 \cdot 10^{7-4} = 3,8 \cdot 10^3$

5.  $0,000\ 000\ 027 \div 0,000\ 000\ 46 = 2,7 \cdot 10^{-8} \div 4,6 \cdot 10^{-7} = 2,7/4,6 \cdot 10^{-8+7} = 5,9 \cdot 10^{-2}$

6.  $2\ 700\ 000 \div 0,000\ 001\ 8 = 2,7 \cdot 10^6 \div 1,8 \cdot 10^{-6} = 2,7/1,8 \cdot 10^{6+6} = 1,5 \cdot 10^{12}$

7.  $0,000\ 055^2 \cdot 0,0021^3 = (5,5 \cdot 10^{-5})^2 (2,1 \cdot 10^{-3})^3 = (5,5)^2 \cdot 10^{-10} (2,1)^3 \cdot 10^{-9}$   
 $= (30,25 \cdot 9,261)(10^{-10-9}) = 2,801 \cdot 10^{-17}$

9. El radio de la partícula visible más pequeña es de  $2,5 \cdot 10^{-3}$  cm, suponiendo esférica de partícula ¿Cuál su volumen?

$$V_e = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_e = \frac{4}{3} (3,14) (2,5 \cdot 10^{-3})^3$$

$$V_e = \frac{4}{3} (3,14) (2,5)^3 \cdot 10^{-9}$$

$$V_e = 6,54 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3$$

9. Hallar en Kilómetros, la distancia de la Tierra a la estrella sabiendo que su luz tarda 21,7 años en llegar a la Tierra.

$$V_e = 3 \cdot 10^5 \text{ Km/s}$$

$$d = ?$$

$$d = 3 \cdot 10^5 \cdot 6,84 \cdot 10^8$$

$$t = 21,7 \text{ años} = 6,84 \cdot 10^8 \text{ s}$$

$$d = V \cdot t$$

$$d = 2,05 \cdot 10^{14} \text{ Km}$$

10. El diámetro de Saturno es de  $1,2 \cdot 10^5$  Km. ¿Cuál es su volumen?

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} (3,14) (1,2)^3 \cdot 10^{15}$$

$$V = \frac{4}{3} (3,14) (1,2 \cdot 10^5)^3$$

$$V = 7,23 \cdot 10^{15} \text{ Km}^3$$

### Ejercicio 117

- I. Escribir la raíz definida por cada uno de los radicales siguientes: Al decir definida siguiente significa que el signo que se considera es el signo del radical: así

$$\sqrt{4} = 2 \text{ y no } \sqrt{4} = \pm 2.$$

$$1. \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$2. \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$3. \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = -2$$

$$4. \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{-5^3} = -5$$

$$5. \sqrt{9/16} = \sqrt{3^2/4^2} = 3/4$$

$$6. \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$7. \sqrt[3]{-8/27} = \sqrt[3]{-2^3/3^3} = -2/3$$

$$8. \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$9. \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{-3^5} = -3$$

$$10. \sqrt[3]{-1/8} = \sqrt[3]{-1/2^3} = -1/2$$

$$11. -\sqrt{49/100} = -\sqrt{7^2/10^2} = -7/10$$

$$12. -\sqrt[3]{8/343} = -\sqrt[3]{2^3/7^3} = -2/7$$

II En los ejercicios siguientes se supone que los factores literales que aparecen en los radicales representan números positivos:

$$1. \sqrt{x^4} = x^2$$

$$2. \sqrt{x^2 y^4} = xy^2$$

$$3. \sqrt{a^6} = a^3$$

$$4. \sqrt{4m^6} = 2m^3$$

$$5. \sqrt[3]{x^6} = x^2$$

$$6. \sqrt[3]{8a^6 x^3} = 2a^2 x$$

$$7. \sqrt[3]{-27c^{12}} = -3c^4$$

$$8. \sqrt[5]{x^5 y^{10}} = xy^2$$

$$9. \sqrt[3]{a^{27}/27} = a^3/3$$

$$10. -\sqrt[3]{-a^3/b^6} = -(-a/b^2)$$

$$11. \sqrt[4]{256 x^{16}} = \sqrt[4]{4^4 x^{16}} = 4x^4$$

$$12. -\sqrt[3]{-a^9/64 b^6} = -\sqrt[3]{-a^9/4^3 b^6} = -(-a^3/4b^2) = a^3/4b^2$$

III En los ejercicios siguientes los factores literales del radicando pueden representar números reales cualesquiera.

En esta parte de ejercicios, el signo del radical no está definido.

Radical de índice par tiene dos signos ( $\pm$ )  
 Radical de índice impar no tiene dos signos.

$$1. \sqrt{a^2} = \pm a = |a|$$

$$2. \sqrt{x^2} = \pm x^2 = |x^2|$$

$$3. \sqrt[3]{x^3} = x^3$$

$$4. \sqrt{a^4} = \pm a^2 = |a^2|$$

$$5. \sqrt[3]{-a^3} = -a^3$$

$$6. \sqrt[3]{-8a^3} = -2a^3$$

### Ejercicio 118

I Hallar el valor de las expresiones siguientes, o simplificarlas:

$$1. 4^{1/2} = 2$$

$$2. 8^{1/3} = 2$$

$$3. 27^{1/3} = 3$$

$$4. 9^{1/2} = 3$$

$$5. 16^{3/2} = \sqrt{16^3} = \sqrt{2^{12}} = 64$$

$$6. 125^{2/3} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{5^6} = 25$$

$$7. 9^{-1/2} = 1/9^{1/2} = 1/3$$

$$8. 64^{-2/3} = 1/64^{2/3} = 1/\sqrt[3]{4^6} = 1/16$$

$$9. (-27)^{2/3} = \sqrt[3]{(-27)^2} = \sqrt[3]{(-3)^6} = (-3)^2 = 9$$

$$10. (-64)^{-1/3} = 1/\sqrt[3]{-64} = 1/\sqrt[3]{-4^3} = -1/4$$

$$11. 16^{-3/4} + 16^{1/4} - 16^{-1/4} + 16^{3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} + \sqrt[4]{16} - \frac{1}{\sqrt[4]{16}} + \sqrt[4]{16^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2^{12}}} + \sqrt[4]{2^4} - \frac{1}{\sqrt[4]{2^4}} + \sqrt[4]{2^{12}} = \frac{1}{8} + 2 - \frac{1}{2} + 8 = \frac{77}{8}$$

$$12. \frac{8^{2/3} + 8^{-2/3}}{36^{1/2} - 36^{-1/2}} = \frac{8^{2/3} + 1/8^{1/3}}{36^{1/2} - 36^{-1/2}} = \frac{\sqrt[3]{2^4} + 1/\sqrt[3]{2^4}}{6 - 1/6} = \frac{51}{70}$$

$$13. \frac{81^{0.25} + 9^{-0.5}}{(-27)^{1/3} + (-9)^{2/3}} = \frac{81^{1/4} + 9^{-1/2}}{\sqrt[3]{-3^3} + \sqrt[3]{-2^6}} = \frac{\sqrt[4]{3^4} + 1/\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{-3^3} + \sqrt[3]{(-2)^6}} = -\frac{10}{3}$$

$$14. (x^6)^{1/2} = x^{6/2} = x^3$$

$$15. (a^6)^{-1/3} = a^{-6/3} = a^{-2} = 1/a^2$$

$$16. (16x^4)^{1/4} = \sqrt[4]{16x^4} = 2x$$

$$17. (9a^4b^6)^{3/2} = \sqrt{(9a^4b^6)^3} = \sqrt{3^6a^{12}b^{18}} = 27a^6b^9$$

$$18. [1/2 x^{1/4} y^{3/2} z^{-2}]^{-4} = \frac{1}{[1/2 x^{1/4} y^{3/2} z^{-2}]^4} = \frac{1}{1/16 x y^6 z^{-8}} = 16x^{-1}y^{-6}z^8$$

$$19. 5(x^{-1/3})^{6/5} = 5(x^{-6/15}) = 5x^{-2/5} = 5/\sqrt[5]{x^2}$$

$$20. \frac{a^{-1/2}}{b^{-1/2}} = \frac{1/\sqrt{a}}{1/\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$21. a^{1/3} a^{-1/2} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = a^{-1/6} = 1/\sqrt[6]{a}$$

$$22. a^{1/4} a^{1/6} a^{-1/3} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}} = a^{1/12} = \sqrt[12]{a}$$

$$23. \frac{(a^{1/2} b^{1/3})(a^{-1} b^{-2/3})}{a^{-3/2} b^{-4/3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}-1} b^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}}{a^{-3/2} b^{-4/3}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} \\ = ab$$

$$14. \left( \frac{64 a^3}{125 c^4} \right)^{-1/3} = \frac{1}{\left( \frac{2^6 a^3}{5^3 c^4} \right)^{1/3}} = \frac{1}{\frac{2^{12/3} a^{3/3}}{5^{4/3} c^{12/3}}} = \frac{25 c^4}{16 a^1}$$

$$15. \left( \frac{8 x^{-17}}{27^{-1} y^6} \right)^{-1/3} = \left( \frac{8 \cdot 27^1}{x^{17} y^6} \right)^{-1/3} = \left( \frac{2^3 \cdot 3^3}{x^{17} y^6} \right)^{-1/3} = \frac{2^{3(-1/3)} \cdot 3^{3(-1/3)}}{x^{17(-1/3)} y^{6(-1/3)}} \\ = \frac{x^9 y^2}{6}$$

$$16. \frac{16^{3/4} + 3/4(16)}{27^{2/3} - 2/3(27)} = \frac{\sqrt[4]{2^{12}} + 12}{\sqrt[3]{3^6} - 18} = \frac{8 + 12}{9 - 18} = -\frac{20}{9}$$

$$17. \left[ a^{-1/5} \left( \frac{a^{1/3}}{a^{1/2}} \right)^4 \right]^{1/4} = a^{-\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}} \left( \frac{a^{4/3(1)}}{a^{4/2(1)}} \right)^{1/4} = a^{-1/10} (a^1/a^2)^{1/4} = \frac{a^{-1/10} a^{1/2}}{a^{3/4}} \\ = a^{-\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = a^{-7/20} = \frac{1}{\sqrt[20]{a^7}}$$

$$18. \left\{ \frac{[X^{3/4} (X^{5/6})^{1/2}]^8}{X^8} \right\}^{3/4} = \left\{ \frac{[X^{3/4} \cdot X^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}]^8}{X^8} \right\}^{3/4} = \left\{ \frac{X^{7/2} (8)}{X^8} \right\}^{3/4} \\ = \left\{ X^{\frac{28}{3} - 8} \right\}^{3/4} = X$$

$$19. \left( \frac{64 a^{-6} b^{12/3}}{125 a^{-9} b^{-4/3}} \right)^{2/3} = \frac{2^{6(2/3)} a^{-6(2/3)} b^{12/3(2/3)}}{5^{3 \cdot 2/3} a^{-9 \cdot 2/3} b^{-4/3 \cdot 2/3}} = \frac{2^4 a^{-4+6} b^{\frac{4}{3} + \frac{8}{3}}}{5^2} \\ = \frac{16}{25} a^2 \sqrt[3]{b^4}$$

$$30. [(-1)^{n+1} (-1)^{n-1} x^{3n} y^{-n}]^{\frac{1}{2}n} = [(-1)^{n+1+n-1} x^{3n} y^{-n}]^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{2n(1/2n)} x^{3n(1/2n)} y^{-n(1/2n)} \\ = (-1)^1 x^{3/2} y^{-1/2} = -\sqrt{x^3}/\sqrt{y} = -\sqrt{x^3/y}$$

II Efectuar las operaciones indicadas, dejando las respuestas con exponentes racionales.

$$1. (x^{1/3} - x^{1/2})x = x^{\frac{1}{3}+1} - x^{\frac{1}{2}+1} = x^{4/3} - x^{3/2}$$

$$2. (a^{1/2} + b^{1/2})(a^{1/2} - b^{1/2}) \text{ por } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = (a^{1/2})^2 - (b^{1/2})^2 = a - b$$

$$3. (a^{1/2} + a^{-1/2})^2 = (a^{1/2} + 1/a^{1/2})^2 = \left(\frac{a+1}{a^{1/2}}\right)^2 = a + 2 + a^{-1}$$

$$4. (X^{-1/2} + 1 + X^{1/2})X^{1/4} = X^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = X^{-\frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{3}{4}}$$

$$5. (2X^{1/2} + 3 + X^{-1/2})(X + X^{1/2}) = 2X^{\frac{1}{2}+1} + 2X^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + 3X + 3X^{1/2} + X^{-\frac{1}{2}+1} + X^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\ = 2X^{3/2} + 5X + 4X^{1/2} + 1$$

$$6. (X^{1/3} + Y^{1/3})(X^{2/3} - X^{1/3}Y^{1/3} + Y^{2/3}) = X^{(\frac{1}{3})^3} + Y^{(\frac{1}{3})^3} = X + Y$$

$$\text{Si: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$7. (a^{7/4} + a^{3/2} + a^{5/4} + a)(a^{3/4} - a^{1/2}) = a^{\frac{7}{4} + \frac{3}{4}} - a^{\frac{7}{4} + \frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}} - a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} + a^{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}} + a^{1 + \frac{3}{4}} - a^{1 + \frac{1}{2}} \\ = a^{5/2} - a^{9/4} + a^{9/4} - a^2 + a^2 - a^{7/4} + a^{7/4} - a^{3/2} \\ = a^{5/2} - a^{3/2}$$

$$8. (X^{-3} + X^{-3/2} - 1)(X^3 + X^{3/2} - 1) = X^{-3+3} + X^{-3+\frac{3}{2}} - X^{-3} + X^{-\frac{3}{2}+3} + X^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} - X^{-\frac{3}{2}} - X^3 - X^{3/2} + 1 \\ = 3 - X^3 - X^{-3}$$

$$9. (a^{-1} + a^{-1/2}b^{-1/2} + b^{-1})(a^{-1} - a^{-1/2}b^{-1/2} + b^{-1})$$

$$= a^{-1-1} - a^{-1-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + a^{-1}b^{-1} + a^{-\frac{1}{2}-1}b^{-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}-1} + a^{-1}b^{-1} - a^{-\frac{1}{2}}b^{-1-\frac{1}{2}} + b^{-1-1} \\ = a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$$

$$10. (a^m + a^{m/2} + 1)(a^{-m} + a^{-m/2} + 1)$$

$$= a^{m-m} + a^{m-\frac{m}{2}} + a^m + a^{\frac{m}{2}-m} + a^{\frac{m}{2}-\frac{m}{2}} + a^{\frac{m}{2}} + a^{-m} + a^{-\frac{m}{2}} + 1$$

$$= a^0 + a^{m/2} + a^m + a^{-m/2} + a^0 + a^{m/2} + a^{-m} + a^{-m/2} + 1$$

$$= a^m + 2a^{m/2} + 3 + 2a^{-m/2} + a^{-m}$$



$$11. (x-1) \div (x^{1/2}-1) = \frac{x-1}{x^{1/2}-1} = \frac{(x-1)}{(x^{1/2}-1)} \cdot \frac{(x^{1/2}+1)}{(x^{1/2}+1)} = \frac{(x-1)(x^{1/2}+1)}{(x-1)} = x^{1/2}+1$$

$$12. (x-y) \div (x^{1/3}-y^{1/3}) = \frac{x-y}{x^{1/3}-y^{1/3}} = \frac{(x-y)}{(x^{1/3}-y^{1/3})} \cdot \frac{(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})}{(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})}$$

$$= \frac{(x-y)(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})}{(x-y)} = x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3}$$

$$13. (x+y) \div (x^{1/5}+y^{1/5}) = \frac{x+y}{x^{1/5}+y^{1/5}} = \frac{(x+y)}{(x^{1/5}+y^{1/5})} \cdot \frac{(x^{4/5}-x^{3/5}y^{1/5}+x^{2/5}y^{2/5}-x^{1/5}y^{3/5}+y^{4/5})}{(x^{4/5}-x^{3/5}y^{1/5}+x^{2/5}y^{2/5}-x^{1/5}y^{3/5}+y^{4/5})}$$

$$= \frac{(x+y)(x^{4/5}-x^{3/5}y^{1/5}+x^{2/5}y^{2/5}-x^{1/5}y^{3/5}+y^{4/5})}{(x^{1/5})^5+(y^{1/5})^5}$$

$$= x^{4/5}-x^{3/5}y^{1/5}+x^{2/5}y^{2/5}-x^{1/5}y^{3/5}+y^{4/5}$$

$$14. (9a-12a^{1/2}-2+4a^{-1/2}+a^{-1}) \div (3a^{1/2}-2-a^{-1/2})$$

$$\frac{9a-12a^{1/2}-2+4a^{-1/2}+a^{-1}}{3a^{1/2}-2-a^{-1/2}} = \frac{(3a^{1/2}-2-a^{-1/2})^2}{(3a^{1/2}-2-a^{-1/2})} = 3a^{1/2}-2-a^{-1/2}$$

$$15. (a^2-a^{3/2}b^{1/2}-2a^{1/2}b^{1/4}+2b^{3/4}) \div (a^{1/2}-b^{1/2})$$

$$\frac{a^2-a^{3/2}b^{1/2}-2a^{1/2}b^{1/4}+2b^{3/4}}{a^{1/2}-b^{1/2}} = \frac{(a^2-a^{3/2}b^{1/2})-(2a^{1/2}b^{1/4}-2b^{3/4})}{a^{1/2}-b^{1/2}}$$

$$= \frac{a^{3/2}(a^{1/2}-b^{1/2})-2b^{1/4}(a^{1/2}-b^{1/2})}{a^{1/2}-b^{1/2}}$$

$$= \frac{(a^{1/2}-b^{1/2})(a^{3/2}-2b^{1/4})}{a^{1/2}-b^{1/2}}$$

$$= a^{3/2}-2b^{1/4}$$

$$16. (X^{-1} + X^{-1/3} - 1 + X^{1/3} + X) \div (X^{-1/3} + X^{1/3} + 1)$$

Ordenando

$$\begin{array}{r}
 X + X^{1/3} - 1 + X^{-1} + X^{-1/3} \\
 - X - X^{2/3} - X^{1/3} \\
 \hline
 - X^{2/3} - 1 \\
 X^{2/3} + X^{1/3} + 1 \\
 \hline
 X^{1/3} + X^{-1} + X^{-1/3} \\
 - X^{1/3} - 1 - X^{-1/3} \\
 \hline
 -1 + X^{-1} \\
 + 1 + X^{-1/3} + X^{-2/3} \\
 \hline
 X^{-1/3} + X^{-2/3} + X^{-1} \\
 - X^{-1/3} - X^{-2/3} - X^{-1} \\
 \hline
 /
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X^{1/3} + 1 + X^{-1/3} \\
 X^{2/3} - X^{1/3} + 1 - X^{-1/3} + X^{-2/3}
 \end{array}$$

$$X^{2/3} - X^{1/3} + 1 - X^{-1/3} + X^{-2/3}$$

No coincide con la respuesta del texto

$$17. (a^{4/3} - 2b^{3/2} + a^{-4/3}b^3) \div (a^{-2/3}b^{3/4} - 2a^{-4/3}b^{3/2} + a^{-2}b^{9/4})$$

$$\begin{array}{r}
 a^{4/3} - 2b^{3/2} + a^{-4/3}b^3 \\
 - a^{4/3} + 2a^{2/3}b^{3/4} - b^{3/2} \\
 \hline
 2a^{2/3}b^{3/4} - 3b^{3/2} + a^{-4/3}b^3 \\
 - 2a^{2/3}b^{3/4} + 4b^{3/2} - 2a^{-2/3}b^{9/4} \\
 \hline
 b^{3/2} - 2a^{-2/3}b^{9/4} + a^{-4/3}b^3 \\
 - b^{3/2} + 2a^{-2/3}b^{9/4} - a^{-4/3}b^3 \\
 \hline
 /
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 a^{-2/3}b^{3/4} - 2a^{-4/3}b^{3/2} + a^{-2}b^{9/4} \\
 a^1b^{-3/4} + 2a^{4/3} + a^{2/3}b^{3/4}
 \end{array}$$

$$18. (X^{9/2} - 2X^{7/2} - 5X^{5/2} + 2X^{1/2}) \div (X^2 - 4X + 2)$$

$$\begin{array}{r}
 X^{9/2} - 2X^{7/2} - 5X^{5/2} + 2X^{1/2} \\
 - X^{9/2} + 4X^{7/2} - 2X^{5/2} \\
 \hline
 2X^{7/2} - 7X^{5/2} \\
 - 2X^{7/2} + 8X^{5/2} - 4X^{3/2} \\
 \hline
 X^{5/2} - 4X^{3/2} + 2X^{1/2} \\
 - X^{5/2} + 4X^{3/2} - 2X^{1/2} \\
 \hline
 /
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X^2 - 4X + 2 \\
 X^{5/2} + 2X^{3/2} + X^{1/2}
 \end{array}$$

$$X^{5/2} + 2X^{3/2} + X^{1/2}$$

$$19. (X + X^{1/2} + 2X^{1/4} + 2 + 2X^{-1/4} + X^{-3/4}) \div (X^{1/4} + 1 + X^{-1/4})$$

$$\begin{array}{r}
 X + X^{1/2} + 2X^{1/4} + 2 + 2X^{-1/4} + X^{-3/4} \quad \left| \begin{array}{l} X^{1/4} + 1 + X^{-1/4} \\ X^{3/4} - X^{1/2} + X^{1/4} + 2 - X^{-1/4} + X^{-1/2} \end{array} \right. \\
 - X - X^{3/4} - X^{1/2} \\
 \hline
 - X^{3/4} + 2X^{1/4} \\
 X^{3/4} + X^{1/2} + X^{1/4} \\
 \hline
 X^{1/2} + 3X^{1/4} + 2 \\
 - X^{1/2} - X^{1/4} - 1 \\
 \hline
 2X^{1/4} + 1 + 2X^{-1/4} \\
 - 2X^{1/4} - 2 - 2X^{-1/4} \\
 \hline
 -1 + X^{-3/4} \\
 1 + X^{-1/4} + X^{-1/2} \\
 \hline
 X^{-1/4} + X^{-1/2} + X^{-3/4} \\
 - X^{-1/4} - X^{-1/2} - X^{-3/4} \\
 \hline
 /
 \end{array}$$

$$20. (a^m + a^{m+\frac{1}{2}} - 3a^{m+1} - 2a^{m+\frac{3}{2}} + 4a^{m+2} - a^{m+\frac{5}{2}}) \div (a^{1/2} - 2a + a^{3/2})$$

$$\begin{array}{r}
 a^m + a^{m+\frac{1}{2}} - 3a^{m+1} - 2a^{m+\frac{3}{2}} + 4a^{m+2} - a^{m+\frac{5}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} a^{\frac{1}{2}} - 2a + a^{\frac{3}{2}} \\ a^{m-\frac{1}{2}} + 3a^m + 2a^{m+\frac{1}{2}} - a^{m+1} \end{array} \right. \\
 - a^m + 2a^{m+\frac{1}{2}} - a^{m+1} \\
 \hline
 3a^{m+\frac{1}{2}} - 4a^{m+1} - 2a^{m+\frac{3}{2}} \\
 - 3a^{m+\frac{1}{2}} + 6a^{m+1} - 3a^{m+\frac{3}{2}} \\
 \hline
 2a^{m+1} - 5a^{m+\frac{3}{2}} + 4a^{m+2} \\
 - 2a^{m+1} + 4a^{m+\frac{3}{2}} - 2a^{m+2} \\
 \hline
 - a^{m+\frac{3}{2}} + 2a^{m+1} - a^{m+\frac{5}{2}} \\
 a^{m+\frac{3}{2}} - 2a^{m+1} + a^{m+\frac{5}{2}} \\
 \hline
 /
 \end{array}$$

III Hallar el valor de cada uno de las expresiones siguientes para el valor indicado de  $x$ .

$$1. 4x^{-1} + \frac{3}{x^{-1}} + \frac{1}{2x^0} - 8x^{1/2} + 4x^{-3/2}, \text{ para } x = 9$$

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{x} + 3x + \frac{1}{2} - 8x^{1/2} - \frac{4}{x^{3/2}} &= \frac{4}{9} + 3(9) + \frac{1}{2} - 8(9)^{1/2} + \frac{4}{9^{3/2}} = \frac{24 + 162 + 27 + 8}{54} \\
 &= 4 \frac{5}{54}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad 2X^{1/2} + 4X^{1/3} - 16X^{-1/2} + 5X^{-1/3} - 6X^{2/3}; \text{ para } X=8$$

$$= 2(8)^{1/2} + 4(8)^{1/3} - \frac{16}{8^{1/2}} + \frac{5}{8^{1/3}} - 6(8)^{2/3} = 4(2)^{1/2} - \frac{8}{2}(2)^{1/2} - \frac{27}{2}$$

$$= -13,5$$

$$3. \quad X^{-1} + (-1)^X + X^0 + 0^X + X^2 - 2^X; \text{ para } X=4$$

$$= \frac{1}{X} + (-1)^X + 1 + 0^X + X^2 - 2^X = \frac{1}{4} + (-1)^4 + 1 + 0^4 + (4)^2 - 2^4$$

$$= \frac{1}{4} + 1 + 1 + 0 + 16 - 16 = 2,25$$

$$4. \quad 6X^{2/3} - 8X^{1/3} + 5X^0 - 4X^{-1/3} + 4X^{-2/3}; \text{ para } X=-64$$

$$6X^{2/3} - 8X^{1/3} + 5 - \frac{4}{X^{1/3}} + \frac{4}{X^{2/3}} = 6\sqrt[3]{(-64)^2} - 8\sqrt[3]{-64} + 5 - \frac{4}{\sqrt[3]{-64}} + \frac{4}{\sqrt[3]{(-64)^2}}$$

$$= 6(4) - 8(-4) + 5 - \frac{4}{4} + \frac{4}{4^2} = 134,25$$

$$5. \quad X^{3/4} - X^{1/2} + 2X^{1/4} + 9 - 2X^{-1/4} + 5X^{-1/2} - X^{-3/4} \text{ para } X=16$$

$$X^{3/4} - X^{1/2} + 2X^{1/4} + 9 - \frac{2}{X^{1/4}} + \frac{5}{X^{1/2}} - \frac{1}{X^{3/4}} = (16)^{3/4} - (16)^{1/2} + 2(16)^{1/4} + 9 - \frac{2}{(16)^{1/4}} + \frac{5}{(16)^{1/2}} - \frac{1}{(16)^{3/4}}$$

$$= \sqrt[4]{16^3} - \sqrt{16} + 2\sqrt[4]{16} + 9 - \frac{2}{\sqrt[4]{16}} + \frac{5}{\sqrt{16}} - \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}}$$

$$= 17,125$$

#### IV Expresar mediante exponentes fraccionarios

$$1. \quad \sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$$

$$2. \quad \sqrt{a^3 b} = (a^3 b)^{1/2} = a^{3/2} b^{1/2}$$

$$3. \quad \sqrt[4]{a^3} = a^{3/4}$$

$$4. \sqrt[4]{3xy^3} = (3xy^3)^{1/4} = 3^{1/4} x^{1/4} y^{3/4}$$

$$5. \sqrt[5]{a^2x^3} = (a^2x^3)^{1/5} = a^{2/5} x^{3/5}$$

$$6. \sqrt[5]{x^2yz^3} = (x^2yz^3)^{1/5} = x^{2/5} y^{1/5} z^{3/5}$$

$$7. 3\sqrt{a} \sqrt[3]{b^2} = 3a^{1/2} b^{2/3}$$

$$8. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = (a^{p/n})^{1/m} = a^{\frac{p}{mn}}$$

### Ejercicio 119

Aplicar las leyes de los radicales a los ejemplos siguientes:

$$1. \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

$$2. \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$3. \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot 15} = 3$$

$$4. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$$

$$5. \sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-9(3)} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$6. \sqrt[3]{2/5} \cdot \sqrt[3]{-20} = \sqrt[3]{2/5(-20)} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$7. \sqrt{a} \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}$$

$$8. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^4} \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7}$$

$$9. \sqrt{5} \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^1} \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^1 \cdot 5} = \sqrt[4]{5^2}$$

$$10. \sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^5} = \sqrt[12]{(a^2)^4} \sqrt[12]{(a^5)^3} = \sqrt[12]{a^8 \cdot a^{15}} = \sqrt[12]{a^{23}}$$

$$11. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

$$12. \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

$$13. \frac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{30}{5}} = \sqrt[3]{6}$$

$$14. \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{-5}} = \sqrt[3]{-\frac{40}{5}} = -2$$

$$15. \sqrt[4]{a^4} = a^{4/4} = a^{1/1} = \sqrt{a}$$

$$16. \sqrt[6]{a^2} = a^{2/6} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$$

$$17. \sqrt[8]{5^4} = (5)^{4/8} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$18. \sqrt[6]{4^3} = 4^{3/6} = 4^{1/2} = 2$$

$$19. \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

$$20. \sqrt[4]{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[12]{6}$$

$$21. \sqrt{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[8]{a}$$

$$22. \sqrt[5]{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[15]{-2}$$

### Ejercicio 120

I Simplificar los radicales siguientes por extracción de factores

$$1. \sqrt{8} = \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{32} = \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$3. \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$$4. \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$5. \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

6.  $\sqrt{27a} = \sqrt{3^3 a} = 3\sqrt{3a}$
7.  $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$
8.  $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{-3^3 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3}$
9.  $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = 4\sqrt[3]{2}$
10.  $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{3}$
11.  $\sqrt[4]{48x} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot x} = 2\sqrt[4]{3x}$
12.  $\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = 3\sqrt[4]{2}$
13.  $\sqrt{12x^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3x^2 \cdot x} = 2x\sqrt{3x}$
14.  $\sqrt{72a^5} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2a^4 \cdot a} = 6a^2\sqrt{2a}$
15.  $\sqrt[3]{24a^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3a^3 \cdot a} = 2a\sqrt[3]{3a}$
16.  $\sqrt[4]{625a^4x^6} = \sqrt[4]{5^4 a^4 x^4 \cdot x^2} = 5ax(x^2)^{1/4} = 5ax\sqrt{x}$
17.  $\sqrt[5]{-128x^9} = \sqrt[5]{-2^5 \cdot 2^3 \cdot x^5 \cdot x^3} = -2x\sqrt[5]{4x^3}$
18.  $\sqrt{\frac{80a^3b}{27x^3y^4}} = \sqrt{\frac{2^4 \cdot 5a^3 \cdot ab}{3^3 x^3 \cdot x y^2 y^2 \cdot 3}} = \frac{4a}{3xy} \sqrt{\frac{5ab}{3x}}$
19.  $\sqrt[n]{a^{n^2}} = \sqrt[n]{(a^n)^n} = a^n$
20.  $\sqrt[n]{a^{n+1}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a} = a\sqrt[n]{a}$
21.  $\sqrt[3]{ab(a+b)^3} = (a+b)\sqrt[3]{ab}$
22.  $\sqrt[3]{64(a+x)^4} = \sqrt[3]{4^3(a+x)^3(a+x)} = 4(a+x)\sqrt[3]{a+x}$
23.  $\sqrt{4x^4 + 12x^6} = \sqrt{4x^4(1+3x^2)} = 2x^2\sqrt{1+3x^2}$
24.  $\sqrt{9a^2 - 9b^2} = \sqrt{9(a^2 - b^2)} = 3\sqrt{a^2 - b^2}$

$$15. \sqrt{72 a^3 b^3 c^5} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a \cdot b^3 \cdot b \cdot c^4 \cdot c} = 6abc \sqrt{2abc}$$

$$26. \sqrt{14a(b+c)^3} = \sqrt{4 \cdot 4a(b+c)^2(b+c)} = 2(b+c) \sqrt{4a(b+c)}$$

$$27. \sqrt[3]{40x^4y^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5x^3 \cdot x \cdot y^6} = 2xy^2 \sqrt[3]{5x}$$

$$18. \sqrt{81a^5b^4 - 9a^4b^5} = \sqrt{9a^4b^4(9b-a)} = 3a^2b^2 \sqrt{9b-a}$$

$$29. \sqrt[n]{a^{2n+1}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a} = \sqrt[n]{(a^2)^n \cdot a} = a^2 \sqrt[n]{a}$$

$$30. \sqrt[3]{64x^3y^{-3}z^4} = \sqrt[3]{4^3x^3y^{-3}z^3 \cdot z} = 4xy^{-1}z \sqrt[3]{z}$$

II Introducir bajo el radical los factores exteriores en cada uno de los ejemplos siguientes:

$$1. 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$2. 3\sqrt{x} = \sqrt{3^2 \cdot x} = \sqrt{9x}$$

$$3. x\sqrt{2} = \sqrt{x^2 \cdot 2} = \sqrt{2x^2}$$

$$4. 2x\sqrt{5x} = \sqrt{(2x)^2 \cdot 5x} = \sqrt{4x^2 \cdot 5x} = \sqrt{20x^3}$$

$$5. a\sqrt{2b} = \sqrt{a^2 \cdot 2b} = \sqrt{2a^2b}$$

$$6. 2xy^2\sqrt{3xy} = \sqrt{(2xy^2)^2 \cdot 3xy} = \sqrt{4x^2y^4 \cdot 3xy} = \sqrt{12x^3y^5}$$

$$7. 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} = \sqrt[3]{135}$$

$$8. 2x\sqrt[3]{4y} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot 4y} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot 4y} = \sqrt[3]{32x^3y}$$

$$9. (x-y)\sqrt[3]{(x+y)} = \sqrt[3]{(x-y)^3(x+y)}$$

$$10. a^3\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(a^3)^n \cdot a} = \sqrt[n]{a^{3n} \cdot a} = \sqrt[n]{a^{3n+1}}$$

$$11. (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \sqrt{\frac{(x+y)^2(x-y)}{x+y}} = \sqrt{(x+y)(x-y)} = \sqrt{x^2 - y^2}$$



$$12. \frac{1}{a-b} \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

## Ejercicio 121

Simplificar los siguientes radicales por reducción de sus índices. En los casos en que sea posible, sacar factores fuera del radical.

$$1. \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

$$2. \sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}$$

$$3. \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt{4}$$

$$4. \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt{3}$$

$$5. \sqrt[4]{a^4} = \sqrt{a}$$

$$6. \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$$

$$7. \sqrt[4]{a^4 b^4} = \sqrt{ab}$$

$$8. \sqrt[6]{a^2 b^4} = \sqrt[3]{ab^2}$$

$$9. \sqrt[8]{25 a^2 b^4 c^6} = \sqrt[8]{5^2 a^2 b^4 c^6} = \sqrt[4]{5ab^2c^3}$$

$$10. \sqrt[4]{100 x^2 y^8} = \sqrt[4]{10^2 x^2 y^8} = y^2 \sqrt{10x}$$

$$11. \sqrt[4]{8 x^4 y^3} = \sqrt[4]{2^3 x^4 y^3} = x \sqrt{2y}$$

$$12. \sqrt[2n]{a^n b^{3n}} = \sqrt[2n]{(ab^3)^n} = \sqrt{ab^3} = b \sqrt{ab}$$

## Ejercicio 122

I Racionalizar las expresiones siguientes:

$$1. \sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$2. \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4. \sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 12}{12 \cdot 12}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{144}} = \frac{1}{6} \sqrt{21}$$

$$5. \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

$$6. \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5^2}{5 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{75}{125}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{5}$$

$$7. \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

$$8. \sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{9 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{27}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{3}$$

$$9. \sqrt{\frac{3}{50}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{50 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{6}{100}} = \frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$10. \sqrt{\frac{7}{300}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{300 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{21}}{30}$$

$$11. \sqrt[3]{\frac{5}{16}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 4}{16 \cdot 4}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{4}$$

$$12. \sqrt[3]{\frac{3}{50}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 50}{50 \cdot 50}} = \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 60}}{50} = \frac{\sqrt[3]{60}}{10}$$

$$13. \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \cdot b^2}{b \cdot b^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$$

$$14. \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1 \cdot 2^3}{2 \cdot 2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$15. \sqrt{\frac{3}{x-1}} = \sqrt{\frac{3(x-1)}{(x-1)^2}} = \frac{\sqrt{3(x-1)}}{x-1}$$

$$16. \sqrt{\frac{a}{b^2 c}} = \sqrt{\frac{abc}{b^2 c \cdot bc}} = \frac{\sqrt{abc}}{b^2 c}$$

$$17. \sqrt{\frac{2}{x+y}} = \sqrt{\frac{2(x+y)}{(x+y)^2}} = \frac{\sqrt{2(x+y)}}{x+y}$$

$$18. 2\sqrt{\frac{a+b}{2}} = 2\sqrt{\frac{2(a+b)}{4}} = \sqrt{2(a+b)}$$

$$19. \sqrt[5]{\frac{a}{b^4c^3}} = \sqrt[5]{\frac{abc^3}{b^5c^3}} = \frac{\sqrt[5]{abc^3}}{bc}$$

$$20. \sqrt[n]{\frac{1}{x^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{1 \cdot x}{x^{n-1} \cdot x}} = \sqrt[n]{\frac{x}{x^n}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{x}$$

$$21. \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$22. \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$23. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$24. \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$25. \frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 3} \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \sqrt{3}$$

$$26. \frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5 \cdot 3} \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$27. \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

$$28. \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$29. \frac{7}{\sqrt[3]{25}} = \frac{7\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \frac{7\sqrt[3]{5}}{5}$$

$$30. \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 2} \sqrt[3]{3 \cdot 2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{6} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

$$31. \frac{3}{\sqrt[4]{8}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{2}$$

$$32. \frac{2}{\sqrt[5]{X^3}} = \frac{2\sqrt[5]{X^2}}{\sqrt[5]{X^3} \sqrt[5]{X^2}} = \frac{2\sqrt[5]{X^2}}{X}$$

$$33. \frac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{75}} = \frac{2\sqrt{3x} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{75} \cdot \sqrt{75}} = \frac{2\sqrt{21xy}}{75}$$

$$34. \frac{\sqrt[3]{7x}}{\sqrt[3]{9x^2}} = \frac{\sqrt[3]{7x} \cdot \sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{9x^2} \sqrt[3]{3x}} = \frac{\sqrt[3]{21x^2}}{3x}$$

$$35. \frac{6xy^2}{\sqrt[3]{24xy^3}} = \frac{6xy^2 \sqrt[3]{3^2x^2y}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3x^3y^3} \sqrt[3]{3^2x^2y}} = \frac{6xy^2 \sqrt[3]{9x^2y}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3x^3y^3}} = \frac{6xy^2 \sqrt[3]{9x^2y}}{6xy} = 4\sqrt[3]{9x^2y}$$

$$36. (2x)^{1/2} = \frac{1}{(2x)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2x}}{2x}$$

$$37. (4a^6)^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{(4a^6)^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^4a^{12}} \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4a^4}$$

$$38. \frac{x}{\sqrt[n]{y^{n+1}}} = \frac{x \sqrt[n]{y^n \cdot y^{-1}}}{\sqrt[n]{y^n \cdot y} \sqrt[n]{y^n \cdot y^{-1}}} = \frac{x \sqrt[n]{y^{n-1}}}{\sqrt[n]{y^{1n} \cdot y^0}} = \frac{x \sqrt[n]{y^{n-1}}}{y^1}$$

$$39. \frac{2}{\sqrt[4]{4xy^3}} = \frac{2\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{4xy^3} \sqrt[4]{4x^3y}} = \frac{2\sqrt[4]{4x^3y}}{2xy} = \frac{\sqrt[4]{4x^3y}}{xy}$$

$$40. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[6]{a^4 \cdot a}}{a} = \sqrt[6]{a}$$

= Calcular los valores aproximados de las expresiones siguientes, dando el resultado con dos cifras decimales exactas ( $\varepsilon < 0,01$ ).

$$1. \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 2,5 \cdot 1,41 \approx 3,53$$

$$2. \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 1,33 \cdot 1,73 \approx 2,30$$

$$3. \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx \frac{3,87}{5} \approx 0,77$$

$$4. \sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \approx \frac{3,47}{7} \approx 0,53$$

$$5. \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{22}}{11} \approx 0,1818 \cdot 4,690 \approx 0,85$$

$$6. \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10} \approx 0,9 \cdot 3,16 \approx 2,84$$

$$7. \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \approx \frac{1,58}{2} \approx 0,79$$

$$8. \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 125}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{50}}{5} \approx \frac{3,68}{5} \approx 0,73$$

$$9. \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{20}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{20}}{20} \approx 0,15 \cdot 4,47 \approx 0,67$$

$$10. \frac{4}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{3} \approx 1,333 \cdot 1,442 \approx 1,92$$

### Ejercicio 123

Efectuar las sumas algebraicas siguientes:

$$1. 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(5 - 2 + 3 + 1) = 7\sqrt{2}$$

$$2. 2\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = \sqrt{x}(2 - 5 - 3 + 4) = -2\sqrt{x}$$

$$3. 5\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}(5 + 7 - 2 - 6 + 1) = 5\sqrt[3]{4}$$

$$4. 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(6 - 5 + 1) + \sqrt{3}(2 + 8) = 2\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$$

$$5. 3\sqrt{a} + 7\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 4\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \sqrt{a}(3 + 7 - 4) + \sqrt{b}(2 + 3) = 6\sqrt{a} + 5\sqrt{b}$$

$$6. 3\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{32} = 3 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 3\sqrt{2} - 3 \cdot 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$7. -\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 5\sqrt{75} + 3\sqrt{48} = -2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = -9\sqrt{3}$$

$$8. \sqrt{300} + \sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 2\sqrt{108} + 2\sqrt{80} = 10\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 12\sqrt{3} + 8\sqrt{5} = 22\sqrt{3} + 11\sqrt{5}$$

$$9. 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{12} = 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} = 12\sqrt[3]{2} - 16\sqrt[3]{3}$$

$$10. \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{192} + \sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} = 5\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} = 0$$

$$11. 2\sqrt{180} + 2\sqrt[3]{40} - 3\sqrt{500} + 4\sqrt[3]{5000} = 12\sqrt{5} + 4\sqrt[3]{5} - 30\sqrt{5} + 40\sqrt[3]{5} = -18\sqrt{5} + 44\sqrt[3]{5}$$

$$12. \sqrt[3]{216a} + \sqrt[3]{64a} - 4\sqrt[3]{27a^4} = 6\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} - 12\sqrt[3]{a} \cdot a = \sqrt[3]{a}(10 - 12a)$$

$$13. a\sqrt[5]{b^2} + b\sqrt[5]{a^5b} - \frac{2}{ab}\sqrt[5]{a^{10}b^{11}} = ab\sqrt[5]{b} + ab\sqrt[5]{b} - \frac{2a^{11}b^{11}}{ab}\sqrt[5]{b} = (ab + ab - 2ab)\sqrt[5]{b} = 0$$

$$14. \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{8} = \sqrt{\frac{1}{2^1}} + \sqrt{\frac{2}{3^2}} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{7}{6}\sqrt{2}$$

$$15. \sqrt{\frac{4}{15}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{60} + 3\sqrt{15} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 15}{15^2}} + 2\sqrt{\frac{5 \cdot 3}{3^2}} - \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5^2}} + 2\sqrt{15} + 3\sqrt{15} \\ = (2/15 + 2/3 - 1/5 + 2 + 3)\sqrt{15} = 28/5\sqrt{15}$$

$$16. \sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2a}} - \sqrt{\frac{2}{a}} = \sqrt{\frac{2a}{2^2}} - \sqrt{\frac{2a}{(2a)^2}} - \sqrt{\frac{2a}{a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{2a} - \frac{1}{a}\sqrt{2a} = \left(\frac{a-3}{2a}\right)\sqrt{2a}$$

$$17. \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - b\sqrt{\frac{1}{ab}} + \frac{1}{b}\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} + \sqrt{\frac{ab}{a^2}} - b\sqrt{\frac{ab}{(ab)^2}} + \frac{1}{b}\sqrt{ab} \\ = 1/b\sqrt{ab} + 1/a\sqrt{ab} - 1/a\sqrt{ab} + 1/b\sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}/b$$

$$18. \sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3}} + \sqrt[3]{\frac{a}{a^3}} - \sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3}} + a\sqrt[3]{a} = \left(\frac{1}{a} + a\right)\sqrt[3]{a}$$

$$19. 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{4}{x^2-1}\sqrt{x^2-1} = 3\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}} - 2\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}} + \frac{4}{x^2-1}\sqrt{x^2-1} \\ = \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

$$20. 7\sqrt{\frac{a}{7}} - 2\sqrt{7a} + 2a\sqrt{\frac{7}{a}} = 7\sqrt{\frac{7a}{7^2}} - 2\sqrt{7a} + 2a\sqrt{\frac{7a}{a^2}} = (1 - 2 + 2)\sqrt{7a} = \sqrt{7a}$$

$$21. \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{50}} - \frac{5}{\sqrt{18}} + \frac{6}{\sqrt{32}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{4}{10}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} + \frac{6}{8}\sqrt{2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right)\sqrt{2} = \frac{11}{60}\sqrt{2}$$

$$22. 5\sqrt{\frac{m}{2}} - 3m\sqrt{\frac{2}{9m}} + \sqrt{8m^3} - \frac{1}{2}\sqrt{50m} = 5\sqrt{\frac{2m}{2^2}} - 3m\sqrt{\frac{2m}{9m^2}} + 2m\sqrt{2m} - \frac{5}{2}\sqrt{2m} \\ = \frac{5}{2}\sqrt{2m} - \frac{3m}{3m}\sqrt{2m} + 2m\sqrt{2m} - \frac{5}{2}\sqrt{2m} = (2m-1)\sqrt{2m}$$

$$7. \frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{3}{32}} - \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{36}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{9}} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2}{32 \cdot 2}} - \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{6}{36 \cdot 6}} + \frac{2}{9} \sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \left( \frac{3}{20} - \frac{1}{36} + \frac{2}{9} \right) \sqrt[3]{6} = \frac{31}{90} \sqrt[3]{6}$$

$$8. \sqrt[3]{2} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{54} - 12 \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 6 \sqrt[3]{2} = (1+1-6) \sqrt[3]{2} = -4 \sqrt[3]{2}$$

$$9. 4x \sqrt{\frac{30}{x}} - 9a \sqrt{\frac{x}{30}} + ax \sqrt{\frac{3}{ax}} = 4x \sqrt{\frac{30x}{x^2}} - 9a \sqrt{\frac{3ax}{(30)^2}} + ax \sqrt{\frac{3ax}{(ax)^2}} \\ = 4\sqrt{30x} - 3\sqrt{30x} + \sqrt{30x} = (4-3+1)\sqrt{30x} = 2\sqrt{30x}$$

$$10. \frac{5}{4} \sqrt{\frac{1}{75}} - 6 \sqrt{\frac{3}{8}} + \frac{1}{4} \sqrt{36} + \sqrt{150} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{75 \cdot 3}} - 6 \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2}} + \frac{1}{4} \sqrt{6} + 5\sqrt{6} \\ = \frac{1}{12} \sqrt{6} - \frac{3}{2} \sqrt{6} + \frac{1}{4} \sqrt{6} + 5\sqrt{6} = \frac{23}{6} \sqrt{6}$$

$$11. \frac{12b^2}{a^2} \sqrt{\frac{a^3}{3b^3}} - \frac{4}{b} \sqrt{\frac{3b^3}{a}} - \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{27}{ab}} = \frac{12b^2}{a^2} \sqrt{\frac{3a^3b}{9b^4}} - \frac{4}{b} \sqrt{\frac{3ab^3}{a^2}} - \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{27ab}{(ab)^2}} \\ = \frac{4}{a} \sqrt{3ab} - \frac{4}{a} \sqrt{3ab} - \frac{2}{a} \sqrt{3ab} = -\frac{2}{a} \sqrt{3ab}$$

$$12. \frac{5}{4} \sqrt[3]{16} + 4 \sqrt[3]{\frac{125}{16}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{54}} + 2 \sqrt[3]{108} = \frac{5}{4} \sqrt[3]{4} + 4 \sqrt[3]{\frac{125 \cdot 4}{16 \cdot 4}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{4}{54 \cdot 4}} + 2 \sqrt[3]{3^3 \cdot 4} \\ = \frac{5}{4} \sqrt[3]{4} + 5 \sqrt[3]{4} + \frac{1}{12} \sqrt[3]{4} + 6 \sqrt[3]{4} = \frac{37}{3} \sqrt[3]{4}$$

$$13. \frac{2}{3} \sqrt{\frac{9}{2xy}} + \sqrt{\frac{x^3}{32y}} - 4 \sqrt{\frac{2y^4}{27x^3}} + \sqrt{\frac{4y^6}{x^2}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{9(2xy)}{(2xy)^2}} + x \sqrt{\frac{2xy}{64y^2}} - 4y \sqrt{\frac{2xy}{27x^3}} + \sqrt{\frac{2y^3x}{x^2}} \\ = \frac{1}{xy} \sqrt{2xy} + \frac{x}{8y} \sqrt{2xy} - \frac{4y}{3x} \sqrt{2xy} + \frac{y}{x} \sqrt{2xy} = \left( \frac{1}{xy} + \frac{x}{8y} + \frac{y}{x} \right) \sqrt{2xy} - \frac{4y}{3x} \sqrt{2xy}$$

$$14. 6 \sqrt[3]{\frac{2}{9a^2b^3}} + 9 \sqrt{\frac{2a}{3b^2}} + 4 \sqrt{\frac{ab^5}{216}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{27b}{8a^3}} = 6 \sqrt[3]{\frac{6ab}{27a^3b^3}} + 9 \sqrt{\frac{6ab}{9b^4}} + 4 \sqrt[3]{\frac{6ab}{216 \cdot 6}} - \sqrt{\frac{6ab}{40^2}} \\ = \frac{2}{ab} \sqrt[3]{6ab} + \frac{3}{b^2} \sqrt{6ab} + \frac{b^2}{9} \sqrt{6ab} - \frac{1}{2a^2} \sqrt{6ab} = \frac{2}{ab} \sqrt{6ab} + \left( \frac{3}{b^2} + \frac{b^2}{9} - \frac{1}{2a^2} \right) \sqrt{6ab}$$

### Ejercicio 124

1 Reducir los radicales de cada grupo a otros con el mismo índice:

$$1. \sqrt{2}, \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[16]{16}$$

$$2. \sqrt{5}, \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5^2}, \sqrt[4]{3}$$

$$3. \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{2^4}, \sqrt[12]{5^3}$$

$$4. \sqrt[4]{7}, \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{7^3}, \sqrt[12]{3^2}$$

5.  $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{3^4}, \sqrt[12]{5^3}, \sqrt[12]{7^3}$
6.  $\sqrt[3]{2^2}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[5]{10} = \sqrt[60]{2^8}, \sqrt[60]{5^9}, \sqrt[60]{10^1}$
7.  $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4]{b^5}, \sqrt[9]{c^4} = \sqrt[180]{a^{40}}, \sqrt[180]{b^{25}}, \sqrt[180]{c^8}$
8.  $\sqrt{2x}, \sqrt[4]{y^3}, \sqrt[5]{z^2} = \sqrt[10]{(2x)^{10}}, \sqrt[10]{y^{15}}, \sqrt[10]{z^8}$
9.  $\sqrt{a-b}, \sqrt[4]{a+b}, \sqrt[6]{ab}, \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[12]{(a-b)^2}, \sqrt[12]{(a+b)^3}, \sqrt[12]{a^2b^4}, \sqrt[12]{a^8b^4}$
10.  $\sqrt[3]{x^2y^2}, \sqrt[5]{x^3y^3}, \sqrt[4]{x^4y^4}, \sqrt[8]{x^4y^4} = \sqrt[60]{x^{40}y^{40}}, \sqrt[60]{x^{36}y^{36}}, \sqrt[60]{x^{48}y^{48}}, \sqrt[60]{x^{30}y^{30}}$

II. Disponer los radicales siguientes en orden numérico creciente:

1.  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3}, \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{25} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{5}$
2.  $\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{8} = \sqrt[60]{5^6}, \sqrt[60]{7^4}, \sqrt[60]{8^3} = \sqrt[60]{15625}, \sqrt[60]{2401}, \sqrt[60]{512} = \sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{7} < \sqrt{5}$
3.  $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt[6]{\frac{1}{8}}, \sqrt[6]{\frac{1}{16}}, \sqrt[6]{\frac{343}{512}} = \frac{1}{16} < \frac{1}{8} < \frac{343}{512} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{7}{8}}$
4.  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{\frac{1}{16}}, \sqrt[12]{\frac{1}{729}}, \sqrt[12]{\frac{8}{27}} = \frac{1}{729} < \frac{1}{16} < \frac{8}{27} = \sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
5.  $\sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{4}, \sqrt{2} = \sqrt[20]{3^5}, \sqrt[20]{4^4}, \sqrt[20]{2^{10}} = \sqrt[20]{243}, \sqrt[20]{256}, \sqrt[20]{1024} = \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4} < \sqrt{2}$

### Ejercicio 125

Efectuar las siguientes multiplicaciones indicadas:

1.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$
2.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$
3.  $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{18} = 24\sqrt{2}$
4.  $-3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} = -6\sqrt{50} = -30\sqrt{2}$
5.  $a\sqrt{a} \cdot b\sqrt{a} = ab\sqrt{ab}$
6.  $a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{y/x} = ab\sqrt{xy/x} = ab\sqrt{y}$
7.  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
8.  $\sqrt{6x} \cdot \sqrt{2x} = \sqrt{12x^2} = 2x\sqrt{3}$
9.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$
10.  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{20}$
11.  $2\sqrt[3]{9} \cdot 4\sqrt[3]{6} = 8\sqrt[3]{54} = 24\sqrt[3]{2}$
12.  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{240} = 2\sqrt[3]{30}$
13.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3}, \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{27}, \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{108}$
14.  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt[6]{5^2}, \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[6]{25}, \sqrt[6]{343} = \sqrt[6]{8575}$

$$5. \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{32000}$$

$$6. \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3}, \sqrt[3]{3^3}, \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{331776} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$7. \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3}, \sqrt[3]{3^3}, \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{625}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{67500}$$

$$8. \sqrt[3]{4x^3}, \sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{8x^3} = 2x$$

$$9. \sqrt{x^2y}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx} = \sqrt{x^2y^2z^2} = xyz$$

$$10. \sqrt{x^3}, \sqrt[3]{xy} = \sqrt[6]{x^2y^2}, \sqrt[6]{x^5y^5}$$

$$11. (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4-3=1$$

$$12. (\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3-5=-2$$

$$13. (3\sqrt{7}-7\sqrt{3})(3\sqrt{7}+7\sqrt{3}) = (3\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 7 - 49 \cdot 3 = -84$$

$$14. (2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}) = (2\sqrt{a})^2 - (3\sqrt{b})^2 = 4a-9b$$

$$15. (2\sqrt{5}-3)(7\sqrt{5}-10) = 14\sqrt{5^2} - 20\sqrt{5} - 21\sqrt{5} + 30 = 70 - 41\sqrt{5} + 30 = 100 - 41\sqrt{5}$$

$$16. (2-\sqrt{3})^3 = 2^3 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^3 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$17. (4\sqrt{7}-\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{6}) = 8\sqrt{35} + 4\sqrt{42} - 2\sqrt{15} - \sqrt{18} = 8\sqrt{35} - 2\sqrt{15} + 4\sqrt{42} - 3\sqrt{2}$$

$$18. (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{6}) + (\sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$19. (8\sqrt{2}+5\sqrt{3})(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = 32\sqrt{2} - 24\sqrt{6} + 20\sqrt{6} - 15\sqrt{3} = 16 - 4\sqrt{6} - 15\sqrt{3}$$

$$20. (\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2 = a - 4\sqrt{ab} + 4b$$

$$21. \sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{8}) = 2 - \sqrt{6} + \sqrt{12} - \sqrt{16} = 2 - \sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 4 = -2 - \sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$

$$22. (\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{6}) = \sqrt{6} + 3 - 5\sqrt{18} - 2\sqrt{2^3} - 2\sqrt{6} + 10\sqrt{12} = -1 - \sqrt{6} - 15\sqrt{2} + 20\sqrt{3}$$

$$23. (1\sqrt{32}+4\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{8}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 1\sqrt{256} - 4\sqrt{96} + 1\sqrt{160} + 4\sqrt{24} - 24 + 4\sqrt{15} - 3\sqrt{40} - 4\sqrt{15} - 3(\sqrt{5})^2 = -7 + 2\sqrt{10} - 8\sqrt{6} + 10\sqrt{15}$$

$$24. (1\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{7})(5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{7}) = 10(\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{15} - 4\sqrt{21} - 5\sqrt{15} - 2(\sqrt{5})^2 + 1\sqrt{35} + 15\sqrt{21} - 6\sqrt{35} - 2\sqrt{7}^2 = 30 - \sqrt{15} + 11\sqrt{21} - 10 + 8\sqrt{35} - 42 = -22 - \sqrt{15} + 11\sqrt{21} + 8\sqrt{35}$$

$$25. (2\sqrt{13}+\sqrt{12}-2\sqrt{5})(2\sqrt{13}+\sqrt{12}+2\sqrt{5}) = (2\sqrt{13}+\sqrt{12})^2 - (2\sqrt{5})^2 = 4/3 + 8 \cdot 12 - 20 = 4/3$$

$$26. \sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{3\sqrt{12}} - 2\sqrt[3]{18} + 5\sqrt[3]{24}) = 6\sqrt[3]{72} - 2\sqrt[3]{108} + 5\sqrt[3]{144} = 6\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{4} + 10\sqrt[3]{18}$$

$$27. (\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^3})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{y^3} = x+y$$

$$28. (\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^3})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{b^3} = a-b$$

$$39. (\sqrt[3]{5} + \sqrt{2})(\sqrt[3]{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt[3]{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = \sqrt[3]{25} - 2$$

$$40. (\sqrt[3]{4} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt[3]{4})^2 - 2\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt{27} + 3 = 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{432} + 3$$

$$41. (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 = x+1 + 2\sqrt{x^2-1} + x-1 = 2x + 2\sqrt{x^2-1}$$

$$42. (\sqrt{x} - \sqrt{x+3})^2 = x - 2\sqrt{x^2+3x} + x+3 = x - 2\sqrt{x^2+3x} + x+3 = 2x+3 - 2\sqrt{x^2+3x}$$

$$43. (\sqrt{a+b} - 2\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} + 2\sqrt{a-b}) = (\sqrt{a+b})^2 - (2\sqrt{a-b})^2 = a+b - 4(a-b) = -3a+5b$$

$$44. (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})^2 - (\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{x+2})^2 + 2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (\sqrt{x-3})^2 - (\sqrt{2x-1})^2 \\ = x+2 + 2\sqrt{(x+2)(x-3)} + x-3 - 2x+1 = 2\sqrt{x^2-x-6}$$

$$45. \left(\frac{r}{2}\sqrt{3} + \frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{r^2}{4}(3) + 2\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{3} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}(4-2\sqrt{3}) \\ = \frac{3}{4}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{r^2}{4} - \frac{4}{4}r^2 + \frac{2}{4}\sqrt{3}r^2 = \sqrt{3}r^2$$

$$46. \sqrt{7+\sqrt{13}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{13}} = \sqrt{49-13} = \sqrt{36} = 6$$

$$47. \sqrt{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{16-12} = 2$$

$$48. \sqrt{5+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{2}} = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$$

$$49. \sqrt{\sqrt{23}-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\sqrt{23}+\sqrt{7}} = \sqrt{23-7} = \sqrt{16} = 4$$

$$50. (5+2\sqrt{3}) - 10(5+2\sqrt{3}) + 13 = 25 + 10\sqrt{3} + 12 - 50 - 20\sqrt{3} + 13 = 0$$

$$51. (4-3\sqrt{5}) + 6(4-3\sqrt{5}) + 8 = 16 - 24\sqrt{5} + 45 + 24 - 24\sqrt{5} + 8 = 93 - 48\sqrt{5}$$

$$52. \text{ Hallar el valor de } x^2 - 6x + 7 \text{ para } x = 3 - \sqrt{2}$$

$$x^2 - 6x + 7 = (3 - \sqrt{2})^2 - 6(3 - \sqrt{2}) + 7 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 - 18 + 6\sqrt{2} + 7 = 0$$

$$53. \text{ Hallar el valor de } x^2 - 2x - 4 \text{ para } x = 1 + \sqrt{5}$$

$$x^2 - 2x - 4 = (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) - 4 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4 = 0$$

$$54. \text{ Hallar el valor de } 2x^2 - 2x - 1 \text{ para } x = (1 - \sqrt{3})/2$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4}\right) - 1 + \sqrt{3} - 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{3}{2} - 2 + \sqrt{3} \\ = 0$$

$$55. \text{ Hallar el valor de } x^2 + 6x - 19 \text{ para } x = \sqrt{7} - 3$$

$$x^2 + 6x - 19 = (\sqrt{7} - 3)^2 + 6(\sqrt{7} - 3) - 19 \\ = 7 - 6\sqrt{7} + 9 + 6\sqrt{7} - 18 - 19 = -21$$



## Ejercicio 126

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

$$1. \sqrt{6} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

$$2. \sqrt{20} : \sqrt{5} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

$$3. \sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}$$

$$4. \sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$5. \sqrt{3} : \sqrt{7} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{7^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$6. 2 : \sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$7. 3\sqrt{2} : \sqrt{6} = 3 \sqrt{\frac{2}{6}} = 3 \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{3}$$

$$8. 2\sqrt{3} : \sqrt{8} = 2 \sqrt{\frac{3}{8}} = 2 \sqrt{\frac{24}{8^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$9. \sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{\frac{a/b}{b/c}} = \sqrt{\frac{ac}{b^2}} = \frac{\sqrt{ac}}{b}$$

$$10. \sqrt[3]{88} : \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{\frac{88}{11}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$11. \sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{\frac{24}{6}} = \sqrt[3]{4}$$

$$12. \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 9}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

$$13. \sqrt[3]{\frac{9}{16}} : \sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{9/16}{3/8}} = \sqrt[3]{\frac{72}{48}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 36}{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$14. 3\sqrt[3]{2} : 5\sqrt[3]{16} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$15. \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{30}{20}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$16. \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{30}} = \sqrt[3]{\frac{240}{360}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

$$17. \sqrt{12} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{12^3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{\frac{1728}{4}} = \sqrt[6]{432}$$

$$18. \sqrt[3]{6} : \sqrt{3} = \sqrt[6]{36} : \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{\frac{36 \cdot 27}{3^6}} = \frac{\sqrt[6]{972}}{3}$$

$$19. \sqrt{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{64} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{\frac{64}{2}} = \sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$$

$$20. \sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{256} : \sqrt[12]{216} = \sqrt[12]{\frac{256}{216}} = \sqrt[12]{\frac{32 \cdot 3^3}{3^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2^5 \cdot 3^9}}{3}$$

$$21. \sqrt[3]{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}} : \sqrt[6]{\frac{b^3}{c^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^2/b^3}{b^3/c^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^2 c^3}{b^6}} = \sqrt[6]{\frac{a^2 c^3 b}{b^6}} = \frac{\sqrt[6]{a^2 c^3 b}}{b}$$

$$22. \frac{\sqrt{5} \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt[6]{125} \cdot \sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{1000}} = \sqrt[6]{\frac{1125}{16000}} = \sqrt[6]{\frac{9}{128}} = \sqrt[6]{\frac{9 \cdot 2^5}{2^6 \cdot 2^6}} = \frac{\sqrt[6]{288}}{4}$$

$$23. \frac{\sqrt{24a^3}}{\sqrt{4a^5}} = \sqrt{\frac{24a^3}{4a^5}} = \frac{\sqrt{6}}{a}$$

$$24. \frac{3b\sqrt{2}}{\sqrt{72b}} = 3b\sqrt{\frac{2}{72b}} = 3b\sqrt{\frac{1}{36b}} = 3b\sqrt{\frac{b}{36b^3}} = \frac{\sqrt{b}}{2}$$

$$25. \frac{\sqrt{3c^2}}{\sqrt[3]{9c}} = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9c}} = \frac{c\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{81c^2}} = c\sqrt[6]{\frac{27}{81c^2}} = c\sqrt[6]{\frac{3^5 c^4}{3^6 c^6}} = \frac{\sqrt[6]{243c^4}}{3}$$

$$26. \frac{2x\sqrt[3]{4y}}{3y\sqrt{2x}} = \frac{2x\sqrt[6]{16y^2}}{3y\sqrt[6]{8x^3}} = \frac{2x}{3y}\sqrt[6]{\frac{16y^2}{8x^3}} = \frac{2x}{3y}\sqrt[6]{\frac{2x^3y^2}{x^6}} = \frac{2\sqrt[6]{2x^3y^2}}{3y}$$

$$27. \sqrt[3]{\frac{x^3}{y}} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[6]{\frac{x^4/y^2}{x^3/y^3}} = \sqrt[6]{xy}$$

$$28. \sqrt{\frac{2x}{y}} : \sqrt[3]{\frac{2y}{x^2}} = \sqrt[6]{\frac{8x^3/y^3}{4y^2/x^4}} = \sqrt[6]{\frac{2x^7}{y^5}} = \sqrt[6]{\frac{2x^7y}{y^6}} = \frac{x}{y}\sqrt[6]{2xy}$$

$$29. \sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[2]{a^1} : \sqrt[2]{a^3} = \sqrt[4]{\frac{a^1}{a^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^5}{a^{11}}} = \frac{\sqrt[4]{a^5}}{a}$$

$$30. \sqrt[4]{ab^3} : \sqrt[4]{a^5b} = \sqrt[12]{a^3b^9} : \sqrt[12]{a^{10}b^5} = \sqrt[12]{\frac{a^3b^9}{a^{10}b^5}} = \sqrt[12]{\frac{a^3b^4}{a^{11}b^6}} = \frac{\sqrt[12]{a^5b^7}}{a}$$

$$30. \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$31. \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

$$32. \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$33. \frac{5}{4-\sqrt{11}} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{5} = 4+\sqrt{11}$$

$$34. \frac{6}{2+\sqrt{3}} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{4-3} = 6(2-\sqrt{3})$$

$$35. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3-4} = -\sqrt{6}-2\sqrt{2}$$

$$36. \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{6}}{2} = 1+\sqrt{6}$$

$$37. \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$38. \frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = \frac{(3+\sqrt{6})^2}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})} = \frac{9+6\sqrt{6}+6}{9-6} = \frac{15+6\sqrt{6}}{3} = 5+2\sqrt{6}$$

$$39. \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{7-2\sqrt{14}+2}{7-2} = \frac{9-2\sqrt{14}}{5}$$

$$40. \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \frac{12-12\sqrt{6}+18}{12-18} = -(5-2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}-5$$

$$41. \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$$43. \frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x+1} \cdot x+1}{1-x-1} = -\frac{[(x+1)+\sqrt{x+1}]}{x}$$

$$44. \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{6}} = \frac{(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}-3\sqrt{6})}{(2\sqrt{2}+3\sqrt{6})(2\sqrt{2}-3\sqrt{6})} = \frac{12-18\sqrt{3}+4\sqrt{3}-18}{8-54} = \frac{3+7\sqrt{3}}{23}$$

$$45. \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{2a}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{2a}+\sqrt{a-b})(\sqrt{2a}-\sqrt{a-b})} = \frac{2a-2\sqrt{2a^2-2ab+a-b}}{2a-a+b} = \frac{3a-b-2\sqrt{2a(a-b)}}{a+b}$$

$$46. \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} = \frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})} = \frac{x+y-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y}{x+y-x+y} = \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$47. \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-7} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{2+2\sqrt{10}+5-7}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})\sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} = \frac{\sqrt{20}+\sqrt{50}+\sqrt{70}}{10} = \frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}+7\sqrt{7}}{10}$$

$$48. \frac{-4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{-4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{-4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{3})^2-2} = \frac{-4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-2(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{-2(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{1-3} = -2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

$$49. \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-3} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3)(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-9} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)}{2(\sqrt{6}-2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+3)(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{2(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{6}+6)}{6-4} = 5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}+6$$

$$50. \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{1+3+2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{3})^2-2} = \frac{2(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{3-3\sqrt{3}+\sqrt{3}-3-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{1-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$51. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{8})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{8})} = \frac{3+\sqrt{15}-2\sqrt{6}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-8} = \frac{3+\sqrt{15}-2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{15}+5-8}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{15}-2\sqrt{6})\sqrt{15}}{2(\sqrt{15})^2} = \frac{3\sqrt{15}+15-6\sqrt{10}}{30} = \frac{5+\sqrt{15}-2\sqrt{10}}{10}$$

$$\begin{aligned}
 52. \frac{x\sqrt{3} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{3} - \sqrt{x+y}} &= \frac{(x\sqrt{3} - y\sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{3} + \sqrt{x+y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{3} - \sqrt{x+y})(\sqrt{x} + \sqrt{3} + \sqrt{x+y})} = \frac{x\sqrt{3x} + x\sqrt{3} + x\sqrt{y(x+y)} - xy - y\sqrt{x} - y\sqrt{y(x+y)}}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})^2 - (x+y)} \\
 &= \frac{[(x-y)\sqrt{xy} + (x\sqrt{3} - y\sqrt{x})\sqrt{y(x+y)}]\sqrt{x+y}}{2(\sqrt{xy})^2} = \frac{(x-y)\sqrt{xy} + (x\sqrt{xy^3} - y\sqrt{x^3y})\sqrt{x+y}}{2xy} \\
 &= \frac{xy(x-y) + (xy\sqrt{xy} - xy\sqrt{xy})\sqrt{x+y}}{2xy} = \frac{x-y + (\sqrt{xy} - \sqrt{xy})\sqrt{x+y}}{2}
 \end{aligned}$$

$$53. \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})[(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{5}$$

$$54. \frac{6}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} = \frac{6[(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})[(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2]} = \frac{6(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{27}} = 3(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})$$

$$55. \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(1 + \sqrt[3]{2})} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} = \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{(1 + \sqrt[3]{2})(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{3}$$

$$56. \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3-2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

### Ejercicio 127

Efectuar las siguientes operaciones. Expresar los resultados en su forma más simple:

$$1. (\sqrt[3]{x})^4 = \sqrt[3]{x^4} = x\sqrt[3]{x}$$

$$2. (\sqrt{a^3})^3 = \sqrt{a^9} = a^4\sqrt{a}$$

$$3. (\sqrt[3]{x^{30}})^4 = \sqrt[3]{x^{30 \cdot 4}} = x^{40}$$

$$4. (\sqrt[5]{2x})^4 = \sqrt[5]{2^4x^4} = \sqrt[5]{16x^4}$$

$$5. (\sqrt[3]{4})^3 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$6. (\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$7. \sqrt[4]{\sqrt{a^8}} = \sqrt[4]{a^8} = a$$

$$8. \sqrt{\sqrt[3]{4x}} = \sqrt[6]{4x}$$

$$9. \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^{10}} = x^{10/15} = \sqrt[3]{x}$$

$$10. \sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2} = a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$11. \sqrt[3]{\sqrt[5]{64x^{30}}} = \sqrt[15]{2^6x^{30}} = x^2 2^{2/5} = x^2 \sqrt[5]{4}$$

$$12. \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = [2(2 \cdot 2^{1/2})^{1/2}]^{1/2} = [2(2^{3/2})^{1/2}]^{1/2} = (2 \cdot 2^{3/4})^{1/2} = (2^{7/4})^{1/2} = \sqrt[8]{2^7}$$

$$13. \sqrt[4]{\sqrt[3]{4096a^6}} = \sqrt[12]{4096a^6} = \sqrt[12]{2^{12}a^6} = 2^{12/12}a^{6/12} = 2^{1/2}a^{1/2} = \sqrt{2a}$$

$$14. (\sqrt{\sqrt[5]{4x^4}})^6 = (\sqrt[10]{4x^4})^6 = \sqrt[5]{(2^2)^6x^{24}} = 2^{12/5}x^{24/5} = 2^{2\frac{2}{5}}x^{4\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{4x^8}$$

$$15. \sqrt[5]{x^{5/2} (x^{1/3}/x^{1/3})^6} = \sqrt[5]{x^{5/2} (x^2/x^3)} = \sqrt[5]{x^{5/2}/x} = (x^{3/2})^{1/5} = x^{3/10} = \sqrt[10]{x^3}$$

### Ejercicio 128

I Hallar la raíz cuadrada de los polinomios siguientes:

1.  $a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} & a - b \\ -a^2 & \\ \hline -2ab + b^2 & (2a-b)(-b) \\ 2ab - b^2 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = a - b$$

2.  $x^2 + 4xy + 4y^2$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2} & x + 2y \\ -x^2 & \\ \hline 4xy + 4y^2 & (2x+2y)(2y) \\ -4xy - 4y^2 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = x + 2y$$

3.  $9a^2 + 12ab + 4b^2$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9a^2 + 12ab + 4b^2} & 3a + 2b \\ -9a^2 & \\ \hline 12ab + 4b^2 & (6a+2b)(2b) \\ -12ab - 4b^2 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = 3a + 2b$$

4.  $25x^2 - 30xy + 9y^2$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{25x^2 - 30xy + 9y^2} & 5x - 3y \\ -25x^2 & \\ \hline -30xy + 9y^2 & (10x-3y)(-3y) \\ 30xy - 9y^2 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$25x^2 - 30xy + 9y^2 = 5x - 3y$$

5.  $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} & x^2 - 2x + 1 \\ -x^4 & \\ \hline -4x^3 + 6x^2 & (2x^2-2x)(-2x) \\ 4x^3 - 4x^2 & (2x^2-4x+1)(1) \\ \hline 2x^2 - 4x + 1 & \\ -2x^2 + 4x - 1 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

6.  $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4} & x^2 + 3x + 2 \\ -x^4 & \\ \hline 6x^3 + 13x^2 & (2x^2+3x)(3x) \\ -6x^3 - 9x^2 & (2x^2+6x+2)(2) \\ \hline 4x^2 + 12x + 4 & \\ -4x^2 - 12x - 4 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = x^2 + 3x + 2$$

7.  $31a^2 - 10a^3 + a^4 + 9 - 30a$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{a^4 - 10a^3 + 31a^2 - 30a + 9} & a^2 - 5a + 3 \\ -a^4 & \\ \hline -10a^3 + 31a^2 & (2a^2-5a)(-5a) \\ 10a^3 - 25a^2 & (2a^2-10a+3)(3) \\ \hline 6a^2 - 30a + 9 & \\ -6a^2 + 30a - 9 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$31a^2 - 10a^3 + a^4 + 9 - 30a = a^2 - 5a + 3$$

8.  $4y^4 - 16y^3 + 20y^2 - 8y + 1$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4y^4 - 16y^3 + 20y^2 - 8y + 1} & 2y^2 - 4y + 1 \\ -4y^4 & \\ \hline -16y^3 + 20y^2 & (4y^2-4y)(-4y) \\ 16y^3 - 16y^2 & (4y^2-8y+1)(1) \\ \hline 4y^2 - 8y + 1 & \\ -4y^2 + 8y - 1 & \\ \hline & / \end{array}$$

$$4y^4 - 16y^3 + 20y^2 - 8y + 1 = 2y^2 - 4y + 1$$

$$9. \quad 9x^4 - 6x^3y + 19x^2y^2 - 6xy^3 + 9y^4$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9x^4 - 6x^3y + 19x^2y^2 - 6xy^3 + 9y^4} & 3x^2 - xy + 3y^2 \\ -9x^4 & (6x^2 - xy)(-xy) \\ \hline -6x^3y + 19x^2y^2 & (6x^2 - 2xy + 3y^2)(3y^2) \\ -6x^3y + x^2y^2 & \\ \hline 18x^2y^2 - 6xy^3 + 9y^4 & \\ -18x^2y^2 + 6xy^3 - 9y^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$10. \quad 44x^2y^2 + 16y^4 + 20x^3y + 25x^4 + 16xy^3$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{25x^4 + 20x^3y + 44x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4} & 5x^2 + 2xy + 4y^2 \\ -25x^4 & (10x^2 + 2xy)(2xy) \\ \hline 20x^3y + 44x^2y^2 & (10x^2 + 4xy + 4y^2)(4y^2) \\ -20x^3y - 4x^2y^2 & \\ \hline 40x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4 & \\ -40x^2y^2 - 16xy^3 - 16y^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$11. \quad 49c^4 - 61c^3 + 25 + 42c^3 - 30c$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{49c^4 + 42c^3 - 61c^2 - 30c + 25} & 7c^2 + 3c - 5 \\ -49c^4 & (14c^2 + 3c)(3c) \\ \hline 42c^3 - 61c^2 & (14c^2 + 6c - 5)(-5) \\ -42c^3 + 9c^2 & \\ \hline -70c^2 - 30c + 25 & \\ 70c^2 + 30c - 25 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$12. \quad 36a^4 - 48a^3 + 4a^2 + 10a + 4$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{36a^4 - 48a^3 + 4a^2 + 10a + 4} & 6a^2 - 4a - 1 \\ -36a^4 & (12a^2 - 4a)(-4a) \\ \hline -48a^3 + 4a^2 & (12a^2 - 8a - 1)(-1) \\ -48a^3 + 16a^2 & \\ \hline 12a^2 + 10a + 4 & \\ 12a^2 - 8a - 1 & \\ \hline 18a + 5 & \end{array}$$

$$13. \quad \sqrt{x^6 + 6x^5 + 11x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^6 + 6x^5 + 11x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x + 1} & x^3 + 3x^2 + x - 1 \\ -x^6 & (2x^3 + 3x^2)(3x^2) \\ \hline 6x^5 + 11x^4 & (2x^3 + 6x^2 + x)(x) \\ -6x^5 - 9x^4 & (2x^3 + 6x^2 + 2x - 1)(-1) \\ \hline 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 & \\ -2x^4 - 6x^3 - x^2 & \\ \hline -2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 & \\ 2x^3 + 6x^2 + 2x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$14. 37x^3 - 4x^5 - 26x^3 + x^6 + 9 - 30x + 14x^4$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x^6 - 4x^5 + 14x^4 - 26x^3 + 37x^2 - 30x + 9} \\ -x^6 \\ \hline -4x^5 + 14x^4 \\ 4x^5 - 4x^4 \\ \hline 10x^4 - 26x^3 + 37x^2 \\ -10x^4 + 20x^3 - 25x^2 \\ \hline -6x^3 + 12x^2 - 30x + 9 \\ 6x^3 - 12x^2 + 30x - 9 \\ \hline / \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ (2x^3 - 2x^2)(-2x^2) \\ (2x^3 - 4x^2 + 5x)(5x) \\ (2x^3 - 4x^2 + 10x - 3)(-3) \end{array}$$

$$15. 2x^4 + 12x^3 + x^6 + 15x + x^2 + 40$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x^6 + 2x^4 + 12x^3 + x^2 + 15x + 40} \\ -x^6 \\ \hline 2x^4 + 12x^3 + x^2 \\ -2x^4 \quad -x^2 \\ \hline 12x^3 \quad +15x + 40 \\ -12x^3 \quad -12x - 36 \\ \hline 3x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 + x + 6 \\ (2x^3 + x)(x) \\ (2x^3 + 2x + 6)(6) \end{array}$$

$$16. 4x^2 + 12x + 13 + 6/x + 1/x^2$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{4x^2 + 12x + 13 + 6x^{-1} + x^{-2}} \\ -4x^2 \\ \hline 12x + 13 \\ -12x - 9 \\ \hline 4 + 6x^{-1} + x^{-2} \\ -4 - 6x^{-1} - x^{-2} \\ \hline / \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 3 + x^{-1} \\ (4x + 3)(3) \\ (4x + 6 + x^{-1})(x^{-1}) \end{array}$$

$$17. x^2 + \frac{2}{x} - 4x + \frac{1}{4x^2} + 3$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x^2 - 4x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{4x^2}} \\ -x^2 \\ \hline -4x + 3 \\ 4x - 4 \\ \hline -1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{4x^2} \\ 1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{4x^2} \\ \hline / \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2 - 1/2x \\ (2x - 2)(-2) \\ (2x - 4 - \frac{1}{2x})(\frac{1}{2x}) \end{array}$$

$$18. \frac{9x^2}{y^2} + \frac{4x}{y} + \frac{31}{9} + \frac{2y}{3x} + \frac{y^2}{4x^2}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{\frac{9x^2}{y^2} + \frac{4x}{y} + \frac{31}{9} + \frac{2y}{3x} + \frac{y^2}{4x^2}} \\ -\frac{9x^2}{y^2} \\ \hline \frac{4x}{y} + \frac{31}{9} \\ -\frac{4x}{y} - \frac{4}{9} \\ \hline 3 + \frac{2y}{3x} + \frac{y^2}{4x^2} \\ -3 - \frac{2y}{3x} - \frac{y^2}{4x^2} \\ \hline / \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{3x}{y} + \frac{2}{3} + \frac{y}{2x} \\ (\frac{6x}{y} + \frac{2}{3})(\frac{2}{3}) \\ (\frac{6x}{y} + \frac{4}{3} + \frac{y}{2x})(\frac{y}{2x}) \end{array}$$



$$: \frac{3}{2a^2} - \frac{7}{4} - \frac{1}{a^3} + a + a^2 + \frac{1}{4a^4}$$

$\begin{array}{r} \sqrt{a^2 + a - \frac{7}{4} + \frac{3}{2a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4a^4}} \\ -a^2 \\ \hline a - 7/4 \\ -a - 1/4 \\ \hline -2 + 3/2a^2 - 1/a^3 \\ 2 + 1/a - 1/4a^2 \\ \hline 1/a + 1/2a^2 - 1/a^3 + 1/4a^4 \\ -1/a - 1/2a^2 + 1/a^3 - 1/4a^4 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} a + \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} \\ \hline (2a - \frac{1}{2})(\frac{1}{2}) \\ \hline (2a + 1 - \frac{1}{a})(-\frac{1}{a}) \\ \hline (2a - 1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{2a^2})(\frac{1}{2a^2}) \end{array}$
---	--

$$10. 25 - 10X^{-1} + 12X^{-5} + 26X^{-3} + 9X^{-6} - 2X^{-4} + 21X^{-2}$$

$\begin{array}{r} \sqrt{25 - 10X^{-1} + 21X^{-2} + 26X^{-3} - 2X^{-4} + 12X^{-5} + 9X^{-6}} \\ -25 \\ \hline -10X^{-1} + 21X^{-2} \\ 10X^{-1} - X^{-2} \\ \hline 20X^{-2} + 26X^{-3} - 2X^{-4} \\ -20X^{-2} + 4X^{-3} - 4X^{-4} \\ \hline 30X^{-3} - 6X^{-4} + 12X^{-5} + 9X^{-6} \\ -30X^{-3} + 6X^{-4} - 12X^{-5} - 9X^{-6} \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 - X^{-1} + 2X^{-2} + 3X^{-3} \\ \hline (10 - X^{-1})(-X^{-1}) \\ \hline (10 - 2X^{-1} + 2X^{-2})(2X^{-1}) \\ \hline (10 - 2X^{-1} + 4X^{-2} + 3X^{-3})(3X^{-3}) \end{array}$
--	--

II Hallar los tres primeros términos de la raíz aproximada de cada una de las expresiones siguientes:

1.  $1 + 2x$

$\begin{array}{r} \sqrt{1 + 2x} \\ -1 \\ \hline 2x \\ -2x - x^2 \\ \hline -x^2 \\ x^2 + x^3 - \frac{x^4}{4} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 + x - \frac{x^2}{2} \\ \hline (2 + x)(x) \\ \hline (2 + 2x - \frac{x^2}{2})(-\frac{x^2}{2}) \end{array}$
--	--

2.  $a^2 - b$

$\begin{array}{r} \sqrt{a^2 - b} \\ -a^2 \\ \hline -b \\ -b - \frac{b^2}{4a^2} \\ \hline -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^3}{8a^4} - \frac{b^4}{64a^6} \end{array}$	$\begin{array}{r} a - \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{8a^3} \\ \hline (2a - b/2a)(-b/2a) \\ \hline (2a - b/2a + b^2/8a^3)(b^2/8a^3) \end{array}$
--	--

3.

$\begin{array}{r} \sqrt{x^2 + 2h} \\ -x^2 \\ \hline 2h \\ -2h - h^2/x^2 \\ \hline -h^2/x^2 \\ h^2/x^2 + h^3/x^4 - h^4/4x^6 \\ \hline h^3/x^4 - h^4/4x^6 \end{array}$	$\begin{array}{r} x + h/x - h^2/2x^3 \\ \hline (2x + h/x)(h/x) \\ \hline (2x + 2h/x - h^2/2x^3)(-h^2/2x^3) \end{array}$
--	---

4. 1-23

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{1-23} & 1-y-y^2/2 \\
 -1-23 & (2-y)(-y) \\
 \hline
 23-y^2 & (2-2y-y^2/2)(-y^2/2) \\
 -y^2 & \\
 \hline
 y^2-y^3-y^4/4 & \\
 -y^3-y^4/4 & \\
 \hline
 & 
 \end{array}$$

5.  $x^4+ax$ 

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{x^4+ax} & x+a/2-a^3/8x \\
 -x^2 & (2x+a/2)(a/2) \\
 \hline
 ax & (2x+a-a^3/8x)(-a^3/8x) \\
 -ax-a^3/4 & \\
 \hline
 -a^3/4 & \\
 a^3/4+a^3/8x-a^4/64x^2 & \\
 \hline
 a^3/8x-a^4/64x^2 & 
 \end{array}$$

6.  $1+x+x^2$ 

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{1+x+x^2} & 1+x/2+3x^2/8 \\
 -1 & (2+x/2)(x/2) \\
 \hline
 x+x^2 & (2+x+3x^2/8)(3x^2/8) \\
 -x-x^2/4 & \\
 \hline
 3x^2/4 & \\
 -3x^2/4-3x^3/8-9x^4/64 & \\
 \hline
 -3x^3/8-9x^4/64 & 
 \end{array}$$

III Hallar las raíces cuadradas de los siguientes números:

1. 322 624

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{322\,624} & 568 \\
 -25 & (10 \cdot 6)(6) \\
 \hline
 726 & (112 \cdot 8)(8) \\
 -636 & \\
 \hline
 9024 & \\
 -9024 & \\
 \hline
 / & 
 \end{array}$$

2. 690 561

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{690\,561} & 831 \\
 -64 & (16 \cdot 3)(3) \\
 \hline
 505 & (1661)(1) \\
 -489 & \\
 \hline
 1661 & \\
 -1661 & \\
 \hline
 / & 
 \end{array}$$

3. 345,96

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{345,96} & 18,6 \\
 -1 & (28)(8) \\
 \hline
 245 & (366)(6) \\
 -224 & \\
 \hline
 2196 & \\
 -2196 & \\
 \hline
 / & 
 \end{array}$$

4. 0,110 889

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{0,110\,889} & 0,333 \\
 11 & (63)(3) \\
 -9 & (663)(3) \\
 \hline
 208 & \\
 -189 & \\
 \hline
 1989 & \\
 -1989 & \\
 \hline
 / & 
 \end{array}$$

5. 626,5009

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{626,5009} & 25,03 \\
 -4 & (45)(5) \\
 \hline
 226 & (5003)(3) \\
 -225 & \\
 \hline
 15009 & \\
 -15009 & \\
 \hline
 / & 
 \end{array}$$

6. 82,0836

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{82,0836} & 9,06 \\
 -81 & (1806)(6) \\
 \hline
 10836 & \\
 -10836 & \\
 \hline
 / & 
 \end{array}$$

## Ejercicio 129

En los problemas 1º a 6º se supone que  $a$  es la hipotenusa y  $b$  y  $c$  los catetos de un triángulo rectángulo.

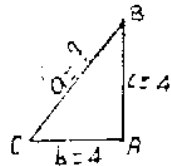
Calcular  $a$  dado  $b=c=4$

Utilizando el teorema de pitágoras se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$a = 4\sqrt{2}$$



1. Calcular  $a$  dados  $b=6$  y  $c=9$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{6^2 + 9^2}$$

$$a = \sqrt{117}$$

$$a = 3\sqrt{13}$$



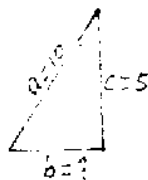
3. Calcular  $b$  dados  $a=10$  y  $c=5$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{10^2 - 5^2}$$

$$b = \sqrt{75}$$

$$b = 5\sqrt{3}$$



4. Calcular  $b$  dados  $a=8$  y  $c=6$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} ; b = \sqrt{8^2 - 6^2} ; b = \sqrt{28} ; b = 2\sqrt{7}$$

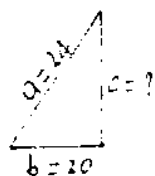
5. Calcular  $c$  dados  $a=24$  y  $b=20$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{24^2 - 20^2}$$

$$c = \sqrt{176}$$

$$c = 4\sqrt{11}$$



6. Calcular  $c$  dados  $a=18$  y  $b=12$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} ; c = \sqrt{18^2 - 12^2} ; c = \sqrt{180} ; c = 6\sqrt{5}$$

7. Hallar la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 m

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2}$$

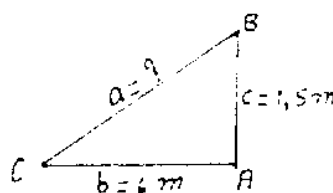
$$h = 3\sqrt{3} \text{ m}$$





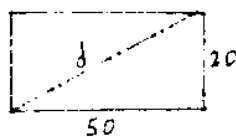
Un tejado cae 1,50 m en 6 m ¿Cuál es su longitud aproximada?

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{b^2 + c^2} \approx b + c^2/2b \\
 &\approx 6 + (1,5)^2/2(6) \\
 &\approx 6,1875 \\
 a &\approx 6,19 \text{ m}
 \end{aligned}$$



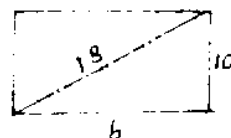
1. Hallar la longitud de la diagonal de un rectángulo que tiene 50 varas de largo y 20 varas de ancho.

$$\begin{aligned}
 d^2 &= a^2 + b^2 \\
 d^2 &= 50^2 + 20^2 \\
 d &= 10\sqrt{29} \text{ varas}
 \end{aligned}$$



2. La diagonal de un rectángulo mide 18 m y un lado 10 m, hállese el otro lado y el área del rectángulo.

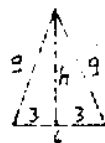
$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 - c^2 & A &= b \cdot h \\
 b &= \sqrt{18^2 - 10^2} & A &= (4\sqrt{14}) \cdot 10 \\
 b &= 4\sqrt{14} \text{ m} & A &= 40\sqrt{14} \text{ m}^2
 \end{aligned}$$



3. En un campo de juego de "base-ball" hay 90 pies de una base a otra y el cajón del "pitcher" está a 60 pies del "home" ¿Qué distancia hay del cajón del "pitcher" a la primera base.

19. Hallar el área de un triángulo isósceles sabiendo que sus lados iguales miden 9 m y el lado desigual 6 cm (comiencese por calcular la altura relativa al lado desigual; la altura divide este lado en dos segmentos iguales).

$$\begin{aligned}
 A &= b \cdot h/2 & h &= \sqrt{9^2 - 3^2} & A &= 6(6\sqrt{2})/2 \\
 A &= ? & h &= 6\sqrt{2} & A &= 18\sqrt{2} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$



20. El lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio  $r$  es igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el lado del hexágono y el lado del decágono regular inscritos en la misma circunferencia. Sabiendo que  $L_6 = r$  y que  $L_{10} = r/2(\sqrt{5} - 1)$  hallar  $L_5$  (La notación  $L_6$  significa lado del hexágono,  $L_{10}$  lado del decágono y  $L_5$  lado del pentágono).

$$L_6 = r; L_{10} = r/2(\sqrt{5} - 1); L_5 = ?$$

$$l_s = \sqrt{l_0^2 + l_0^2}$$

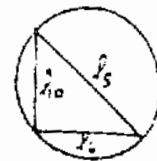
$$l_s = \sqrt{r^2 + r^2/4(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$l_s = \sqrt{r^2 + r^2/2(3-\sqrt{5})}$$

$$l_s = r \sqrt{(2+3-\sqrt{5})/2}$$

$$l_s = r \sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$$

$$l_s = r/2 \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$



### Ejercicio 130

Hallar la raíz cuadrada de cada una de las expresiones irracionales siguientes:

1.  $3 + 2\sqrt{2}$

Si:  $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ;  $3 = x+y$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{9-8} = x-y \quad ; \quad 1 = x-y$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} \quad ; \quad \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$x-y=1$$

$$x+y=3$$

$$x=2; y=1$$

2.  $7 + 4\sqrt{3}$

$$x+y=7$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{49-48} = x-y$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x-y=1$$

$$x+y=7$$

$$x=4; y=3$$

3.  $6 - 2\sqrt{5}$

$$x+y=6$$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{36-20} = x-y$$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

$$x-y=4$$

$$x+y=6$$

$$x=5$$

$$y=1$$

4.  $49 + 12\sqrt{5}$

$$\sqrt{49+12\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{49-12\sqrt{5}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{2401-720} = x-y$$

$$\sqrt{49+12\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} + 2$$

$$x-y=41$$

$$x+y=49$$

$$x=45$$

$$y=4$$

5.  $79 - 30\sqrt{6}$

$$\sqrt{79-30\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{79+30\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{6241-5400} = x-y$$

$$\sqrt{79-30\sqrt{6}} = 3\sqrt{6} - 5$$

$$\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$x-y=29$$

$$x+y=79$$

$$x=54$$

$$y=25$$

6.  $5 + 2\sqrt{6}$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{25-24} = x-y$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x-y=1$$

$$x+y=5$$

$$x=3$$

$$y=2$$

7.  $12 - 2\sqrt{35}$

$$\sqrt{12-2\sqrt{35}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{12+2\sqrt{35}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{144-140} = x-y$$

$$\sqrt{12-2\sqrt{35}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

$$x-y=2$$

$$x+y=12$$

$$x=7$$

$$y=5$$

$$\begin{array}{lcl}
 8. \quad 34 - 24\sqrt{2} & & \\
 \sqrt{34 - 24\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} & X - Y = 2 & \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\
 \sqrt{34 + 24\sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} & X + Y = 34 & \sqrt{2} = 1 \\
 \sqrt{1156 - 1152} = X - Y & X = 18 & \\
 \sqrt{34 - 24\sqrt{2}} = 4 - 3\sqrt{2} & Y = 16 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 9. \quad 19 - 4\sqrt{21} & & \\
 \sqrt{19 - 4\sqrt{21}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} & X - Y = 5 & \\
 \sqrt{19 + 4\sqrt{21}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} & X + Y = 19 & \\
 \sqrt{361 - 336} = X - Y & X = 12 & \\
 \sqrt{19 - 4\sqrt{21}} = \sqrt{12} - \sqrt{7} & Y = 7 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 10. \quad 94 + 42\sqrt{5} & & \\
 \sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} & X - Y = 4 & \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\
 \sqrt{94 - 42\sqrt{5}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} & X + Y = 94 & \\
 \sqrt{94 + 42\sqrt{5}} = 7 + 3\sqrt{5} & X = 49; Y = 45 & 
 \end{array}$$

### Ejercicio 131

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \sqrt{x+5} = 3 \\
 (\sqrt{x+5})^2 = (3)^2 \\
 x+5 = 9 \\
 x = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2. \quad 3\sqrt{x+1} = \sqrt{18} \\
 (3\sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{18})^2 \\
 9(x+1) = 18 \\
 x = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3. \quad \sqrt{2x-2} = 4 \\
 (\sqrt{2x-2})^2 = (4)^2 \\
 2x-2 = 16 \\
 x = 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4. \quad \sqrt{3x+4} - 5 = 0 \\
 (\sqrt{3x+4})^2 = (5)^2 \\
 3x+4 = 25 \\
 x = 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5. \quad \sqrt{2x-1} = \sqrt{x+4} \\
 (\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{x+4})^2 \\
 2x-1 = x+4 \\
 x = 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 6. \quad \sqrt{5x-14} = 2\sqrt{x-1} \\
 (\sqrt{5x-14})^2 = (2\sqrt{x-1})^2 \\
 5x-14 = 4x-4 \\
 x = 10
 \end{array}$$

$$7. 10 = 3\sqrt{x} - 5$$

$$15 = 3\sqrt{x}$$

$$(5)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x = 25$$

$$8. \sqrt{2x} + 9 = 3$$

$$(\sqrt{2x})^2 = (-6)^2$$

$$2x = 36$$

$$x = 18$$

$$9. 7 - \sqrt{5y} = 2$$

$$(5)^2 = (\sqrt{5y})^2$$

$$25 = 5y$$

$$y = 5$$

$$10. 2\sqrt{x-2} + 1 = 5$$

$$2\sqrt{x-2} = 4$$

$$(\sqrt{x-2})^2 = (2)^2$$

$$x = 6$$

$$11. \sqrt[3]{x+2} = 2$$

$$(\sqrt[3]{x+2})^3 = (2)^3$$

$$x+2 = 8$$

$$x = 6$$

$$12. \sqrt[3]{2x+7} = 3$$

$$(\sqrt[3]{2x+7})^3 = (3)^3$$

$$2x+7 = 27$$

$$x = 10$$

$$13. \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x-6}$$

$$(\sqrt[3]{x+1})^3 = (\sqrt[3]{2x-6})^3$$

$$x+1 = 2x-6$$

$$x = 7$$

$$14. 9 + \sqrt[3]{4x-4} = 5$$

$$(\sqrt[3]{4x-4})^3 = (-4)^3$$

$$4x-4 = -64$$

$$x = -15$$

$$15. \sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x+9})^2 = (1 + \sqrt{x})^2$$

$$x+9 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

$$(4)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x = 16$$

$$16. \sqrt{x^2-x-2} = 5-x$$

$$(\sqrt{x^2-x-2})^2 = (5-x)^2$$

$$x^2-x-2 = 25-10x+x^2$$

$$9x = 27$$

$$x = 3$$

$$17. \sqrt{x-16} - \sqrt{x} = -2$$

$$\sqrt{x-16} = \sqrt{x} - 2$$

$$(\sqrt{x-16})^2 = (\sqrt{x} - 2)^2$$

$$x-16 = x-4\sqrt{x}+4$$

$$(5)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x = 25$$

$$18. \sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x-3} + \sqrt{3})^2$$

$$x = x-3 + 2\sqrt{3x-9} + 3$$

$$2\sqrt{3x-9} = 0 ; (\sqrt{3x-9})^2 = 0$$

$$3x-9 = 0$$

$$x = 3$$

$$19. \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$$

$$(\sqrt{x+1})^2 = (5 - \sqrt{x-4})^2$$

$$x+1 = 25 - 10\sqrt{x-4} + x-4$$

$$(2)^2 = (\sqrt{x-4})^2$$

$$x = 8$$

$$20. \sqrt{x+12} - \sqrt{x} = 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+12})^2 = (\sqrt{x} + 2)^2$$

$$x+12 = x+4\sqrt{x}+4$$

$$(2)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x = 4$$



$$\begin{aligned}
 21. \quad & \sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+5} \\
 & (\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{4x+5})^2 \\
 & x+5 + 2\sqrt{x^2+3x-10} + x-2 = 4x+5 \\
 & (2\sqrt{x^2+3x-10})^2 = (2x+2)^2 \\
 & 4x^2+12x-40 = 4x^2+8x+4 \\
 & x = 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23. \quad & \sqrt{4x+13} - \sqrt{x+5} = \sqrt{x+2} \\
 & (\sqrt{4x+13} - \sqrt{x+5})^2 = (\sqrt{x+2})^2 \\
 & 4x+13 - 2\sqrt{4x^2+33x+65} + x+5 = x+2 \\
 & (-2\sqrt{4x^2+33x+65})^2 = (2x+8)^2 \\
 & 4x^2+33x+65 = 4x^2+32x+64 \\
 & x = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & \sqrt{x-4} - \sqrt{4x-27} + \sqrt{x-9} = 0 \\
 & (\sqrt{x-4} + \sqrt{x-9})^2 = (\sqrt{4x-27})^2 \\
 & x-4 + 2\sqrt{x^2-13x+36} + x-9 = 4x-27 \\
 & (\sqrt{x^2-13x+36})^2 = (x-7)^2 \\
 & x^2-13x+36 = x^2-14x+49 \\
 & x = 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27. \quad & \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\
 & (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3) = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) \\
 & x-5\sqrt{x}+6 = x+3\sqrt{x}+2 \\
 & (2\sqrt{x})^2 = 1^2 \\
 & x = 1/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \quad & 2(x-4)^{-1/2} + (x-4)^{1/2} = 3 \\
 & \frac{2}{\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4} = 3 \\
 & 2 + (\sqrt{x-4})^2 = 3\sqrt{x-4} \\
 & (x-2)^2 = (3\sqrt{x-4})^2 \\
 & x^2-4x+4 = 9x-36 \\
 & x^2-13x+40 = 0 \\
 & (x-8)(x-5) = 0 \\
 & x_1 = 8 \text{ Ai}; x_2 = 5 \text{ No satisfy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \quad & 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-6} \\
 & (2\sqrt{x-3})^2 = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})^2 \\
 & 4x-12 = x+1 + 2\sqrt{x^2-4x-12} + x-6 \\
 & (x-4)^2 = (\sqrt{x^2-4x-12})^2 \\
 & x^2-8x+16 = x^2-4x-12 \\
 & x = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24. \quad & \sqrt{2+\sqrt{x}} + \sqrt{2-\sqrt{x}} = \sqrt{x} \\
 & (\sqrt{2+\sqrt{x}} + \sqrt{2-\sqrt{x}})^2 = (\sqrt{x})^2 \\
 & 2+\sqrt{x} + 2\sqrt{4-x} + 2-\sqrt{x} = x \\
 & (2\sqrt{4-x})^2 = (x-4)^2 \\
 & 16-4x = x^2-8x+16 \\
 & x^2-4x = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26. \quad & \frac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}} = -3 \\
 & 1+\sqrt{x-1} = -3+3\sqrt{x-1} \\
 & 4 = 2\sqrt{x-1} \\
 & (2)^2 = (\sqrt{x-1})^2 \\
 & x = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad & \sqrt{x-20} + \sqrt{x} = 40/\sqrt{x-20} \\
 & (\sqrt{x-20})^2 + \sqrt{x^2-20x} = 40 \\
 & x-20 + \sqrt{x^2-20x} = 40 \\
 & (\sqrt{x^2-20x})^2 = (60-x)^2 \\
 & x^2-20x = 3600-120x+x^2 \\
 & x = 36
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30. \quad & \frac{6a}{\sqrt{x+3a}} - \sqrt{x+3a} = \sqrt{x} \\
 & 6a - (\sqrt{x+3a})^2 = \sqrt{x^2+3ax} \\
 & 6a - x - 3a = \sqrt{x^2+3ax} \\
 & (3a-x)^2 = (\sqrt{x^2+3ax})^2 \\
 & 9a^2 - 6ax + x^2 = x^2 + 3ax \\
 & -9ax = -9a^2 \\
 & x = a
 \end{aligned}$$

## Ejercicio 132

Efectuar las sumas siguientes:

1.  $(3, 4) + (2, 3) = (3+2, 4+3) = (5, 7)$
2.  $(4, -2) + (-1, 5) = (4+(-1), (-2)+5) = (3, 3)$
3.  $(-1, -6) + (0, 4) = (-1+0, -6+4) = (-1, -2)$
4.  $(5, 0) + (0, 4) = (5+0, 0+4) = (5, 4)$
5.  $(3, \sqrt{2}) + (-6, 0) = (3-6, \sqrt{2}+0) = (-3, \sqrt{2})$
6.  $(1/3, 1/2) + (2/3, 1/4) = (1/3+2/3, 1/2+1/4) = (1, 3/4)$
7.  $(8, 10) + (8, -10) = (8+8, 10-10) = (16, 0)$
8.  $(-3; 2, 5) + (1; 3, 5) = (-3+1; 2, 5+3, 5) = (-2, 6)$
9.  $(\sqrt{8}, -4) + (\sqrt{18}, 5) = (\sqrt{8} + \sqrt{18}, -4+5) = (5\sqrt{2}, 1)$
10.  $(6, \sqrt{3}) + (-4, \sqrt{12}) = (6-4, \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = (2, 3\sqrt{3})$

## Ejercicio 133

I. Efectuar los productos siguientes:

1.  $(8, 2)(5, 3) = (8 \cdot 5 - 2 \cdot 3, 8 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = (40 - 6, 24 + 10) = (34; 34)$
2.  $(7, 6)(9, 4) = (63 - 24, 28 + 54) = (39; 82)$
3.  $(3, -2)(4, -1) = (12 - 2, -3 - 8) = (10; -11)$
4.  $(-5, 2)(3, -6) = (-15 + 12, 30 + 6) = (-3; 36)$
5.  $(9, 0)(2, -3) = (18 - 0, -27 + 0) = (18; -27)$
6.  $(0, 4)(-2, 5) = (0 - 20, 0 - 8) = (-20; -8)$
7.  $(2; 3, 5)(-1; 4) = (-2 - 14; 8 - 3, 5) = (-16; 4, 5)$
8.  $(6, 0)(4, 0) = (24 - 0, 0 + 0) = (24; 0)$
9.  $(\sqrt{3}, 2)(\sqrt{3}, -2) = (3 + 4, -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = (7; 0)$
10.  $(0, 2)(0, 2) = (0 - 4, 0 + 0) = (-4; 0)$

II Demostrar que el producto de dos números complejos es conmutativos.

a.- Sean  $(a, b)$  y  $(c, d)$

números complejos

b.-  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

definición de multiplicación de  $N^{\circ} C$ .

c.-  $(c, d)(a, b) = (ca - db, cb + da)$

definición de multiplicación de  $N^{\circ} C$ .

$= (ac - bd, ad + bc)$

conmutativa de  $N^{\circ} R$ s.

Como los literales  $b$  y  $c$  son iguales por tanto el producto de los  $N^{\circ}$  complejos es conmutativo

III Demostrar que si  $(a, b)(x, y) = (a, b)$  entonces  $x=1, y=0$

a.-  $(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$

definición de  $N^{\circ}$  complejos

b.-  $ax - by = a$  ; si  $x=1, y=0$

$ay + bx = b$  ; si  $x=1, y=0$

c.-  $(a, b)(x, y) = (a, b)$

por el literal anterior

### Ejercicio 134

Efectuar los productos siguientes:  $i = (0, 1)$  ;  $i^2 = -1$

1.  $(2 + 3i)(7 - i) = 14 + 21i - 2i - 3i^2 = 14 + 19i - 3(-1) = 17 + 19i$

2.  $(4 + i)(9 - 2i) = 36 + 9i - 8i - 2i^2 = 36 + i + 2 = 38 + i$

3.  $(5 - 4i)(5 + 4i) = 25 + 20i - 20i - 16i^2 = 25 + 16 = 41$

4.  $(2 - i)(-2 + 3i) = 2i - 4 + 6i - 3i^2 = -4 + 8i + 3 = -1 + 8i$

5.  $(1 - i)(1 - 2i) = 1 - i - 2i + 2i^2 = 1 - 3i + 2(-1) = -1 - 3i$

6.  $(8 + i)(8 - 3i) = 64 - 24i + 8i - 3i^2 = 64 - 16i - 3(-1) = 67 - 16i$

7.  $(6 + 5i)(-2 + 4i) = -12 + 24i - 10i + 20i^2 = -12 + 14i + 20(-1) = -32 + 14i$

$$8. (2+i)(7-3i) = 14 - 6i + 7i - 3i^2 = 14 + i - 3(-1) = 17 + i$$

$$9. (4+3i)^2 = 16 + 24i + 9i^2 = 16 + 24i + 9(-1) = 7 + 24i$$

$$10. (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

### Ejercicio 135

Representar geoméricamente los números complejos siguientes:

$$1. (3, 5) = 3 + 5i$$

$$2. (-1, 3) = -1 + 3i$$

$$3. (0, 6) = 6i$$

$$4. (3, 0) = 3$$

$$5. (2, 2) = 2 + 2i$$

$$6. (3, -2i) = (3, -2)$$

$$7. (-3, 3) = -3 + 3i$$

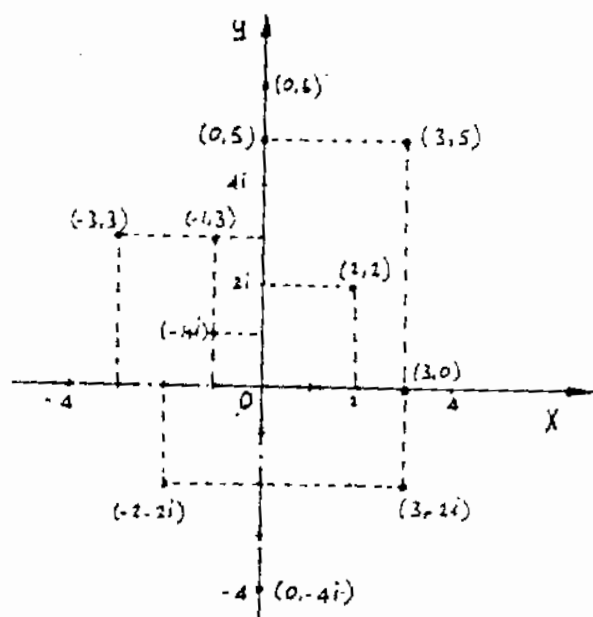
$$8. 5i = (0, 5)$$

$$9. -1 + i = (-1, 1)$$

$$10. -2 - 2i = (-2, -2)$$

$$11. -4i = (0, -4)$$

$$12. 8 + 7i = (8, 7)$$



### Ejercicio 136

I. Efectuar las sustracciones siguientes:

$$1. (8, -2) - (3, -5) = (8-3, -2+5) = (5; 3)$$

$$6. (9-2i) - (7-3i) = (9-7) + (-2+3)i = 2+i$$

$$2. (-7, 3) - (-6, 1) = (-7+6, 3-1) = (-1; 2)$$

$$3. (7, 4) - (7, -4) = (7-7, 4+4) = (0; 8)$$

$$4. (2+6i) - (5-2i) = (2-5, 6i+2i) = -3+8i$$

$$5. (-1+3i) - (2+4i) = (-1-2) + (3-4)i = -3-i$$

II Efectuar las divisiones siguientes:

$$(a,b) \div (c,d) = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \left( \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$1. (8,1) \div (1,2) = \frac{(8,1)}{(1,2)} = \left( \frac{8+2}{1+4}, \frac{1-16}{1+4} \right) = (2, -3)$$

$$2. (1,-1) \div (1,1) = \left( \frac{1-1}{1+1}, \frac{-1-1}{1+1} \right) = (0, -1) = -i$$

$$3. (9,1) \div (4,-1) = \left( \frac{36-2}{16+1}, \frac{3+9}{16+1} \right) = (2, 1)$$

$$4. (14,-23) \div (5,-2) = \left( \frac{70+46}{25+4}, \frac{-115+28}{25+4} \right) = (4, -3)$$

$$5. \frac{5+15i}{7+i} = \frac{(5+15i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{35+15-5i+105i}{49+1} = 1+2i$$

$$6. \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$7. \frac{-7-26i}{2-5i} = \frac{(-7-26i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{-14+130-35i-52i}{4+25} = 4-3i$$

$$8. \frac{19-3i}{6+i} = \frac{(19-3i)(6-i)}{(6+i)(6-i)} = \frac{114-3-19i-18i}{36+1} = 3-i$$

$$9. \frac{6-7i}{1-2i} = \frac{(6-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{6+14+12i-7i}{1+4} = 4+i$$

$$10. \frac{13+13i}{2-3i} = \frac{(13+13i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{26-39+39i+26i}{4+9} = -1+5i$$

### Ejercicio 137

Calcular las potencias siguientes:

$$1. (1+i)^2 = (1-i) + 2(1)(1)i = 2i$$

$$2. (1+i)^3 = 1 + 3(1)(i) + 3(i)^2 + i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$$

$$3. (2-5i)^2 = (4-25) + 2(2)(-5i) = -21-20i$$

$$4. (2+i)^3 = 2^3 + 3(2)^2i + 3(2)(i)^2 + i^3 = 8+12i-6-i = 2+11i$$

$$5. (7-3i)^2 = 49 - 42i + 9i^2 = 49 - 42i - 9 = 40 - 42i$$

$$6. (4+3i)^3 = 4^3 + 3(4)^2(3i) + 3 \cdot 4(3i)^2 + (3i)^3 = 64 + 144i - 108 - 27i = -44 + 117i$$

$$7. i^{-1} = 1/i^1 = 1/-1 = -1$$

$$8. i^{-3} = 1/i^3 = 1/-i = -i/i^1 = -i/-1 = i$$

$$9. (1-i)^{-1} = \frac{1}{(1-i)^1} = \frac{1}{(1-1) + 2(1)(-i)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

$$10. (1-i)^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{1}{1-3i-3+i} = -\frac{1}{2(1+i)} = -\frac{(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i}{4}$$

### Ejercicio 138

I Escribir la raíz definida de cada uno de los radicales siguientes:

$$1. \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$2. \sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

$$3. \sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = 7i$$

$$4. \sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = i\sqrt{2}$$

$$5. \sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$$

$$6. \sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2i\sqrt{2}$$

$$7. \sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11i$$

$$8. \sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1} = 2i\sqrt{3}$$

$$9. \sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1} = 2i\sqrt{5}$$

$$10. \sqrt{-50} = \sqrt{50} \cdot \sqrt{-1} = 5i\sqrt{2}$$

II Efectuar las operaciones indicadas:

$$1. \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$$

$$2. \sqrt{-2} \sqrt{-5} = \sqrt{10} i^2 = -\sqrt{10}$$

$$3. \sqrt{-4} \sqrt{-25} = \sqrt{100} i^2 = -10$$

$$4. \sqrt{-18} \sqrt{-2} = \sqrt{36} i^2 = -6$$

$$5. \sqrt{-9} \sqrt{7} = \sqrt{63} i = 3i\sqrt{7}$$

$$6. \sqrt{4} \cdot \sqrt{-16} = \sqrt{4} \sqrt{16} i = 8i$$

9.  $\sqrt{15}/\sqrt{-2} = \sqrt{15}/\sqrt{2} i = \sqrt{5}/i = \sqrt{5}i/i^2 = -i\sqrt{5}$
8.  $\sqrt{-3}/\sqrt{3} = \sqrt{6}/\sqrt{3} i = \sqrt{6/3} i = i\sqrt{2}$
3.  $\sqrt{-20}/\sqrt{-5} = \sqrt{20}i/\sqrt{5}i = \sqrt{20/5} = 2$
9.  $\sqrt{50}/\sqrt{-5} = \sqrt{10}/i = i\sqrt{10}/i^2 = -i\sqrt{10}$
11.  $\sqrt{-18}/\sqrt{7} = \sqrt{18}i/\sqrt{7} = 2i$
12.  $\sqrt{2}/\sqrt{-32} = \sqrt{2}/\sqrt{32}i = 1/\sqrt{16}i = 1/4i^2 = i/4i^2 = -i/4$
13.  $(\sqrt{-3})^2 = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3$
14.  $(\sqrt{-2})^3 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1})^3 = 2\sqrt{2} i^3 = -2i\sqrt{2}$
15.  $(\sqrt{-5})^4 = (\sqrt{5})^4 i^4 = 5^2(-1)^2 = 25$

### Ejercicio 139 (Reposo)

I Simplificar:

1.  $4^{n+3} \div 2^{n+1} = 2^{2n+6} \div 2^{n+1} = 2^{2n+6-n-1} = 2^{n+5}$
1.  $(3a^0x)^{-2} = (3x)^{-2} = 1/(3x)^2 = 1/9x^2$
3.  $4^{-2} + 2^{-1}/4^{-3} + 2^{-3} = 2^{-4} + 2^{-1}/2^{-6} + 2^{-3} = 2^{-1}(2^{-3}+1)/2^{-3}(2^{-3}+1) = 2^{-1+3} = 4$
4.  $\frac{9^{n+1}}{27^n} \div \frac{243}{3^{n+2}} = \frac{3^{2n+2}}{3^{3n}} \cdot \frac{3^{n+2}}{3^5} = \frac{3^{2n+2+n+2}}{3^{3n+5}} = 3^{3n+4-3n-5} = 3^{-1} = 1/3$
5.  $\left(\frac{x^4}{3y^{-2}}\right)^{-3} = \left(\frac{x^4y^2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{x^4y^2}\right)^3 = \frac{27}{x^{12}y^6}$
6.  $\left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}\right)^{-1} = \left(\frac{1/x+1/y}{1/x^2-1/y^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1/x+1/y}{[1/x+1/y][1/x-1/y]}\right)^{-1} = \left(\frac{xy}{y-x}\right)^{-1} = \frac{y-x}{x^2}$
7.  $(a^{-1}-b^{-1})(a-b)^{-1} = (1/a-1/b)(1/a-b) = (b-a/ab)(1/a-b) = -(a-b/ab)(1/a-b) = -1/ab$
8.  $\frac{5^{n+3}-5 \cdot 5^{n+1}}{5 \cdot 5^{n+2}} = \frac{5^{n+3}-5^{n+2}}{5^{n+3}} = \frac{5^{n+2}}{5^{n+3}} - \frac{5^{n+2}}{5^{n+3}} = 1-5^{n+2-n-3} = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
9.  $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} = \frac{1/a+1/b}{1/ab} = \frac{b+a/ab}{1/ab} = a+b$
10.  $\frac{(x^{-1}y^2z^0)^2}{(xy^{-1}z^{-1})^2} = \frac{(y^2/x)^2}{(x/yz)^2} = \frac{y^4/x^2}{y^2z^2/x^2} = \frac{y^4}{y^2z^2} = \frac{y^2}{z^2}$

II Expresar en notación científica los siguientes números:

1.  $0,00045 = 4,5 \cdot 10^{-4}$

2.  $834\,000\,000 = 8,34 \cdot 10^8$

3.  $0,000\,004\,8 = 4,8 \cdot 10^{-6}$

4.  $1\,320\,000\,000 = 1,32 \cdot 10^9$

III. Expresar los números siguientes en notación usual:

1.  $8,1 \cdot 10^4 = 81\,000$

2.  $7,62 \cdot 10^{-3} = 0,00762$

3.  $3,25 \cdot 10^{-4} = 0,000325$

4.  $2,2 \cdot 10^3 = 2\,200$

IV Efectuar las operaciones siguientes utilizando la notación científica:

1.  $81\,000\,000 \cdot 0,00027 = 8,1 \cdot 10^7 \cdot 2,7 \cdot 10^{-4} = (8,1)(2,7) 10^3 = 2,214 \cdot 10^4$

2.  $3\,400\,000 : 0,000\,000\,9 = 3,4 \cdot 10^6 : 9 \cdot 10^{-7} = 3,4/9 \cdot 10^{13} = 3,8 \cdot 10^{12}$

V Escribir la raíz definida por cada uno de los radicales siguientes: En aquellos que contienen factores literales se supondrá que las letras representan positivos.

1.  $\sqrt{9} = 3$

2.  $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3.  $\sqrt[3]{-216} = -6$

4.  $-\sqrt{16} = -4$

5.  $\sqrt{4x^4y^2} = 2x^2y$

6.  $\sqrt{9a^4b^4} = 3a^2b^2$

7.  $27^{2/3} = 7/27^{2/3} = 7/\sqrt[3]{(3^3)^2} = 1/9$

8.  $(-8)^{2/3} = \sqrt[3]{(-8)^2} = (-2)^2 = 4$

VI Hallar el valor en los siguientes:

1.  $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$

2.  $125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$

3.  $4^{3/2} = \sqrt{(2^2)^3} = 8$

4.  $64^{1/3} = \sqrt[3]{(2^6)^1} = 16$

5.  $9^{-1/2} = 1/9^{1/2} = 1/\sqrt{9} = 1/3$

6.  $8^{-1/3} = 1/8^{1/3} = 1/\sqrt[3]{2^3} = 1/2$

7.  $\sqrt[3]{-8x^3y^3} = -2xy^3$

8.  $\sqrt[3]{27a^4b^{11}} = 3a^2b^4$

VII Simplificar

1.  $81^{-3/4} + 81^{3/4} = 1/81^{3/4} + 81^{3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{(3^4)^3}} + \sqrt[4]{(3^4)^3} = \frac{1}{27} + 27 = \frac{730}{27}$

2.  $\frac{27^{2/3} + 27^{-2/3}}{9^{1/2} + 9^{-1/2}} = \frac{\sqrt[3]{(3^3)^2} + 1/\sqrt[3]{(3^3)^2}}{\sqrt{9} + 1/\sqrt{9}} = \frac{3^2 + 1/3^2}{3 + 1/3} = \frac{41}{15}$

3.  $(1/3 x^{1/2} y^{-3/2} z^{-1/4})^{-6} = (1/3)^{-6} (x^{1/2})^{-6} (y^{-3/2})^{-6} (z^{-1/4})^{-6} = 1/(1/3)^6 (x^3)(y^9)(z^{3/2})$   
 $= 3^6 x^3 y^9 z^{3/2} = 729 x^3 y^9 z^{3/2} / x^3$



$$8. \left( \frac{16a^{1/3} b^{1/2} c}{2^4 a^{7/6} b^{1/4} c^2} \right)^{-2} = \left( 2^3 a^{1/3 - 7/6} b^{1/2 - 1/4} c^{-2} \right)^{-2} = \left( 2^3 a^{-1/2} b^{1/4} c^{-2} \right)^{-2} = 2^{-6} a^3 b^{-1/2} c^2 = \frac{a^3 c^2}{64 b^{1/2}}$$

III Efectuar las operaciones indicadas:

$$1. (3x^{1/2} + 2 + 3x^{-1/2})(2x - x^{1/2}) = 6x^{3/2} - 3x + 4x - 2x^{1/2} + 6x^{1/2} - 3x^0 = 6x^{3/2} + 4x^{1/2} + x - 3 = 6x^{3/2} + x + 4x^{1/2} - 3$$

$$2. (a^{3/2} a + 2a^{1/2} - 1 + a^{-1/2})(a^{1/2} + 2a^{-1/2}) = a^2 + 2a^{3/2} + 2a - a^{3/2} - 2a - 2a^{1/2} + 2a + 4a^{1/2} + 4a^0 - a^{1/2} - 2 - 2a^{-1/2} a + 2a^{-1/2} + 2a^{-1} \\ = a^2 + a^{3/2} + 2a + a^{1/2} + 3 + 2a^{-1}$$

$$3. (x - 5x^{1/3} + 4x^{-1/3}) : (x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2) \\ \begin{array}{r} x - 5x^{1/3} + 4x^{-1/3} \\ - (x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2) \\ \hline -x + 3x^{2/3} - 2x^{1/3} \\ - (-x^{1/3} + 3 - 2x^{-1/3}) \\ \hline 3x^{1/3} - 7x^{1/3} \\ - (3x^{2/3} + 9x^{1/3} - 6) \\ \hline 2x^{1/3} - 6 + 4x^{-1/3} \\ - (2x^{1/3} + 6 - 4x^{-1/3}) \\ \hline \end{array} = x^{1/3} + 3 + 2x^{-1/3}$$

$$4. (2x^2 + x - 9x^{3/2} - 9 - 9x^{1/2}) : (2 - x^{-1/2} + 3x^{-1}) \\ \begin{array}{r} 2x^2 - 9x^{3/2} + x - 9x^{1/2} - 9 \\ - (2x^2 + x^{3/2} - 3x) \\ \hline -8x^{3/2} - 2x - 9x^{1/2} \\ - (6x^{3/2} - 4x + 12x^{1/2}) \\ \hline -6x + 3x^{1/2} - 9 \\ - (6x - 3x^{1/2} + 9) \\ \hline \end{array}$$

IX Expresar mediante exponentes Fraccionarios:

$$1. \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$$

$$2. \sqrt{xy^3} = (xy^3)^{1/2} = x^{1/2} y^{3/2}$$

$$3. \sqrt[3]{ab^2c^4} = (ab^2c^4)^{1/3} = a^{1/3} b^{2/3} c^{4/3}$$

$$4. \sqrt[5]{a^2b^{-1}} = (a^2b^{-1})^{1/5} = a^{2/5} b^{-1/5}$$

$$5. \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}} = 2x^{1/2} y^{-2/3}$$

$$6. \sqrt{\sqrt[3]{x^5}} = (x^{5/3})^{1/2} = x^{5/6}$$

X Simplificar los radicales siguientes:

$$1. \sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

$$3. \sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = 4\sqrt[3]{3}$$

$$4. \sqrt[3]{-135} = \sqrt[3]{3^3(-5)} = -3\sqrt[3]{5}$$

$$5. \sqrt[4]{640^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^1 \cdot 4^4 \cdot 5} = 20\sqrt[4]{40}$$

$$6. \sqrt[3]{-56x^3y^4} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 7x^3y^3 \cdot y} = -2xy\sqrt[3]{7y}$$

$$7. \sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{2/4} = \sqrt{7}$$

$$8. \sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{6^2} = 6^{2/6} = \sqrt[3]{6}$$

$$9. \sqrt[4]{144x^8y^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2 \cdot x^8y^3} = 2 \cdot 3^{2/4} x^{8/4} y^{3/4} = 2x^2 3^{1/2} y^{3/4} = 2x^2 \sqrt{3y}$$

10.  $\sqrt{3/5} = \sqrt{3 \cdot 5/5^2} = \sqrt{15}/5$

11.  $\sqrt{2/7} = \sqrt{2 \cdot 7/7^2} = \sqrt{14}/7$

12.  $\sqrt{5/12} = \sqrt{5 \cdot 3/36} = \sqrt{15}/6$

13.  $\sqrt[3]{1/5} = \sqrt[3]{25/5^3} = \sqrt[3]{25}/5$

14.  $\sqrt[3]{1/4} = \sqrt[3]{2/2^3} = \sqrt[3]{2}/2$

15.  $\sqrt{a/xy^3} = \sqrt{axy/x^2y^4} = \sqrt{axy}/x^2y^2$

16.  $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}/3$

17.  $2/\sqrt{6} = 2\sqrt{6}/(\sqrt{6})^2 = \sqrt{6}/3$

18.  $3/\sqrt[3]{9} = 3\sqrt[3]{3}/\sqrt[3]{3^2 \cdot 3} = \sqrt[3]{3}$

19.  $\sqrt[3]{10}/\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{10/25} = \sqrt[3]{10 \cdot 5/5^3} = \sqrt[3]{50}/5$

20.  $\sqrt[4]{x^5/8} = \sqrt[4]{2x^5/2^4} = x\sqrt[4]{2x}/2$

21.  $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{4x}} = \frac{\sqrt[6]{8x^2}}{\sqrt[6]{16x^3}} = \sqrt[6]{\frac{8x^2}{16x^3}} = \sqrt[6]{\frac{32x^2}{2^4x^3}} = \frac{\sqrt[6]{32x}}{2}$

**XI** Dar valores aproximados hasta las centésimas de las expresiones siguientes:

1.  $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0,8\sqrt{5} = 0,8(2,236) = 1,79$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} \quad 2,236 \\ 100 \\ - 84 \\ \hline 1600 \\ - 1329 \\ \hline 271 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{21} \quad 4,58 \\ 500 \\ - 425 \\ \hline 7500 \\ - 7264 \\ \hline 236 \end{array}$$

2.  $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4,58}{7} = 0,65$

3.  $\frac{3}{\sqrt[3]{12}} = \frac{3\sqrt[3]{12 \cdot 18}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3}} = \frac{3}{6} \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = \frac{\sqrt[3]{18}}{2}$

**XII** Efectuar las operaciones indicadas:

1.  $3\sqrt{44} + 2\sqrt{176} - 5\sqrt{99} + 4\sqrt{12} = 6\sqrt{11} + 8\sqrt{11} - 15\sqrt{11} + 8\sqrt{3} = -\sqrt{11} + 8\sqrt{3}$

2.  $8\sqrt{28} - 9\sqrt{63} - 4\sqrt{175} + 2\sqrt{252} = 16\sqrt{7} - 27\sqrt{7} - 20\sqrt{7} + 12\sqrt{7} = -19\sqrt{7}$

3.  $\sqrt[3]{40} + 4\sqrt[3]{135} - 3\sqrt[3]{625} + 10\sqrt[3]{1/25} = 2\sqrt[3]{5} + 12\sqrt[3]{5} - 15\sqrt[3]{5} + 10/5\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}$

4.  $6\sqrt[3]{32} - 8\sqrt{50} + 7\sqrt[3]{108} + 3\sqrt{800} = 12\sqrt[3]{4} - 40\sqrt{2} + 21\sqrt[3]{4} + 60\sqrt{2} = 33\sqrt[3]{4} + 20\sqrt{2}$

5.  $\sqrt{3a^2} + a\sqrt{3} - \sqrt{12a^2/25} - 9a/5\sqrt{1/3} = a\sqrt{3} + a\sqrt{3} - 2a/5\sqrt{3} - 3a/5\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 6. \quad \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} - 2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} &= \sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}} - 2a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} + \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} - \frac{2a}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b} = \sqrt{a^2-b^2} \left( \frac{1}{a+b} - \frac{2a}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7.  $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} = 6\sqrt{50} = 30\sqrt{2}$

8.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{3240} = 18\sqrt{10}$

9.  $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

10.  $3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18} = 3\sqrt[3]{216} = 18$

11.  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{144 \cdot 2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

12.  $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2/5} = \sqrt[3]{40/5} = \sqrt[3]{8} = 2$
13.  $\sqrt{3} \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{675}$
14.  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{16} \cdot \sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{432}$
15.  $(3+\sqrt{5})(4-\sqrt{5}) = 12-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}-5 = 7+\sqrt{5}$
16.  $(2\sqrt{3}-5\sqrt{6})(4\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = 8(\sqrt{3})^2 + 6\sqrt{18} - 20\sqrt{18} - 15(\sqrt{6})^2 = -66 - 42\sqrt{2}$
17.  $(\sqrt{x/y} - \sqrt{xy})^2 = x/y - 2\sqrt{x^2y/y} + xy = x/y - 2x + xy = x/y(1 - xy + y^2) = x/y(1-y)^2$
18.  $(2a+3\sqrt{a}+1)(3a-2\sqrt{a}+1) = 6a^2 - 4a\sqrt{a} + 2a + 9a\sqrt{a} - 6(\sqrt{a})^3 + 3\sqrt{a} + 3a - 2\sqrt{a} + 1$   
 $= 6a^2 + 5a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a + 1$
19.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{36}} = \sqrt[6]{\frac{27}{36}} = \sqrt[6]{\frac{3 \cdot 16}{2^4}} = \frac{\sqrt[6]{48}}{2}$
20.  $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{12}} = \frac{\sqrt[12]{6561}}{\sqrt[12]{1728}} = \sqrt[12]{\frac{6561}{1728}} = \sqrt[12]{\frac{243}{64}} = \sqrt[12]{\frac{243(64)}{2^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{15552}}{2}$
21.  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
22.  $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7-4\sqrt{3}$
23.  $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
24.  $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{3}-\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{27+6\sqrt{6}+2}{27-2} = \frac{29+6\sqrt{6}}{25}$
25.  $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{56}-\sqrt{16}-(\sqrt{7})^2+\sqrt{14}}{7-2} = \frac{2\sqrt{14}-4-7+\sqrt{14}}{5} = \frac{3\sqrt{14}-11}{5}$
26.  $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} = \frac{(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^2}{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})} = \frac{x^2y-2xy\sqrt{xy}+xy^2}{x^2y-xy^2} = \frac{xy(x-2\sqrt{xy}+y)}{xy(x-y)} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$
27.  $\frac{\sqrt{m+9}-3}{\sqrt{m+9}+3} = \frac{(\sqrt{m+9}-3)^2}{(\sqrt{m+9}+3)(\sqrt{m+9}-3)} = \frac{m+9-6\sqrt{m+9}+9}{m+9-9} = \frac{m+18-6\sqrt{m+9}}{m}$
28.  $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \frac{a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{a+x-a-x} = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$
29.  $\frac{\sqrt{3/2}-\sqrt{2/3}}{\sqrt{3/2}+\sqrt{2/3}} = \frac{(\sqrt{3/2}-\sqrt{2/3})^2}{(\sqrt{3/2}+\sqrt{2/3})(\sqrt{3/2}-\sqrt{2/3})} = \frac{3/2-2\sqrt{6/6}+2/3}{3/2-2/3} = \frac{9/2-2+4/6}{9/2-4/6} = \frac{1}{5}$
30.  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1/3\sqrt{1/2}-1/2\sqrt{1/3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1/6(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{6(2+2\sqrt{6}+3)}{2-3} = -6(5+2\sqrt{6})$
31.  $\frac{4}{7+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \sqrt{2}+2-\sqrt{6}$

$$32. \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2-2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-12} = -\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{12}$$

$$33. \frac{4\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{(4\sqrt{3}+3)(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{(4\sqrt{3}+3)(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-5} = \frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{5})}{2+4\sqrt{3}+6-5}$$

$$= \frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{5})}{3+4\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$34. \frac{1-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{7}} = \frac{(1-3\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7})} = \frac{(1-3\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-7} = \frac{(1-3\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7})}{3-6\sqrt{2}+6-7}$$

$$= \frac{(1-3\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7})}{2(1-3\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2}$$

$$35. \frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b^2} = \frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b^2} = \frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b^2}$$

$$36. \frac{2}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}} = \frac{2(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2})} = \frac{2(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})}{3+5} = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}}{4}$$

XIII Calcular con tres cifras decimales exactas el valor de la suma:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} - \frac{3}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{3(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3-1} - \frac{3(1-\sqrt{2})}{1-2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{2(2-1)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{3-3\sqrt{2}}{+1} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+6-6\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2} = \frac{4.898-9.898+7.732}{2} = 1.366$$

XIV Simplificar las expresiones algebraicas siguientes:

$$1. \frac{1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}(x+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = (a^2+x^2)^{-1/2}$$

$$2. \frac{\sqrt{a^2-x^2}-x/2(a^2-x^2)^{1/2}(-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^3} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}+x^2/\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$3. \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + a \frac{-a/x^2}{\sqrt{1-a^2/x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + a \frac{-a/x^2}{\sqrt{x^2-a^2}/x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}/x$$

$$4. (a^2-x^2)^{3/4} + x[-1/2(a^2-x^2)^{-3/2}(-2x)] = \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{a^2-x^2+x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$= a^2/(a^2-x^2)^{3/2} = a^2(a^2-x^2)^{-3/2}$$

IV Demostrar que  $\frac{1/3 y^{-1/3} + 1/3 y^{1/3} x^{-2/3}}{x^{1/3}}$  se reduce a  $\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$  si  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Demostración

$$\frac{\frac{1}{3} y^{-1/3} + \frac{1}{3} y^{1/3} x^{-2/3}}{x^{1/3}} = \frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}} = \frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}} \text{ como } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow \frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$$

VI Efectuar y simplificar:

1.  $(\sqrt[3]{x^2})^5 = \sqrt[3]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^9 \cdot x} = x^3 \sqrt[3]{x}$
2.  $(\sqrt[5]{8x^2})^4 = \sqrt[5]{2^{10} \cdot 2^2 \cdot x^{10} \cdot x^2} = 4x^2 \sqrt[5]{4x^2}$
3.  $\sqrt[3]{a^3 \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$
4.  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16x^4}} = \sqrt[12]{2^4 x^4} = 2^{4/12} x^{4/12} = \sqrt[3]{2x}$

XVII Hallar la raíz cuadrada de los polinomios siguientes:

1.  $4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 30x + 25$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 30x + 25} & 2x^2 - 3x + 5 \\ -4x^4 & (4x^2 - 3x)(-3x) \\ \hline -12x^3 + 29x^2 & (4x^2 - 6x + 5)(5) \\ 12x^3 - 9x^2 & \\ \hline 20x^2 - 30x + 25 & \\ -20x^2 + 30x - 25 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2.  $22a^2b^2 - 24a^3b + 9a^4 + b^4 - 8ab^3$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9a^4 - 24a^3b + 22a^2b^2 - 8ab^3 + b^4} & 3a^2 - 4ab + b^2 \\ -9a^4 & (6a^2 - 4ab)(-4ab) \\ \hline -24a^3b + 22a^2b^2 & (6a^2 - 8ab + b^2)(b^2) \\ 24a^3b - 16a^2b^2 & \\ \hline 6a^2b^2 - 8ab^3 + b^4 & \\ -6a^2b^2 + 8ab^3 - b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3.  $x^4 + 18x^3 + 65x^2 - 120x + 100$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^4 + 18x^3 + 65x^2 - 120x + 100} & x^2 + 9x - 8 \\ -x^4 & (2x^2 + 9x)(9x) \\ \hline 18x^3 + 65x^2 & (2x^2 + 18x - 8)(-8) \\ -18x^3 - 81x^2 & \\ \hline -16x^2 - 120x + 100 & \\ 16x^2 + 144x - 64 & \\ \hline 24x + 36 & \end{array}$$

4.  $x^2 + 4x + 2x/y + 4 + 4/y + 1/y^2$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^2 + 4x + 2x/y + 4 + 4/y + 1/y^2} & x + 2 + 1/y \\ -x^2 & \\ \hline 4x + 2x/y + 4 & (2x+2)(2) \\ -4x & \\ \hline 2x/y + 4/y + 1/y^2 & (2x+4+1/y)(1/y) \\ -2x/y - 4/y - 1/y^2 & \\ \hline & / \end{array}$$

5.  $4x^2 - 11x^{-1} - 12x + 2x^{-1} + 4x^{-3} + 13 + 4x^{-4}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4x^2 - 12x + 13 + 2x^{-1} - 11x^{-2} + 4x^{-3} + 4x^{-4}} & 2x - 3 + 1/x + 2x^{-2} \\ -4x^2 & \\ \hline -12x + 13 & (4x-3)(-3) \\ 12x - 9 & \\ \hline 4 + 2x^{-1} - 11x^{-2} & (4x-6+1/x)(1/x) \\ -4 + 6x^{-1} - x^{-2} & \\ \hline 8x^{-1} - 12x^{-2} + 4x^{-3} + 4x^{-4} & (4x-6+2x^{-1}+2x^{-2})(2x^{-2}) \\ -8x^{-1} + 12x^{-2} - 4x^{-3} - 4x^{-4} & \\ \hline & / \end{array}$$

XVIII Hallar los tres primeros términos de la raíz cuadrada aproximada de cada una de las expresiones siguientes:

1.  $4x^2 + 2x$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4x^2 + 2x} & 2x + 1/2 - 1/16x \\ -4x^2 & \\ \hline 2x & (4x+1/2)(1/2) \\ -2x - 1/4 & \\ \hline -1/4 & (4x+1-1/16x)(-1/16x) \\ 1/4 + 1/16x - 1/256x^2 & \end{array}$$

2.  $4a^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4a^2 + 1} & 2a + 1/4a - 1/64a^3 \\ -4a^2 & \\ \hline 1 & (4a+1/4a)(1/4a) \\ -1 - 1/16a^2 & \\ \hline -11/16a^2 - 1/16a^2 - 1/128a^4 - 1/4096a^6 & (4a+1/2a-1/64a^3)(-1/64a^3) \end{array}$$

3.  $1 - x$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 - x} & 1 - x/2 - x^2/8 \\ -1 & \\ \hline -x & (2-x/2)(-x/2) \\ x - x^2/4 & \\ \hline -x^2/4 & (2-x-x^2/8)(-x/8) \\ x^2/4 - x^3/8 - x^4/64 & \end{array}$$

4.  $1 - x + x^2$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 - x + x^2} & 1 - x/2 + 3/8x^2 \\ -1 & \\ \hline -x + x^2 & (2-x/2)(-x/2) \\ x - x^2/4 & \\ \hline 3/4x^2 & (2-x+3/8x^2)(3/8x^2) \\ -3/4x^2 + 3x^3/8 - 9x^4/64 & \end{array}$$

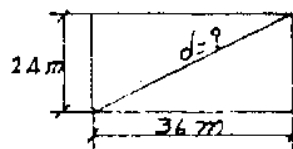
XIX Un rectángulo tiene 36 m de largo y 24 m de ancho. ¿Qué longitud tiene su diagonal?

$$d^2 = 36^2 + 24^2$$

$$d = \sqrt{1296 + 576}$$

$$d = \sqrt{12^2 \cdot 13}$$

$$d = 12\sqrt{13} \text{ m}$$



XX Una calle en pendiente es 4,50 m en 60 m medidos horizontalmente. Cuál es su longitud aproximada?

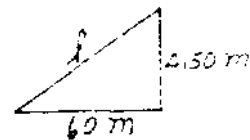
$$l = \sqrt{60^2 + 4,5^2}$$

$$\text{Si } a = \sqrt{b^2 + c^2} \approx b + c^2/2b$$

$$l \approx 60 + (4,5)^2/2(60)$$

$$l \approx 60 + 20,25/120$$

$$l \approx 60,17 \text{ m}$$



XXI Hallar la raizcuadrada de cada una de las siguientes expresiones irracionales:

1.  $9 + 4\sqrt{5}$

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$(\sqrt{9 + 4\sqrt{5}})(\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}) = x - y$$

$$\sqrt{81 - 80} = x - y \Rightarrow x - y = 1$$

$$\frac{x + y = 9}{x - y = 1}$$

$$x = 5; y = 4$$

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + \sqrt{4} = 2 + \sqrt{5}$$

2.  $15 - 6\sqrt{6}$

$$\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{15^2 - 6^2} = x - y \Rightarrow$$

$$x - y = 3$$

$$\frac{x + y = 15}{x - y = 3}$$

$$x = 9; y = 6$$

$$\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6}$$

3.  $18 - 8\sqrt{2}$

$$\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{18 + 8\sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{18^2 - 128} = x - y$$

$$14 = x - y$$

$$18 = x + y$$

$$x = 16; y = 2$$

$$\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{16} - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$$

4.  $52 + 14\sqrt{3}$

$$\sqrt{52 + 14\sqrt{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{52 - 14\sqrt{3}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{52^2 - 588} = x - y$$

$$x - y = 46$$

$$\frac{x + y = 52}{x - y = 46}$$

$$x = 49; y = 3$$

$$\sqrt{52 + 14\sqrt{3}} = \sqrt{49} + \sqrt{3}$$

$$= 7 + \sqrt{3}$$

XXII Resolver las ecuaciones siguientes:

1.  $\sqrt{5x+1} - 4 = 0$ ;  $\sqrt{5x+1} = 4$ ;  $5x+1 = 16$ ;  $x = 3$

2.  $\sqrt{6x+3} = \sqrt{10x-1}$ ;  $(\sqrt{6x+3})^2 = (\sqrt{10x-1})^2$ ;  $6x+3 = 10x-1$ ;  $4 = 4x$ ;  $x = 1$

3.  $\sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{5x-2}$ ;  $(\sqrt[3]{x+6})^3 = (\sqrt[3]{5x-2})^3$ ;  $x+6 = 5x-2$ ;  $8 = 4x$ ;  $x = 2$

4.  $\sqrt{x-5} - \sqrt{x+1} = 0$ ;  $(\sqrt{x-5})^2 = (\sqrt{x+1})^2$ ;  $x-5 = x+1$ ;  $0 \neq 6$  El ejercicio no tiene resultado

5.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+9} = 7$ ;  $(\sqrt{x+2})^2 = (7 - \sqrt{x+9})^2$ ;  $x+2 = 49 - 14\sqrt{x+9} + x+9$ ;  $-56 = -14\sqrt{x+9}$

$$(4)^2 = (\sqrt{x+9})^2$$

$$16 = x+9$$

$$x = 7$$

6.  $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+11} = \sqrt{4x+33}$ ;  $x+6 + 2\sqrt{x^2+17x+66} + x+11 = 4x+33$

$$(\sqrt{x^2+17x+66})^2 = (x+8)^2$$

$$x^2+17x+66 = x^2+16x+64$$

$$x = -2$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad \sqrt{x+20} - 2\sqrt{x-1} &= \sqrt{x-4} \\
 (\sqrt{x+20} - 2\sqrt{x-1})^2 &= (\sqrt{x-4})^2 \\
 x+20-4\sqrt{x^2+19x-20}+4x-4 &= x-4 \\
 (\sqrt{x^2+19x-20})^2 &= (x+5)^2 \\
 x^2+19x-20 &= x^2+10x+25 \\
 9x &= 45 ; x = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} &= \sqrt{2x} \\
 (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2 &= (\sqrt{2x})^2 \\
 a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x &= 2x \\
 (\sqrt{a^2-x^2})^2 &= (x-a)^2 \\
 a^2-x^2 &= x^2-2ax+a^2 \\
 x(x-a) &= 0 ; x = a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} &= 0 \\
 \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} + 1 &= 0 \\
 (\sqrt{x-2})^2 &= (\sqrt{x+2}-1)^2 \\
 x-2 &= x+2-2\sqrt{x+2}+1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-5)^2 &= (-2\sqrt{x+2})^2 \\
 25 &= 4(x+2) \\
 x &= 17/4
 \end{aligned}$$

XIII Efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

$$1. (2+3i) + (5-2i) - (4-6i) = 2+5-4+3i-2i+6i = 3+7i$$

$$2. (5-2i)(2+3i) = [5 \cdot 2 + (-2i)(-3i)] + [5(-3i) + (-2i)(2)] = (10+6i^2) + (-15i-4i) = 10-6-19i = 4-19i$$

$$3. \frac{16+11i}{2+5i} = \frac{(16+11i)(2-5i)}{4-(5i)^2} = \frac{32-80i+22i-55i^2}{4+25} = \frac{87-58i}{29} = 3-2i$$

$$4. \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i\sqrt{3})^2}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{1-3i^2} = \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$5. \frac{1+i\sqrt{5}}{1-i\sqrt{5}} = \frac{(1+i\sqrt{5})^2}{(1-i\sqrt{5})(1+i\sqrt{5})} = \frac{1+2i\sqrt{5}+5i^2}{1-5i^2} = \frac{-4+2i\sqrt{5}}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{i\sqrt{5}}{3}$$

$$6. 3\sqrt{-9} + 2\sqrt{16} - \sqrt{25} + 4\sqrt{-36} = 3\sqrt{9}i + 2\sqrt{16}i - \sqrt{25}i + 4\sqrt{36}i = 9i+8i-5i+24i = 36i$$

$$7. 4\sqrt{-4} - 7\sqrt{-64} + 3\sqrt{-49} - 2\sqrt{-9} = 4\sqrt{4}i - 7\sqrt{64}i + 3\sqrt{49}i - 2\sqrt{9}i = 8i-56i+21i-6i = -33i$$

$$8. (\sqrt{-2}-\sqrt{-3})(3\sqrt{-2}+\sqrt{-3}) = (\sqrt{2}i-\sqrt{3}i)(3\sqrt{2}i+\sqrt{3}i) = (\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})i^2 = -(6+\sqrt{6}-3\sqrt{6}-3) = -(3-2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}-3$$

$$9. (6\sqrt{5}-8\sqrt{-35}):2\sqrt{-5} = \frac{6\sqrt{5}-8\sqrt{35}i}{2\sqrt{5}i} = \frac{(6\sqrt{5}-8\sqrt{35}i)\sqrt{5}i}{2(\sqrt{5})^2i^2} = \frac{2(3\sqrt{5}-4\sqrt{35}i)(\sqrt{5}i)}{10i^2} = \frac{15i+20\sqrt{7}i^2}{-5} = -3i-4\sqrt{7}$$

$$10. i+i^2+i^3+i^4+i^5 = i-1-i+1+i = i$$

$$11. (1-i)+(1-i)^2+(1-i)^3 = 1-i+1-2i+i^2-2i+2 = -1-5i$$

$$12. \text{ Hallar el valor de } x^2-2x+6 \text{ si } x=1+i\sqrt{5};$$

$$(1+i\sqrt{5})^2 - 2(1+i\sqrt{5}) + 6 ; 1+2i\sqrt{5}+5i^2 - 2-2i\sqrt{5}+6 ; 1-5-2+6 ; = 0$$

$$x^2-2x+6 = 0$$



## CAPITULO 15

## INDUCCION MATEMATICA FORMULA DEL BINOMIO

## Ejercicio 140

demostrar los resultados siguientes aplicando el método de inducción completa

1.  $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$

a.- Si  $n = 1$

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4 = 2(1+1)$$

$$4 = 4$$

b.- para  $n = k$

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4k = 2k(k+1) \quad A$$

para  $n = k+1$

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4k + 4(k+1) = 2(k+1)(k+2) \quad B$$

Sumando en A  $4(k+1)$  a los dos miembros se obtiene

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4k + 4(k+1) = 2k(k+1) + 4(k+1)$$

$$= (2k+4)(k+1)$$

$$= 2(k+2)(k+1) \text{ equivale a B}$$

2.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

a.- para  $n = 1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1 = \frac{1}{2}(1)(1+1)$$

$$1 = 1$$

b.- para  $n = k$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1) \quad A$$

para  $n = k+1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \quad B$$

Sumando en A a los dos miembros  $k+1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$$

$$= (\frac{1}{2}k+1)(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}(k+2)(k+1) \text{ equivale a B}$$

3.  $3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$

a.-  $n = 1$

$$3 = 1$$

b.-  $n = k$

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4k-1) = k(2k+1)$$

c.- para  $n = k+1$

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4k-1) + [4(k+1)-1] = (k+1)[2(k+1)+1]$$

$$\underline{3 + 7 + 11 + \dots + (4k-1)} + (4k+3) = (k+1)(2k+3)$$

$$k(2k+1) + (4k+3) = (k+1)(2k+3)$$

$$2k^2 + k + 4k + 3 = (k+1)(2k+3)$$

$$2k^2 + 5k + 3 = (k+1)(2k+3)$$

$$(k+1)(2k+3) = (k+1)(2k+3) \text{ es Correcto}$$

4.  $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

a.  $n=1$

$1=1$

b.  $n=k$

$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

c.  $n=k+1$

$1+3+5+\dots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$

$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

$k^2+2k+1=(k+1)^2$

$(k+1)^2=(k+1)^2$  es correcto

5.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

a.  $n=1$

$2 \neq 2$  No es correcto

6.  $2+2^2+2^3+\dots+2^n=2^{n+1}-2$

a.  $n=1$

$2=2$

b.  $n=k$

$2+2^2+2^3+\dots+2^k=2^{k+1}-2$

c.  $n=k+1$

$2+2^2+2^3+\dots+2^k+2^{k+1}=2^{k+2}-2$

$2^{k+1}-2+2^{k+1}=2^{k+2}-2$

$2 \cdot 2^{k+1}-2=2^{k+2}-2$

$2^{1+k+1}-2=2^{k+2}-2$

$2^{k+2}-2=2^{k+2}-2$  Correcto

7.  $3+2 \cdot 3+2 \cdot 3^2+\dots+2 \cdot 3^n=3^{n+1}$

a.  $n=1$

$6 \neq 9$  No es correcto

8.  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

a.  $n=1$

$1=1$

b.  $n=k$

$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

c.  $n=k+1$

$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$(k+1)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$  Correcto

9.  $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

a.  $n=1$

$1=1$

b.  $n=k$

$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$

c.  $n=k+1$

$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}(k+1)^2[(k+1)+1]^2$

$\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$(k+1)^2\left(\frac{1}{4}k^2+k+1\right)=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$\frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$  Correcto

$$10. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$a. \quad n=1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b. \quad n=k$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$c. \quad n=k+1$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \quad \text{Es correcto}$$

## Ejercicio 141

I Desarrollar y, si es posible, simplificar

$$1. (a+b)^4 = a^4 + \frac{6a^3b}{1} + \frac{6 \cdot 5a^2b^2}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4a^3b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3a^2b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2ab^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + b^4$$

$$= a^4 + 6a^3b + 15a^2b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Regla Práctica. Se multiplica el coeficiente de un término por el exponente de  $a$  en ese término y se divide por su número de orden.

$$2. (a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Ejm: El coeficiente del tercer término, que es 10 multiplicando por 3 (exponente de  $a$ ) y dividido por 3 (orden del término) da:  $10(3)/3 = 10$  que es el coeficiente del 4º término.

$$3. (x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$

$$4. (x-a)^7 = x^7 - 7x^6a + 21x^5a^2 - 35x^4a^3 + 35x^3a^4 - 21x^2a^5 + 7xa^6 - a^7$$

$$5. (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$6. (1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$$

$$7. (a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$8. (2x-y)^4 = 16x^4 - 4a^3x^3y + 6a^2x^2y^2 - 4ax^3y^3 + y^4$$

$$9. (x+ay)^6 = x^6 + 6x^5ay + 15x^4a^2y^2 + 20x^3a^3y^3 + 15x^2a^4y^4 + 6xa^5y^5 + a^6y^6$$

$$10. (2x+y)^5 = 2^5x^5 + 5 \cdot 2^4x^4y + 10 \cdot 2^3x^3y^2 + 10 \cdot 2^2x^2y^3 + 5 \cdot 2xy^4 + y^5$$

$$= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

$$11. (x^2+2)^4 = (x^2)^4 + 4(x^2)^3 \cdot 2 + 6(x^2)^2 \cdot 2^2 + 4(x^2) \cdot 2^3 + 2^4$$

$$= x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16$$

$$12. (a-2b)^6 = a^6 - 6a^5(2b) + 15a^4(2b)^2 - 20a^3(2b)^3 + 15a^2(2b)^4 - 6a(2b)^5 + (2b)^6 \\ = a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192ab^5 + 64b^6$$

$$13. (u-3v)^4 = u^4 - 4u^3(3v) + 6u^2(3v)^2 - 4u(3v)^3 + (3v)^4 \\ = u^4 - 12u^3v + 54u^2v^2 - 108uv^3 + 81v^4$$

$$14. (3a+1/3)^5 = (3a)^5 + 5(3a)^4(1/3) + 10(3a)^3(1/3)^2 + 10(3a)^2(1/3)^3 + 5(3a)(1/3)^4 + (1/3)^5 \\ = 243a^5 + 135a^4 + 30a^3 + 10/3a^2 + 5/27a + 1/243$$

$$15. (5a^2-3b)^3 = (5a^2)^3 - 3(5a^2)^2(3b) + 3(5a^2)(3b)^2 - (3b)^3 \\ = 125a^6 - 225a^4b + 135a^2b^2 - 27b^3$$

$$16. (x^3+0.2y)^4 = (x^3)^4 + 4(x^3)^3(0.2y) + 6(x^3)^2(0.2y)^2 + 4(x^3)(0.2y)^3 + (0.2y)^4 \\ = x^{12} + 0.8x^9y + 0.24x^6y^2 + 0.032x^3y^3 + 0.016y^4$$

$$17. (4x^2-1)^6 = (4x^2)^6 - 6(4x^2)^5 + 15(4x^2)^4 - 20(4x^2)^3 + 15(4x^2)^2 - 6(4x^2) + 1 \\ = 4096x^{12} - 6144x^{10} + 3840x^8 - 1280x^6 + 240x^4 - 24x^2 + 1$$

$$18. (x^2+\sqrt{y})^8 = (x^2)^8 + 8(x^2)^7(y^{1/2}) + 28(x^2)^6(y^{1/2})^2 + 56(x^2)^5(y^{1/2})^3 + 70(x^2)^4(y^{1/2})^4 + \\ + 56(x^2)^3(y^{1/2})^5 + 28(x^2)^2(y^{1/2})^6 + 8(x^2)(y^{1/2})^7 + (y^{1/2})^8 \\ = x^{16} + 8x^{14}y^{1/2} + 28x^{12}y + 56x^{10}y^{3/2} + 70x^8y^2 + 56x^6y^{5/2} + 28x^4y^3 + 8x^2y^{7/2} + y^4$$

$$19. (x^{1/3}-y^{1/3})^6 = (x^{1/3})^6 - 6(x^{1/3})^5(y^{1/3}) + 15(x^{1/3})^4(y^{1/3})^2 - 20(x^{1/3})^3(y^{1/3})^3 + 15(x^{1/3})^2(y^{1/3})^4 - \\ - 6(x^{1/3})(y^{1/3})^5 + (y^{1/3})^6 \\ = x^2 - 6x^{5/3}y^{1/2} + 15x^{4/3}y - 20xy^{2/3} + 15x^{2/3}y^2 - 6x^{1/3}y^{5/2} + y^3$$

$$20. (a^{-1}+b^{-2})^5 = (a^{-1})^5 + 5(a^{-1})^4(b^{-2}) + 10(a^{-1})^3(b^{-2})^2 + 10(a^{-1})^2(b^{-2})^3 + 5(a^{-1})(b^{-2})^4 + (b^{-2})^5 \\ = a^{-5} + 5a^{-4}b^{-2} + 10a^{-3}b^{-4} + 10a^{-2}b^{-6} + 5a^{-1}b^{-8} + b^{-10}$$

$$21. (x^{1/2}+3x^{-1/2})^4 = (x^{1/2})^4 + 4(x^{1/2})^3(3x^{-1/2}) + 6(x^{1/2})^2(3x^{-1/2})^2 + 4(x^{1/2})(3x^{-1/2})^3 + (3x^{-1/2})^4 \\ = x^2 + 12x + 54 + 108x^{-1} + 81x^{-2}$$

$$22. \left(\frac{x}{2a} - \frac{a}{x^2}\right)^6 = \left(\frac{x}{2a}\right)^6 - 6\left(\frac{x}{2a}\right)^5\left(\frac{a}{x^2}\right) + 15\left(\frac{x}{2a}\right)^4\left(\frac{a}{x^2}\right)^2 - 20\left(\frac{x}{2a}\right)^3\left(\frac{a}{x^2}\right)^3 + 15\left(\frac{x}{2a}\right)^2\left(\frac{a}{x^2}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{2a}\right)\left(\frac{a}{x^2}\right)^5 + \left(\frac{a}{x^2}\right)^6 \\ = \frac{x^6}{64a^6} - \frac{3x^3}{16a^4} + \frac{15}{16a^2} - \frac{5}{2x^3} + \frac{15a^2}{4x^4} - \frac{3a^4}{x^5} + \frac{a^6}{x^{12}}$$

$$\begin{aligned}
 13. \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^9 &= \frac{x^9}{y^9} - 8\left(\frac{x}{y}\right)^7\left(\frac{y}{x}\right) + 28\left(\frac{x}{y}\right)^6\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 56\left(\frac{x}{y}\right)^5\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 70\left(\frac{x}{y}\right)^4\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 56\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y}{x}\right)^5 \\
 &\quad + 28\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^6 - 8\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^7 + \left(\frac{y}{x}\right)^9 \\
 &= \frac{x^9}{y^9} - \frac{8x^6}{y^6} + \frac{28x^4}{y^4} - \frac{56x^2}{y^2} + 70 - \frac{56y^2}{x^2} + \frac{28y^4}{x^4} - \frac{8y^6}{x^6} + \frac{y^9}{x^9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. (2x^2 + \frac{1}{2}x)^7 &= (2x^2)^7 + 7(2x^2)^6\left(\frac{1}{2}x\right) + 21(2x^2)^5\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 35(2x^2)^4\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + 35(2x^2)^3\left(\frac{1}{2}x\right)^4 \\
 &\quad + 21(2x^2)^2\left(\frac{1}{2}x\right)^5 + 7(2x^2)\left(\frac{1}{2}x\right)^6 + \left(\frac{1}{2}x\right)^7 \\
 &= 128x^{14} + 224x^{13} + 168x^{12} + 70x^{11} + \frac{35x^{10}}{2} + \frac{21x^9}{8} + \frac{7x^8}{32} + \frac{x^7}{128}
 \end{aligned}$$

II Hallar los cuatro primeros términos de los desarrollos de las siguientes potencias;

$$1. (a+b)^{12} = a^{12} + 12a^{11}b + 66a^{10}b^2 + 220a^9b^3 + \dots$$

$$2. (x-y)^{10} = x^{10} - 10x^9y + 45x^8y^2 - 120x^7y^3 + \dots$$

$$3. (a+x)^{16} = a^{16} + 16a^{15}x + 120a^{14}x^2 + 560a^{13}x^3 + 1820a^{12}x^4 + \dots$$

$$4. (1+x)^{20} = 1 + 20x + 190x^2 + 1140x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 5. (2a-b/2)^{12} &= (2a)^{12} - 12(2a)^{11}(b/2) + 66(2a)^{10}(b/2)^2 - 220(2a)^9(b/2)^3 + \dots \\
 &= 4096a^{12} - 12288a^{11}b + 16896a^{10}b^2 - 14080a^9b^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. (1+x^2y)^{15} &= 1 + 15x^2y + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}(x^2y)^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x^2y)^3 + \dots \\
 &= 1 + 15x^2y + 105x^4y^2 + 455x^6y^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. (a^3+3b^2)^{11} &= (a^3)^{11} + 11(a^3)^{10}(3b^2) + 55(a^3)^9(3b^2)^2 + 165(a^3)^8(3b^2)^3 + \dots \\
 &= a^{33} + 33a^{30}b^2 + 495a^{27}b^4 + 4455a^{24}b^6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. (x^2+2y)^{18} &= (x^2)^{18} + 18(x^2)^{17}(2y) + 153(x^2)^{16}(2y)^2 + 816(x^2)^{15}(2y)^3 + \dots \\
 &= x^{36} + 36x^{34}y + 612x^{32}y^2 + 6528x^{30}y^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. (x^2-y^2)^{20} &= (x^2)^{20} - 20(x^2)^{19}(y^2) + 190(x^2)^{18}(y^2)^2 - 1140(x^2)^{17}(y^2)^3 + \dots \\
 &= x^{40} - 20x^{38}y^2 + 190x^{36}y^4 - 1140x^{34}y^6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. (xy^2+0,2)^{24} &= (xy^2)^{24} + 24(xy^2)^{23}(0,2) + 276(xy^2)^{22}(0,2)^2 + 2024(xy^2)^{21}(0,2)^3 + \dots \\
 &= x^{24}y^{48} + 4,8x^{23}y^{46} + 11,04x^{22}y^{44} + 16,192x^{21}y^{42} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. (1+x^2)^{40} &= 1 + 40x^2 + 40 \cdot 39/1 \cdot 2 (x^2)^2 + 40 \cdot 39 \cdot 38/1 \cdot 2 \cdot 3 (x^2)^3 + \dots \\
 &= 1 + 40x^2 + 780x^4 + 9880x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$12. (1-x^3)^{100} = 1 - 100x^3 + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} (x^3)^2 - \frac{100(99)(98)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x^3)^3 + \dots$$

$$= 1 - 100x^3 + 4950x^6 - 161700x^9 + \dots$$

III Desarrollar las potencias indicadas de los trinomios siguientes.

Comiencese por hacer  $x+y=a$

$$1. (x+y-z)^2 = (a-z)^2 = a^2 - 2az + z^2 = (x+y)^2 - 2(x+y)z + z^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2$$

$$2. (x+y+2z)^3 = (a+2z)^3 = a^3 + 3a^2(2z) + 3a(2z)^2 + (2z)^3 = a^3 + 6a^2z + 12az^2 + 8z^3$$

$$= (x+y)^3 + 6z(x+y)^2 + 12z^2(x+y) + 8z^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 6x^2z + 12xyz + 6y^2z + 12xz^2 + 12yz^2 + 8z^3$$

$$3. (x+y-3u)^3 = (a-3u)^3 = a^3 - 9a^2u + 27au^2 - 27u^3$$

$$= (x+y)^3 - 9u(x+y)^2 + 27u^2(x+y) - 27u^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 9x^2u - 18xyu - 9y^2u + 27xu^2 + 27yu^2 - 27u^3$$

$$4. (x+y+z^2)^4 = (a+z^2)^4 = a^4 + 4a^3z^2 + 6a^2z^4 + 4az^6 + z^8$$

$$= (x+y)^4 + 4z^2(x+y)^3 + 6z^4(x+y)^2 + 4z^6(x+y) + z^8$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 4z^2(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + 6z^4(x^2 + 2xy + y^2) + 4xz^6 + z^8$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 4x^3z^2 + 12x^2yz^2 + 12xy^2z^2 + 4y^3z^2 + 6x^2z^4 + 12xyz^4 + 6y^2z^4 + 4xz^6 + 4yz^6 + z^8$$

IV Usese la Fórmula del binomio para determinar el valor de las potencias siguientes (escribase, por ejemplo,  $99 = 100 - 1$ ).

$$1. 99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

$$2. 98^3 = (100-2)^3 = 100^3 - 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 - (2)^3$$

$$= 1000000 - 60000 + 1200 - 8 = 941192$$

$$3. 101^4 = (100+1)^4 = 100^4 + 4(100)^3(1) + 6(100)^2(1)^2 + 4(100)(1)^3 + (1)^4$$

$$= 100000000 + 4000000 + 60000 + 400 + 1 = 104060400$$

$$4. 102^3 = (100+2)^3 = 100^3 + 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 + (2)^3$$

$$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8 = 1061208$$

$$5. (1.2)^3 = (1+0.2)^3 = 1 + 3(1)^2(0.2) + 3(1)(0.2)^2 + (0.2)^3$$

$$= 1 + 0.6 + 0.12 + 0.008 = 1.728$$

$$6. (1,1)^4 = (1+0,1)^4 = 1 + 4(1)(0,1) + 6(1)(0,1)^2 + 4(1)(0,1)^3 + (0,1)^4 \\ = 1 + 0,4 + 0,06 + 0,004 + 0,0001 = 1,4641$$

$$7. (2,1)^4 = (2+0,1)^4 = 2^4 + 4(2)^3(0,1) + 6(2)^2(0,1)^2 + 4(2)(0,1)^3 + (0,1)^4 \\ = 16 + 3,2 + 0,24 + 0,008 + 0,0001 = 19,4481$$

$$8. (9,7)^3 = (9+0,7)^3 = 9^3 + 3(9)^2(0,7) + 3(9)(0,7)^2 + (0,7)^3 \\ = 729 + 170,1 + 13,23 + 0,343 = 912,673$$

$$9. 12^4 = (10+2)^4 = 10^4 + 4(10)^3(2) + 6(10)^2(2)^2 + 4(10)(2)^3 + (2)^4 \\ = 10000 + 8000 + 2400 + 320 + 16 = 20736$$

V En las siguientes hallar, con error menor que 0,001 el valor de las potencias indicadas usando solamente los términos del desarrollo necesarios para obtener la aproximación pedida:

$$1. (1,02)^{10} = (1+0,02)^{10} = 1^{10} + 10(1)^9(0,02) + 45(1)^8(0,02)^2 + 120(1)^7(0,02)^3 + 210(1)^6(0,02)^4 + \\ 252(1)^5(0,02)^5 + 210(1)^4(0,02)^6 + 120(1)^3(0,02)^7 + 45(1)^2(0,02)^8 + 10(1)(0,02)^9 + (0,02)^{10} \\ = 1 + 0,2 + 0,018 + 0,00096 \approx 1,219 \text{ sólo con las 4 primeros términos.}$$

$$2. (1,02)^{12} = (1+0,02)^{12} = 1^{12} + 12(1)^{11}(0,02) + 66(1)^{10}(0,02)^2 + 220(1)^9(0,02)^3 + \dots \\ = 1 + 0,24 + 0,0264 + 0,00176 \approx 1,268$$

$$3. (1,01)^8 = (1+0,01)^8 = 1^8 + 8(1)^7(0,01) + 28(1)^6(0,01)^2 + 56(1)^5(0,01)^3 + \dots \\ = 1 + 0,08 + 0,0028 + 0,000056 \approx 1,083$$

$$4. (0,99)^{12} = (1-0,01)^{12} = 1^{12} - 12(1)^{11}(0,01) + 66(1)^{10}(0,01)^2 - 220(1)^9(0,01)^3 + \dots \\ = 1 - 0,12 + 0,0066 - 0,00022 + \dots \approx 0,886$$

$$5. (0,98)^{10} = (1-0,02)^{10} = (1)^{10} - 10(1)^9(0,02) + 45(1)^8(0,02)^2 - 120(1)^7(0,02)^3 + \dots \\ = 1 - 0,2 + 0,018 - 0,00096 + \dots \approx 0,817$$

$$6. (1,001)^{20} = (1+0,001)^{20} = 1^{20} + 20(1)^{19}(0,001) + 190(1)^{18}(0,001)^2 + 1140(1)^{17}(0,001)^3 + \dots \\ = 1 + 0,02 + 0,00019 + 0,0000014 + \dots \approx 1,020$$

### Ejercicio 742

Simplificar las expresiones siguientes:

$$1. \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 56$$

$$2. \frac{12!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 1320$$

$$3. \frac{4!6!}{10!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{210}$$

$$4. \frac{5!7!}{6!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 5!$$

$$5. \frac{12!}{8!4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

$$6. \frac{3!5!}{2!4!} = \frac{3 \cdot 2! \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = 15$$

$$7. \frac{4!6!8!}{3!5!7!} = \frac{4 \cdot 3! \cdot 6 \cdot 5! \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 5! \cdot 7!} = 192$$

$$8. \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$9. \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$10. \text{ Demostrar que } 6! - 5! = 5 \cdot 5!$$

$$6! - 5! = 6 \cdot 5! - 5!$$

$$= 5!(6-1)$$

$$= 5! \cdot 5 \Rightarrow 6! - 5! = 5 \cdot 5! \text{ demostrado}$$

### Ejercicio 143

I Hallar el

$$1. 4^{\text{o}} \text{ término de } (x+y)^{10}$$

$$T_r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{(r-1)!} a^{n-(r-1)} b^{r-1}$$

Datos

$$\begin{aligned} n &= 10 & T_4 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^{10-3} y^3 \\ r &= 4 & &= 120 x^7 y^3 \end{aligned}$$

$$2. 6^{\text{o}} \text{ término de } (a+x)^9$$

$$T_6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^{9-5} x^5 = 126 a^4 x^5$$

$$3. 5^{\text{o}} \text{ término de } (x-y)^{12}$$

$$T_5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{12-4} (-y)^4 = 495 x^8 y^4$$

$$4. 7^{\text{o}} \text{ término de } (p+q)^{15}$$

$$T_7 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} p^{15-6} q^6 = 5005 p^9 q^6$$

$$5. 4^{\text{o}} \text{ término de } (x-2y)^{11}$$

$$T_4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^{11-3} (-2y)^3 = -1320 x^8 y^3$$



6. 10º término de  $(2x+y)^{13}$

$$T_{10} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (2x)^{13-9} y^9 = 11440 x^4 y^9$$

7. 16º término de  $(a-x)^{20}$

$$T_{16} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^{20-15} (-x)^{15} = -15504 a^5 x^{15}$$

8. 12º término de  $(3a-b)^{14}$

$$T_{12} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (3a)^{14-11} (-b)^{11} = -9828 a^3 b^{11}$$

9. 8º término de  $(2+x)^{10}$

$$T_8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (2)^{10-7} x^7 = 120(2)^3 x^7 = 960 x^7$$

10. 5º término de  $(x^2-2y^2)^{16}$

$$T_5 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (x^2)^{16-4} (-2y^2)^4 = 29120 x^{24} y^8$$

11. 9º término de  $(x^3+y^2)^{15}$

$$T_9 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (x^3)^{15-8} (y^2)^8 = 6435 x^{21} y^{16}$$

12. 6º término de  $(2x+\frac{1}{2}x)^{12}$

$$T_6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (2x)^{12-5} (\frac{1}{2}x)^5 = 792 (2x)^7 (\frac{1}{2}x)^5 = 3168 x^2$$

13. 7º término de  $(3x^2+\sqrt{y})^8$

$$T_7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (3x^2)^{8-6} (\sqrt{y})^6 = 28(3x^2)^2 y^3 = 252 x^4 y^3$$

14. 5º término de  $(1+x^2)^{50}$

$$T_5 = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (1)^{50-4} (x^2)^4 = 230300 x^8$$

15. 4º término de  $(1-x)^{100}$

$$T_4 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} (1)^{100-3} (-x)^3 = -161700 x^3$$

16. Término que contiene  $x^3$  en  $(1+x)^{20}$

$$r-1=3 \Rightarrow r=4 \quad T_4 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} (1)^{20-3} (x)^3 = 1140 x^3$$

17. Término que contiene  $x^5$  en  $(1-x)^{30}$

$$r-1=5 \Rightarrow r=6 \quad T_6 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (1)^{30-5} (-x)^5 = -142506 x^5$$

18. término que contiene  $x^8$  en  $(2+x)^{10}$

$$r-1=8 \Rightarrow r=9 \quad T_9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (2)^{10-8} (x)^8 = 180 x^8$$

19. término que contiene  $y^7$  en  $(1/3 - 3y)^{12}$

$$r-1=7 \Rightarrow r=8 \quad T_8 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (1/3)^{12-7} (-3y)^7 = -7128 y^7$$

20. término que contiene  $z^{15}$  en  $(1+z^3)^8$

Como  $z^{15} = (z^3)^5$  se tiene  $r-1=5 \Rightarrow r=6$

$$T_6 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (2)^{8-5} (z^3)^5 = 56(2)^3 z^{15} = 448 z^{15}$$

21. término medio del desarrollo de  $(a+2x)^{10}$ . El desarrollo contiene  $n+1$  términos; es decir 11 términos, por tanto el término medio es el que ocupa el 6º lugar.

$$T_6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^{10-5} (2x)^5 = 8064 a^5 x^5$$

22. término medio del desarrollo de  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$ . El término medio es el que ocupa el 5º lugar.

$$T_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (\sqrt{a})^{8-4} (-\sqrt{b})^4 = 70 a^2 b^2$$

23. término independiente de  $x$  en los desarrollos de las potencias siguientes:

a.-  $(x^2 + 1/x)^9$ . Si tomamos el 1º término y el 2º con los exponentes  $n-(r-1)$  y  $r-1$  respectivamente se tiene:

$$(x^2)^{9-(r-1)} (x^{-1})^{r-1} = x^{21-3r}$$

para que este término no contenga  $x$  se necesita que su exponente valga cero (0).  $21-3r=0$ ;  $r=7$

$$T_7 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (x^2)^{9-6} (x^{-1})^6 = 84$$

b.-  $(x - 1/x)^{10}$ . Se tiene:  $(x)^{10-(r-1)} (-x^{-1})^{r-1} = x^{12-2r}$

$$12-2r=0$$
;  $r=6 \quad T_6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (x)^5 (-x^{-1})^5 = -252$

c.-  $(x^4 + 2x^{-2})^6$

$$(x^4)^{6-(r-1)} (2x^{-2})^{r-1} = 2^{r-1} (x)^{30-6r}$$

$$30-6r=0$$
;  $r=5 \quad T_5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (x^4)^{6-4} (2x^{-2})^4 = 15(2)^4 = 240$

d.-  $(2x^{-1} + 3x)^8$

$$(x^{-1})^{8-(r-1)} (3x)^{r-1} = 3^{r-1} x^{2r-10}$$

$$2r-10=0$$
;  $r=5 \quad T_5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (2x^{-1})^{8-4} (3x)^4 = 70(2)^4(3)^4 = 90720$

$$g.- (4x^2 + x^{-5})^7$$

$$(x^2)^{7-(r-1)} (x^{-5})^{r-1} = x^{14-7r}$$

$$14-7r=0; r=3 \quad T_3 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} (4x^2)^{7-2} (x^{-5})^2 = 21(4)^5 = 21504$$

$$p.- (x + x^{-2})^9$$

$$x^{9-(r-1)} (x^{-2})^{r-1} = x^{12-3r}$$

$$12-3r=0; r=4 \quad T_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^{12-3} (x^{-2})^3 = 84$$

$$g.- (2x - x^{-3})^{12}$$

$$x^{12-(r-1)} (x^{-3})^{r-1} = x^{16-4r}$$

$$16-4r=0; r=4 \quad T_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} (2x)^{12-3} (-x^{-3})^3 = -220(2)^9 = -112640$$

$$h.- (x^2 + x^{-4})^{15}$$

$$(x^2)^{15-(r-1)} (x^{-4})^{r-1} = x^{36-6r}$$

$$36-6r=0; r=6 \quad T_6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (x^2)^{15-5} (x^{-4})^5 = 3003$$

II Calcular:

$$1. \binom{5}{3} : \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$2. \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$3. \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

$$4. \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$$

III Compruébese que:

$$1. \binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1 \quad \binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{5!}{5!} = 1 \quad \textcircled{a}$$

$a=b$  Por tanto es correcto

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{5!}{5!} = 1 \quad \textcircled{b}$$

$$2. \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

$$\frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} = \binom{6}{3}$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{3!3!}$$

$$\frac{1 \cdot 5!}{3!2!} = \binom{6}{3}$$

$$20 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$20=20$   
es correcto

3.  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$  Es decir los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ Es correcto}$$

### Ejercicio 744

I Escribir los cuatro primeros términos de los desarrollos de las potencias siguientes

$$1. (1+x)^{1/2} = 1^{1/2} + \frac{1}{2}(1)^{-1/2}(x) + \frac{1}{4}(-\frac{1}{2})(1)^{-3/2}(x)^2 + \frac{(-1/8)(-3/2)}{3}(1)^{-5/2}(x)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$$2. (1+x)^{-1} = 1^{-1} + (-1)(1)^{-2}x + (-\frac{1}{2})(-2)(1)^{-3}x^2 + \frac{1}{3}(-3)x^3 = 1 - x + x^2 - x^3$$

$$3. (1-x)^{3/2} = 1^{3/2} - \frac{3}{2}(1)^{1/2}x + \frac{3}{4}(1)^{-1/2}x^2 - \frac{1}{8}(-\frac{1}{2})x^3 = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$$4. (1-y)^{-1} = 1^{-1} - (-1)(1)^{-2}y + (-\frac{1}{2})(-2)(1)^{-3}y^2 - (\frac{1}{3})(-3)y^3 = 1 + y + y^2 + y^3$$

$$5. (1+x^2)^{-2} = 1^{-2} + (-2)(1)^{-3}x^2 + (-1)(-3)(1)^{-4}(x^2)^2 + \frac{1}{2}(-4)(1)^{-5}(x^2)^3$$

$$= 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6$$

$$6. (4+x^2)^{-1/2} = 4^{-1/2} + (-\frac{1}{2})(4)^{-3/2}x^2 + (-\frac{1}{4})(-\frac{3}{2})(4)^{-5/2}(x^2)^2 + \frac{1}{8}(-\frac{5}{2})(4)^{-7/2}(x^2)^3$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{3x^4}{256} - \frac{5x^6}{2048}$$

$$7. (1+z)^{1/3} = 1^{1/3} + \frac{1}{3}(1)^{-2/3}z + \frac{1}{6}(-\frac{2}{3})(1)^{-5/3}z^2 + (-\frac{1}{2})(-\frac{5}{3})(1)^{-8/3}z^3$$

$$= 1 + \frac{2}{3}z - \frac{z^2}{9} + \frac{5z^3}{81}$$

$$8. (1-x)^{-3} = 1^{-3} - (-3)(1)^{-4}x + (-\frac{3}{2})(-4)(1)^{-5}x^2 - 2(-5)(1)^{-6}x^3$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3$$

$$9. (1+2x)^{-3/2} = 1^{-3/2} + (-\frac{3}{2})(1)^{-5/2}2x + (-\frac{3}{4})(-\frac{5}{2})(1)^{-7/2}(2x)^2 + \frac{5}{8}(-\frac{7}{2})(1)^{-9/2}(2x)^3$$

$$= 1 - 3x + \frac{15}{2}x^2 - \frac{35}{2}x^3$$

$$10. (x+y)^{-2} = x^{-2} + (-2)x^{-3}y + (-1)(-3)x^{-4}y^2 + (1)(-4)x^{-5}y^3$$

$$= x^{-2} - 2x^{-3}y + 3x^{-4}y^2 - 4x^{-5}y^3$$

$$11. (x+y)^{-3} = x^{-3} + (-3)x^{-4}y + (-\frac{3}{2})(-4)x^{-5}y^2 + 2(-5)x^{-6}y^3$$

$$= x^{-3} - 3x^{-4}y + 6x^{-5}y^2 - 10x^{-6}y^3$$

$$\text{Como } |x| < |y| \quad = y^{-3} - 3xy^{-4} + 6x^2y^{-5} - 10x^3y^{-6}$$

$$12. (a-b)^{-1}, |a| < |b| = a^{-1} - (-1)(a)^{-2}b + (-\frac{1}{2})(-2)(a)^{-3}b^2 - (\frac{1}{3})(-3)(a)^{-4}b^3$$

$$= a^{-1} + a^{-2}b + a^{-3}b^2 + a^{-4}b^3$$

$$\text{Como } |a| < |b| \text{ a se reemplaza por } (-b)^{-1} = -b^{-1} - ab^{-2} - a^2b^{-3} - a^3b^{-4}$$

$$13. (1 + 1/2 X)^{-1/2} = 1^{-1/2} + (-1/2)(1)^{-3/2}(1/2 X) + (-1/4)(-3/8)(1)^{-5/2}(1/2 X)^2 + 1/8(-5/2)(1)^{-7/2}(1/2 X)^3$$

$$= 1 - X/4 + 3X^2/32 - 5X^3/128$$

$$14. (8 + X)^{2/3} = 8^{2/3} + 2/3(8)^{-1/3}X + 1/3(-1/3)(8)^{-4/3}X^2 + (-1/2)(-4/3)(8)^{-5/3}X^3$$

$$= 4 + 1/3X - 1/144X^2 + 1/2592X^3$$

$$15. (1 + aX)^{-4} = 1^{-4} + (-4)(1)^{-5}(aX) + (-2)(-5)(1)^{-6}(aX)^2 + (10/3)(-6)(1)^{-7}(aX)^3$$

$$= 1 - 4aX + 10a^2X^2 - 20a^3X^3$$

$$16. (1 - bX)^{-5/2} = 1^{-5/2} + (-5/2)1^{-7/2}(bX) + (-5/4)(-7/2)1^{-9/2}(bX)^2 + (35/24)(-9/2)1^{-11/2}(bX)^3$$

$$= 1 + 5/2bX + 35/8b^2X^2 + 105/16b^3X^3$$

II Usar los cuatro primeros términos de los desarrollos correspondientes para dar valores aproximados de las siguientes expresiones para los valores de  $x$  que se indican:

1.  $\sqrt{1+X}$  para  $X = 0,02$

$$(1+X)^{1/2} = 1 + 1/2X - 1/8X^2 + 1/16X^3 = 1 + 1/2(0,02) - 1/8(0,02)^2 + 1/16(0,02)^3$$

$$= 1 + 0,01 - 0,00005 + 0,0000005 = 1,00995$$

2.  $\frac{1}{\sqrt{1+X}}$  para  $X = 0,04$

$$(1+X)^{-1/2} = 1 - 1/2X + 3/8X^2 - 5/16X^3 = 1 - 1/2(0,04) + 3/8(0,04)^2 - 5/16(0,04)^3$$

$$= 1 - 0,02 + 0,000006 - 0,00002 = 0,98050$$

3.  $\sqrt[3]{1+X^2}$  para  $X = 0,1$

$$(1+X^2)^{1/3} = 1 + 1/3X^2 - 1/9X^4 + 5/81X^6 = 1 + 1/3(0,1)^2 - 1/9(0,1)^4 + 5/81(0,1)^6$$

$$= 1 + 0,00333 - 0,000011 + 6,17 \cdot 10^{-8} = 1,00332$$

4.  $\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$  para  $X = 0,03$

$$(1-X^2)^{-1/2} = 1 + 3/2X^2 + 15/8X^4 + 35/16X^6 = 1 + 3/2(0,03)^2 + 15/8(0,03)^4 + 35/16(0,03)^6$$

$$= 1 + 0,00135 + 0,000001518 + 0,0000000159 = 1,00135$$

III Utilizando los desarrollos apropiados calcular, con 3 cifras decimales exactas, valores aproximados de las expresiones siguientes:

1.  $\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = \sqrt{36(1+1/36)} = 6(1+1/36)^{1/2}$

$$= 6 \left[ 1^{1/2} + 1/2(1)^{-1/2}(1/36) + 1/4(-1/2)(1)^{-3/2}(1/36)^2 + (-1/24)(-3/2)(1)^{-5/2}(1/36)^3 \right]$$

$$= 6 \left( 1 + \frac{1}{72} - \frac{1}{10368} + \frac{1}{746496} \right) = 6 \left( 1 + 0,0138 - 0,000096 + 0,0000013 \right)$$

$$= 6,083$$

$$\begin{aligned}
 2. \sqrt{105} &= \sqrt{100+5} = \sqrt{100(1+5/100)} = 10(1+5/100)^{1/2} \\
 &= 10 \left[ 1^{1/2} + \frac{1}{2}(1)^{-1/2} (5/100) + \frac{1}{4}(-1/2)(1)^{-3/2} (5/100)^2 + (-1/24)(-3/2)(1)^{-5/2} (5/100)^3 \right] \\
 &= 10(1 + 1/40 - 1/3200 + 1/128000) = 10(1 + 0.025 - 0.00031 + 0.0000078) \\
 &= 10.247
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \sqrt[3]{65} &= \sqrt[3]{64+1} = \sqrt[3]{64(1+1/64)} = 4(1+1/64)^{1/3} \\
 &= 4 \left[ 1^{1/3} + \frac{1}{3}(1)^{-2/3} (1/64) + \frac{1}{6}(-2/3)(1)^{-5/3} (1/64)^2 + (-1/27)(-5/3)(1)^{-8/3} (1/64)^3 \right] \\
 &= 4(1 + 1/192 - 1/36864 + 5/21233664) \\
 &= 4.021
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \sqrt[4]{20} &= \sqrt[4]{16+4} = \sqrt[4]{16(1+4/16)} = 2\sqrt[4]{1+1/4} = 2(1+1/4)^{1/4} \\
 &= 2 \left[ 1^{1/4} + \frac{1}{4}(1)^{-3/4} (1/4) + \frac{1}{8}(-3/4)(1)^{-7/4} (1/4)^2 + (-1/32)(1)^{-11/4} (1/4)^3 \right] \\
 &= 2(1 + 1/16 - 3/512 - 1/2048) = 2(1 + 0.0625 - 0.0058 - 0.00048) \\
 &= 2.1125
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. (1.03)^{5/2} &= (1+0.03)^{5/2} \\
 &= 1^{5/2} + \frac{5}{2}(1)^{3/2} (0.03) + \frac{5}{4}(3/2)(1)^{1/2} (0.03)^2 + \frac{5}{8}(1/2)(1)^{-1/2} (0.03)^3 \\
 &= 1 + 0.075 + 0.00168 + 0.0000084 = 1.077
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. (1.02)^{-6} &= (1+0.02)^{-6} \\
 &= 1^{-6} + (-6)(1)^{-7} (0.02) + (-3)(-7)(1)^{-8} (0.02)^2 + 7(-8)(1)^{-9} (0.02)^3 \\
 &= 1 - 0.12 + 0.0084 - 0.000448 = 0.888
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \sqrt[5]{1.2} &= (1+0.2)^{1/5} \\
 &= 1^{1/5} + \frac{1}{5}(1)^{-4/5} (0.2) + \frac{1}{10}(-4/5)(1)^{-9/5} (0.2)^2 + (-1/75)(-9/5)(1)^{-14/5} (0.2)^3 \\
 &= 1 + 0.04 - 0.0032 + 0.000192 = 1.037
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \frac{1}{\sqrt{104}} &= \frac{1}{\sqrt{100(1+4/100)}} = \frac{1}{10(1+1/25)} = \frac{1}{10} \left( 1 + \frac{1}{25} \right)^{-1/2} \\
 &= \frac{1}{10} \left[ 1^{-1/2} + (-1/2)(1)^{-3/2} (1/25) + (-1/4)(-3/2)(1)^{-5/2} (1/25)^2 + (1/8)(-5/2)(1)^{-7/2} (1/25)^3 \right] \\
 &= \frac{1}{10}(1 - 1/50 + 3/5000 - 1/50000) = \frac{1}{10}(1 - 0.02 + 0.0006 - 0.00002) = 0.098
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. (0.98)^{3/2} &= (1-0.02)^{3/2} \\
 &= 1^{3/2} - \frac{3}{2}(1)^{1/2} (0.02) + \frac{3}{4}(1/2)(1)^{-1/2} (0.02)^2 - (1/8)(-1/2)(1)^{-3/2} (0.02)^3 \\
 &= 1 - 0.03 + 0.00015 + 0.0000005 \\
 &= 0.970
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \sqrt[5]{34} &= \sqrt[5]{32+2} = \sqrt[5]{32(1+2/32)} = 2(1+1/16)^{1/5} \\
 &= 2 \left[ 1^{1/5} + \frac{1}{5}(1)^{-4/5} (1/16) + \frac{1}{10}(-4/5)(1)^{-9/5} (1/16)^2 + (-2/75)(1)^{-14/5} (1/16)^3 \right] \\
 &= 2(1 + 1/80 - 1/3200 - 1/153600) = 2(1 + 0.0125 - 0.0003125 - 0.0000065) \\
 &= 2.024
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. (1.06)^{-10} &= (1+0.06)^{-10} \\
 &= 1^{-10} + (-10)(1)^{-11} (0.06) + (-5)(-11)(1)^{-12} (0.06)^2 + 55/3(-12)(1)^{-13} (0.06)^3 \\
 &= 1 - 0.6 + 0.198 - 0.04752 = 0.5505
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. (1,01)^{-3/2} &= (1+0,01)^{-3/2} \\
 &= 1^{-3/2} + (-3/2) 1^{-5/2} (0,01) + (-3/4)(-5/2) 1^{-7/2} (0,01)^2 + 5/8(-7/2) 1^{-9/2} (0,01)^3 \\
 &= 1 - 0,015 + 0,0001875 - 0,0000022 = 0,985
 \end{aligned}$$

### Ejercicio 145 (Repaso)

I Demostrar las siguientes igualdades aplicando el método de inducción completa.

1.  $3+6+9+\dots+3n = 3/2 n(n+1)$

a.-  $n=1$

$3=3$

b.-  $n=k$

$3+6+9+\dots+3k = 3/2 k(k+1)$

c.-  $n=k+1$

$3+6+9+\dots+3k+3(k+1) = 3/2 (k+1)(k+2)$

$3/2 k(k+1) + 3(k+1) = 3/2 (k+1)(k+2)$

$3(k+1)(k/2+1) = 3/2 (k+1)(k+2)$

$3/2 (k+1)(k+2) = 3/2 (k+1)(k+2)$  Es correcto

2.  $5+11+17+\dots+(6n-1) = n(3n+2)$

a.-  $n=1$

$5=5$

b.-  $n=k$

$5+11+17+\dots+(6k-1) = k(3k+2)$

c.-  $n=k+1$

$5+11+17+\dots+(6k-1)+[6(k+1)-1] = (k+1)[3(k+1)+2]$

$k(3k+2) + (6k+5) = (k+1)(3k+5)$

$3k^2 + 2k + 6k + 5 = (k+1)(3k+5)$

$3k^2 + 8k + 5 = (k+1)(3k+5)$

$(k+1)(3k+5) = (k+1)(3k+5)$  Es correcto

3.  $5+4\cdot 5+4\cdot 5^2+\dots+4\cdot 5^n = 5^{n+1}$

a.-  $n=1$

$20 \neq 25$  No es correcto

4.  $9+45+189+\dots+(2n+1)3^n = n\cdot 3^{n+1}$

a.-  $n=1$

$9=9$

b.-  $n=k$

$9+45+189+\dots+(2k+1)3^k = k\cdot 3^{k+1}$

c.-  $n=k+1$

$9+45+189+\dots+(2k+1)3^k + [2(k+1)+1]3^{k+1} = (k+1)3^{k+2}$

$k\cdot 3^{k+1} + (2k+3)3^{k+1} = (k+1)3^{k+2}$

$3^{k+1}(k+2k+3) = (k+1)3^{k+2}$

$3^{k+1}(3k+3) = (k+1)3^{k+2}$

$3\cdot 3^{k+1}(k+1) = (k+1)3^{k+2}$

$(k+1)3^{k+2} = (k+1)3^{k+2}$  Es correcto

5.  $1+1/2+1/4+\dots+1/2^{n-1} = 2-1/2^{n-1}$

a.-  $n=1$

$1=1$

b.-  $n=k$

$1+1/2+1/4+\dots+1/2^{k-1} = 2-1/2^{k-1}$

c.-  $n=k+1$

$1+1/2+1/4+\dots+1/2^{k-1} + 1/2^{(k+1)-1} = 2-1/2^{(k+1)-1}$

$2-1/2^{k-1} + 1/2^k = 2-1/2^k$

$2-(2-1/2^k) = 2-1/2^k$

$2-1/2^k = 2-1/2^k$  Es Correcto

II Obtener el desarrollo de cada una de las potencias siguientes. Dar los resultados reducidos a su más simple expresión.

1.  $(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$   
 $= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
2.  $(a-2b)^4 = a^4 - 4a^3(2b) + 6a^2(2b)^2 - 4a(2b)^3 + (2b)^4$   
 $= a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$
3.  $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$
4.  $(1-x)^8 = 1^8 - 8(1)^7x + 28(1)^6x^2 - 56(1)^5x^3 + 70(1)^4x^4 - 56(1)^3x^5 + 28(1)^2x^6 - 8(1)x^7 + x^8$   
 $= 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$
5.  $(x+3)^6 = x^6 + 6x^5(3) + 15x^4(3)^2 + 20x^3(3)^3 + 15x^2(3)^4 + 6x(3)^5 + (3)^6$   
 $= x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1215x^2 + 1458x + 729$
6.  $(x^2+1)^7 = (x^2)^7 + 7(x^2)^6 + 21(x^2)^5 + 35(x^2)^4 + 35(x^2)^3 + 21(x^2)^2 + 7(x^2) + 1$   
 $= x^{14} + 7x^{12} + 21x^{10} + 35x^8 + 35x^6 + 21x^4 + 7x^2 + 1$
7.  $(x^2+2x)^5 = (x^2)^5 + 5(x^2)^4(2x) + 10(x^2)^3(2x)^2 + 10(x^2)^2(2x)^3 + 5(x^2)(2x)^4 + (2x)^5$   
 $= x^{10} + 10x^9 + 40x^8 + 80x^7 + 80x^6 + 32x^5$
8.  $(x-\sqrt{x})^4 = x^4 - 4x^3\sqrt{x} + 6x^2(\sqrt{x})^2 - 4x(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x})^4$   
 $= x^4 - 4x^{7/2} + 6x^3 - 4x^{5/2} + x^2$
9.  $(x+x^{-1})^6 = x^6 + 6x^5x^{-1} + 15x^4x^{-2} + 20x^3x^{-3} + 15x^2x^{-4} + 6xx^{-5} + x^{-6}$   
 $= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6}$
10.  $(x^{1/2}+x^{-1/2})^{10} = (x^{1/2})^{10} + 10(x^{1/2})^9(x^{-1/2}) + 45(x^{1/2})^8(x^{-1/2})^2 + 120(x^{1/2})^7(x^{-1/2})^3 + 210(x^{1/2})^6(x^{-1/2})^4 + 252(x^{1/2})^5(x^{-1/2})^5 + 210(x^{1/2})^4(x^{-1/2})^6 + 120(x^{1/2})^3(x^{-1/2})^7 + 45(x^{1/2})^2(x^{-1/2})^8 + 10(x^{1/2})(x^{-1/2})^9 + (x^{-1/2})^{10}$   
 $= x^5 + 10x^4 + 45x^3 + 120x^2 + 210x + 252 + 210x^{-1} + 120x^{-2} + 45x^{-3} + 10x^{-4} + x^{-5}$
11.  $(a+bi)^5 = a^5 + 5a^4bi + 10a^3(bi)^2 + 10a^2(bi)^3 + 5a(bi)^4 + (bi)^5$   
 $= a^5 + 5a^4bi + 10a^3b^2i^2 + 10a^2b^3i^3 + 5ab^4i^4 + b^5i^5 \quad i^2 = -1$   
 $= a^5 + 5a^4bi - 10a^3b^2 - 10a^2b^3i + 5ab^4 + b^5i$   
 $= (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i$
12.  $(2-i)^4 = 2^4 - 4(2)^3i + 6(2)^2i^2 - 4(2)i^3 + i^4 = 16 - 32i - 24 + 8i + 1$   
 $= -7 - 24i$
13.  $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 = (\sqrt{2})^4 + 4(\sqrt{2})^3(\sqrt{3}) + 6(\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^2 + 4(\sqrt{2})(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^4$   
 $= 4 + 8\sqrt{6} + 36 + 12\sqrt{6} + 9 = 49 + 20\sqrt{6}$
14.  $(a^x+a^{-x})^6 = (a^x)^6 + 6(a^x)^5(a^{-x}) + 15(a^x)^4(a^{-x})^2 + 20(a^x)^3(a^{-x})^3 + 15(a^x)^2(a^{-x})^4 + 6(a^x)(a^{-x})^5 + (a^{-x})^6$   
 $= a^{6x} + 6a^{4x} + 15a^{2x} + 20 + 15a^{-2x} + 6a^{-4x} + a^{-6x}$

III Escribir los tres primeros términos de los desarrollos de las potencias siguientes:





# **VI** Simplificar las expresiones siguientes:

$$1. \frac{12!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1320$$

$$2. \frac{15!}{5!10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10!} = 3003$$

$$3. \frac{50!}{48!2!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48!}{48! \cdot 2 \cdot 1} = 1225$$

$$4. \frac{(n+1)!}{n+1} = \frac{(n+1) \cdot (n+1-1)!}{(n+1)} = n!$$

$$5. \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$6. \frac{(2n)!}{n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots (n+1)(2n-n)!}{n!} = 2n(2n-1)(2n-2) \dots (n+1)$$

# **VII** Probar que:

$$\begin{aligned} 1. \quad n! - 1(n+1)! &= (n+2) \cdot n! \\ n! + (n+1)(n+1-1)! &= (n+2) \cdot n! \\ n! + (n+1)n! &= (n+2) \cdot n! \\ n!(1+n+1) &= (n+2)n! \\ (n+2)n! &= (n+2)n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 &= 2^5 \cdot 5! \\ 2^5(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) &= 2^5 \cdot 5! \\ 2^5 \cdot 5! &= 2^5 \cdot 5! \end{aligned}$$

# **VIII** Hallar el:

$$\begin{aligned} 1. \quad 5^{\text{to}} \text{ término de } (a+x)^9 \\ T_5 &= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{19-(5-1)} x^{5-1} \\ T_5 &= 3876 a^{15} x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 4^{\text{to}} \text{ término de } (x-2y)^{16} \\ T_4 &= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^{16-(4-1)} (-2y)^{4-1} \\ T_4 &= -4480 x^{13} y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 9^{\text{to}} \text{ término de } (2x+y)^{11} \\ T_9 &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} (2x)^{11-8} (y^8) \\ T_9 &= 1320 x^3 y^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad 10^{\text{to}} \text{ término de } (x^2+x)^{12} \\ T_{10} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} (x^2)^{12-9} x^9 \\ T_{10} &= 220 x^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad 7^{\text{to}} \text{ término de } (x^2-1)^8 \\ T_7 &= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (x^2)^{8-6} (-1)^6 \\ T_7 &= 18564 x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad 6^{\text{to}} \text{ término de } (ab+2)^9 \\ T_6 &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (ab)^{9-5} (2)^5 \\ T_6 &= 4032 a^4 b^4 \end{aligned}$$

7. 12º término de  $(x-1)^{13}$ 

$$T_{12} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} (x)^{13-12} (-1)^1$$

$$T_{12} = -78x^1$$

8. 9º término de  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{14}$ 

$$T_9 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} (\sqrt{x})^{14-9} (\sqrt{y})^9$$

$$T_9 = 3003 x^5 y^4$$

9. término medio de  $(3x-y)^{10}$ El desarrollo tiene  $n+1$  términos  $\Rightarrow$  el término medio es el 6º

$$T_6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (3x)^{10-5} (-y)^5 ; T_6 = -61236 x^5 y^5$$

10. término medio de  $(x/y + y/x)^{18}$ 

$$T_{10} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \left(\frac{x}{y}\right)^{18-9} \left(\frac{y}{x}\right)^9 ; T_{10} = 48620$$

11. término que contiene  $x^4$  en  $(1-x)^{20}$ 

$$r-1=4 ; r=5 \quad T_5 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (1)^{20-4} (-x)^4 ; T_5 = 4845 x^4$$

12. término que contiene  $x^6$  en  $(2+x)^{16}$ 

$$r-1=6 ; r=7 \quad T_7 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (2)^{16-6} x^6 ; T_7 = 8200192 x^6$$

13. término que contiene  $x^5$  en  $(1+x)^{25}$ 

$$r-1=5 ; r=6 \quad T_6 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (1)^{25-5} (x)^5 ; T_6 = 53130 x^5$$

14. término que contiene  $y^{10}$  en  $(2-y)^{13}$ 

$$r-1=10 ; r=11 \quad T_{11} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} (2)^{13-10} (-y)^{10} ; T_{11} = 2288 y^{10}$$

15. término que contiene  $y^8$  en  $(1+y^2)^{10}$  Si:  $y^8 = (y^2)^4$ 

$$r-1=4 ; r=5 \quad T_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (1)^{10-4} (y^2)^4 ; T_5 = 210 y^8$$

16. término que no contiene  $y$  en  $(y^3+y^{-2})^{10}$  Si:  $(y^3)^{10-(r-1)} (y^{-2})^{r-1} = y^{35-5r}$ 

$$35-5r=0 ; r=7 \quad T_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (y^3)^{10-6} (y^{-2})^6 ; T_7 = 210$$

17. término que no contiene  $x$  en  $(x^2+1/x)^{12}$  Si:  $(x^2)^{12-(r-1)} (1/x)^{r-1} = x^{27-3r}$ 

$$27-3r=0 ; r=9 \quad T_9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} (x^2)^{12-8} (1/x)^8 ; T_9 = 495$$

18. término que no contiene  $x$  en  $(x^3+x^{-1})^8$   $(x^3)^{8-(r-1)} (x^{-1})^{r-1} = x^{28-4r}$ 

$$28-4r=0 ; r=7 \quad T_7 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (x^3)^{8-6} (x^{-1})^6 ; T_7 = 28$$

19. término que no contiene  $y$  en  $(y^{-2} + 2y)^{15}$  Si:  $(y^{-2})^{15-(r-1)}(2y)^{r-1} = y^{-33+3r}$   
 $-33+3r=0$ ;  $r=11$   $Tr = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} (y^{-2})^{15-10} (2y)^{10}$ ;  $Tr = 3075072$

20. término que no contiene  $t$  en  $(t^3 + t^{-3})^{18}$  Si:  $(t^3)^{18-(r-1)}(t^{-3})^{r-1} = t^{60-6r}$   
 $60-6r=0$ ;  $r=10$   $Tr = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} (t^3)^{18-9} (t^{-3})^9$ ;  $Tr = 48620$

**IX** Escribir los cinco primeros términos de los desarrollos de las potencias siguientes.  
 En los problemas 3° y 4° se supone  $|x| < |a|$

1.  $(1+x)^{-1} = 1^1 + (-1)(1)^0 x + (-1)(-1)(1)^{-1} x^2 / 1 \cdot 2 + (-1)(-1)(-1)(1)^{-2} x^3 / 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-1)(-1)(-1)(-1)(1)^{-3} x^4 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$   
 $= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$

2.  $(1+x^2)^{1/2} = 1^{1/2} + \frac{1}{2}(1)^{-1/2} x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(1)^{-3/2} (x^2)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1)^{-5/2} (x^2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1)^{-7/2} (x^2)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$   
 $= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8$

3.  $(a^2 - x^2)^{1/2}$  como  $|x| < |a| = [a^2(1 - x^2/a^2)]^{1/2} = a(1 - x^2/a^2)^{1/2}$   
 $= a[1^{1/2} - \frac{1}{2}(1)^{-1/2} (x^2/a^2) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(1)^{-3/2} (x^2/a^2)^2}{1 \cdot 2} - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1)^{-5/2} (x^2/a^2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + (-\frac{15}{384})(1)^{-7/2} (x^2/a^2)^4]$   
 $= a(1 - \frac{1}{2}a^{-2}x^2 - \frac{1}{8}a^{-4}x^4 - \frac{1}{16}a^{-5}x^6 - \frac{5}{128}a^{-7}x^8)$   
 $= a - \frac{1}{2}a^{-1}x^2 - \frac{1}{8}a^{-3}x^4 - \frac{1}{16}a^{-5}x^6 - \frac{5}{128}a^{-7}x^8$

4.  $(a^2 + x^2)^{-1/2} = a^{-1}(1 + x^2/a^2)^{-1/2}$   
 $= a^{-1}[1^{1/2} + (-\frac{1}{2})(1)^{-3/2} (x^2/a^2) + \frac{3}{8}(1)^{-5/2} (x^2/a^2)^2 - \frac{5}{16}(1)^{-7/2} (x^2/a^2)^3 + \frac{35}{128}(1)^{-9/2} (x^2/a^2)^4]$   
 $= a^{-1}(1 - \frac{1}{2}a^{-2}x^2 + \frac{3}{8}a^{-4}x^4 - \frac{5}{16}a^{-6}x^6 + \frac{35}{128}a^{-8}x^8)$   
 $= a^{-1} - \frac{1}{2}a^{-3}x^2 + \frac{3}{8}a^{-5}x^4 - \frac{5}{16}a^{-7}x^6 + \frac{35}{128}a^{-9}x^8$

5.  $(4+y)^{3/2} = 4^{3/2} + \frac{3}{2}(4)^{1/2}y + \frac{3}{8}(4)^{-1/2}y^2 + (-\frac{3}{24})(4)^{-3/2}y^3 + \frac{9}{64}(4)^{-5/2}y^4$   
 $= 8 + 3y + \frac{3}{16}y^2 - \frac{1}{128}y^3 + \frac{3}{4096}y^4$

6.  $(1-xy)^{-4} = 1^{-4} + (-4)(1)^{-5}(xy) + \frac{10}{2}(1)^{-6}(xy)^2 + \frac{(-20)}{6}(1)^{-7}(xy)^3 + \frac{35}{24}(1)^{-8}(xy)^4$   
 $= 1 + 4xy + 10x^2y^2 + 20x^3y^3 + 35x^4y^4$

**X** Calcular con tres cifras decimales exactas, utilizando desarrollos apropiados:

1.  $\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = (25+1)^{1/2} = [25(1+1/25)]^{1/2} = 5(1+1/25)^{1/2}$   
 $= 5[1^{1/2} + \frac{1}{2}(1)^{-1/2}(1/25) - \frac{1}{8}(1)^{-3/2}(1/25)^2 + \frac{3}{48}(1)^{-5/2}(1/25)^3 + \dots]$   
 $= 5(1 + 1/50 - 1/5000 + 1/250000 + \dots) = 5(1 + 0,02 - 0,0002 + 0,000004) \approx 5,099$

2.  $\sqrt{39} = (36+3)^{1/2} = 6(1+3/36)^{1/2} = 6(1+1/12)^{1/2}$   
 $= 6[1^{1/2} + \frac{1}{2}(1)^{-1/2}(1/12) - \frac{1}{8}(1)^{-3/2}(1/12)^2 + \frac{3}{48}(1)^{-5/2}(1/12)^3 - \frac{15}{384}(1)^{-7/2}(1/12)^4 + \dots]$   
 $= 6(1 + 1/24 - 1/1152 + 1/27648 - 5/2654208 + \dots) \approx 6,246$

3.  $\sqrt[3]{127} = (125 + 2)^{1/3} = 5(1 + 2/125)^{1/3}$   
 $= 5 \left( 1^{1/3} + \frac{1}{3}(1)^{-2/3}(2/125) + (-\frac{1}{9})(1)^{-5/3}(2/125)^2 + \dots \right)$   
 $= 5(1,00503633 + \dots) \approx 5,027$
4.  $\sqrt[5]{1,3} = (1 + 0,3)^{1/5}$   
 $= 1^{1/5} + \frac{1}{5}(1)^{-4/5}(0,3) + (-\frac{2}{25})(1)^{-9/5}(0,3)^2 + \frac{12}{125}(1)^{-14/5}(0,3)^3 + \dots$   
 $= 1 + 0,06 - 0,0072 + 0,001296 + \dots \approx 1,054$
5.  $(1,02)^{-5} = (1 + 0,02)^{-5}$   
 $= 1^{-5} + (-5)1^{-6}(0,02) + 15(1)^{-7}(0,02)^2 + (-70)1^{-8}(0,02)^3 + \dots$   
 $= 1 - 0,1 + 0,006 - 0,00028 + \dots \approx 0,906$
6.  $(1,03)^{-3/2} = (1 + 0,03)^{-3/2}$   
 $= 1^{-3/2} + (-3/2)(1)^{-5/2}(0,03) + (15/8)(1)^{-7/2}(0,03)^2 + (-105/24)(1)^{-9/2}(0,03)^3 + \dots$   
 $\approx 0,957$

## CAPITULO 17

## PROGRESIONES

## Ejercicio 162

1. Escribir los primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales se dan a continuación. En estas fórmulas  $n$  representan un número natural cualquiera ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

a.-  $u_n = 2n+1$ :  $u_1=1$  si se empieza de 1; Si  $n=1, u_1=3$ ;  $n=2, u_2=5$ ;  $n=3, u_3=7$ .

$$u_n = 1, 3, 5, \dots$$

b.-  $u_n = 4n-1$ :  $n=1, u=3$ ;  $n=2, u=7$ ;  $n=3, u=11$

$$u_n = 3, 7, 11, 15, \dots$$

c.-  $u_n = 2^n$ :  $n=1, u=2$ ;  $n=2, u=4$ ;  $n=3, u=8$ ;  $n=4, u=16$

$$u_n = 2, 4, 8, 16, \dots$$

d.-  $u_n = (-1)^n(3n+1)$ :  $n=1, u=-4$ ;  $n=2, u=7$ ;  $n=3, u=-10$ ;  $n=4, u=13$

$$u_n = -4, 7, -10, 13, \dots$$

e.-  $u_n = n^2$ :  $n=1, u=1$ ;  $n=2, u=4$ ;  $n=3, u=9$

$$u_n = 1, 4, 9, 16, \dots$$

f.-  $u_n = 4 + (n-1) \cdot 2$ :  $n=1, u=4$ ;  $n=2, u=6$ ;  $n=3, u=8$

$$u_n = 4, 6, 8, 10, \dots$$

g.-  $u_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ :  $n=1, u=2$ ;  $n=2, u=6$ ;  $n=3, u=18$ ;  $n=4, u=54$

$$u_n = 2, 6, 18, 54, \dots$$

h.-  $u_n = n^3$ :  $n=1, u=1$ ;  $n=2, u=8$ ;  $n=3, u=27$ ;  $n=4, u=64$

$$u_n = 1, 8, 27, 64, \dots$$

i.-  $u_n = 1/2n+1$ :  $n=1, u=1/3$ ;  $n=2, u=1/5$ ;  $n=3, u=1/7$

$$u_n = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$$

j.-  $u_n = 1/n(n-1)$ :  $n=1, u=1/2$ ;  $n=2, u=1/6$ ;  $n=3, u=1/12$

$$u_n = 1/2, 1/6, 1/12, \dots$$

k.-  $u_n = 1/n!$ :  $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots$

$$n=1: 1! = 1 \quad u=1; \quad n=2: 2! = 2, \quad u=1/2; \quad n=3: 3! = 6, \quad u=1/6$$

$$u_n = 1, 1/2, 1/6, 1/24, \dots$$

l.-  $u_n = x^n/2n-1$ :  $n=1, u=x/1$ ;  $n=2, u=x^2/3$ ;  $n=3, u=x^3/5$

$$u_n = x/1, x^2/3, x^3/5, \dots$$

2. Los dos primeros términos de la sucesión son 0 y 2; cada término a partir del tercero es la suma de los dos precedentes. Escribir los seis primeros términos de la sucesión:

$$\text{Sucesión} = a, a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

$$0, 2, 0_3, 0_4, 0_5, 0_6, \dots$$

$$0_3 = 0 + 2 = 2 \quad 0_4 = 2 + 2 = 4 \quad 0_5 = 4 + 2 = 6 \quad 0_6 = 6 + 2 = 10$$

$$0, 2, 2, 4, 6, 10, \dots$$

3. Los dos primeros términos son 1 y 2; cada término a partir del tercero es el producto de los dos precedentes. Escribir los seis primeros términos de la sucesión.

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = a_1 \cdot a_2 \quad a_4 = a_2 \cdot a_3 \quad a_5 = a_3 \cdot a_4$$

$$a_3 = 2 \quad a_4 = 4$$

$$a_5 = 8 \quad a_6 = 32$$

$$a_7 = 256 \quad 1, 2, 2, 4, 32, 256, \dots$$

4. Los términos de orden impar son sucesivamente los cuadrados perfectos enseros. Los términos de orden par son los sucesivos múltiplos positivos de 3. Escribir los ocho primeros términos de esta sucesión.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ múltiplo de sí mismo y de la unidad}$$

$$a_3 = 2^2 = 4 \quad a_4 = 2 \cdot (3) = 6$$

$$a_5 = 3^2 = 9 \quad a_6 = 3 \cdot (3) = 9$$

$$a_7 = 4^2 = 16 \quad a_8 = 4 \cdot (3) = 12 \quad 1, 3, 4, 6, 9, 9, 16, 12$$

## Ejercicio 163

I. Hallar el: Fórmula:  $u_n = a + (n-1)d$

1. 9º término de 7, 10, 13, ...  $a = 7, n = 9, d = 13 - 10 = 3$

$$u_9 = 7 + (9-1)3; u_9 = 31$$

2. 20º término de 3, 7, 11, ...  $u_{20} = 3 + (20-1)4; u_{20} = 79$

3. 12º término de 70, 65, 60, ...  $u_{12} = 70 + (12-1)(-5); u_{12} = 15$

4. 100º término de 2, 4, 6, ...  $u_{100} = 2 + (100-1)2; u_{100} = 200$

5. 25º término de -6, -3, 0, ...  $u_{25} = -6 + (25-1) \cdot 3; u_{25} = 66$

6. 10º término de  $1/2, 1, 3/2, \dots$   $u_{10} = 1/2 + (10-1)(1/2); u_{10} = 5$

7. 16º término de 0,  $1/3, 2/3, \dots$   $u_{16} = 0 + (16-1)(1/3); u_{16} = 5$

8. 40º término de 100, 97, 94, ...  $u_{40} = 100 + (40-1)(-3); u_{40} = -17$

9. 11º término de  $1, 4/5, 3/5, \dots$   $u_{11} = 1 + (11-1)(-1/5); u_{11} = -1$
10. 29º término de  $-1, -4, -7, \dots$   $u_{29} = -1 + (29-1)(-3); u_{29} = -85$
11. Primer término de una progresión aritmética de 7 términos cuya diferencia es 4, sabiendo que el último término vale 39.  
 $n = 7, d = 4, u = 39, a = ?$   $u = a + (n-1)d; 39 = a + (7-1)4; a = 15$
12. Primer término de una progresión aritmética de 15 términos cuya diferencia es -2, sabiendo que el último vale 50.  
 $50 = a + (15-1)(-2); a = 78$

II Una progresión aritmética se compone de 13 términos. Su diferencia es  $3/2$  y el último vale 10. ¿Cuánto vale el primero?

$$10 = a + (13-1)(3/2); a = -8$$

III Hallar el número de términos de una progresión aritmética que comienza por 30 y termina por -10 sabiendo que su diferencia es -5?

$$-10 = 30 + (n-1)(-5); n = 9$$

IV En una progresión aritmética el primer término es 8 y el último es 62. Si la diferencia es 6. ¿De cuántos términos se compone la progresión?

$$62 = 8 + (n-1)(6); n = 10$$

V Una progresión aritmética comienza por 2, termina por 3 y su diferencia es  $1/10$ . ¿Cuántos términos hay en la progresión?

$$3 = 2 + (n-1)(1/10); n = 11$$

VI Una progresión aritmética se compone de 8 términos, el primero de los cuales es 10 y el último es -4. Hallar la diferencia de la progresión.

$$-4 = 10 + (8-1)d; d = -2$$

VII En una progresión el primer término es 5 y el último 55. Si el número de términos es 11, ¿cuánto vale la diferencia?

$$55 = 5 + (11-1)d; d = 5$$

VIII En una progresión que se compone de 5 términos, el primero es 7 y el último es 9. Hallar la diferencia y construir la progresión.



$$q = 7 + (5-1)d ; d = 1/2, d = 0,5$$

$$a_1 = 7 ; a_2 = 7 + 1/2 = 7,5 ; a_3 = 7,5 + 1/2 = 8 ; a_4 = 8 + 0,5 = 8,5$$

$$a_5 = 8,5 + 0,5 = 9 ; \text{ Pro A. } 7, 7,5, 8, 8,5, 9$$

**IX** En cada una de las progresiones aritméticas siguientes hallar la suma del número de términos que se indica:

1.  $3, 6, 9, \dots (n=11)$

$$S_n = n/2 [2a + (n-1)d] ; S_n = n/2 (a + l) ; S_{11} = 11/2 [2(3) + (11-1)3] ; S_{11} = 198$$

2.  $-1, 3, 7, \dots (n=20)$

$$S_{20} = 20/2 [-1 + (20-1)4] ; S_{20} = 740$$

3.  $15, 13, 11, \dots (n=8)$

$$S_8 = 8/2 [30 + (8-1)(-2)] ; S_8 = 64$$

4.  $-11, -9, -7, \dots (n=10)$

$$S_{10} = 10/2 [-22 + (10-1)2] ; S_{10} = -20$$

5.  $6, 4,6, 3,2, \dots (n=15)$

$$S_{15} = 15/2 [12 + (15-1)(-1,4)] ; S_{15} = -57$$

6.  $0,2, 0,7, 1,2, \dots (n=12)$

$$S_{12} = 12/2 [0,4 + (12-1)(0,5)] ; S_{12} = 35,4$$

7.  $1/3, 1/2, 2/3, \dots (n=21)$

$$S_{21} = 21/2 [2/3 + (21-1)(1/6)] ; S_{21} = 42$$

8.  $1/10, 3/10, 1/2, \dots (n=25)$

$$S_{25} = 25/2 [2/10 + (25-1)(1/5)] ; S_{25} = 62,5$$

9.  $x-y, x, x+y, \dots (n=6)$

$$S_6 = 6/2 [2(x-y) + (6-1)y] ; S_6 = 6x + 9y$$

10.  $1,02, 1,05, 1,08, \dots (n=10)$

$$S_{10} = 10/2 [2(1,02) + (10-1)(0,03)] ; S_{10} = 11,55$$

11.  $2, 1,5, 1, \dots (n=7)$

$$S_7 = 7/2 [4 + (7-1)(-0,5)] ; S_7 = 3,5$$

**X** Hallar los valores de las sumas indicadas siguientes :

1.  $5 + 9 + 13 + \dots + 61$

$$a = 5, d = 4, l = 61, n = ?, S = ?$$

$$S = n/2 (a + l) ; l = a + (n-1)d ; 61 = 5 + (n-1)4 ; n = 15$$

$$S_{15} = 15/2 (5 + 61) ; S_{15} = 495$$

2.  $1 + 4 + 7 + \dots + 55$

$$55 = 1 + (n-1)3 ; n = 19$$

$$S_{19} = 19/2 [1 + 55] ; S_{19} = 532$$

3.  $1 + 7/4 + 5/2 + \dots + 10$

$$10 = 1 + (n-1)3/4 ; n = 13$$

$$S_{13} = 13/2 (1 + 10) ; S_{13} = 76,5$$

4.  $9 + 6 + 3 + \dots + (-15)$

$$-15 = 9 + (n-1)(-3) ; n = 9$$

$$S_9 = 9/2 (9 + (-15)) ; S_9 = -27$$

5.  $2 + 4 + 6 + \dots + 200$

$$200 = 2 + (n-1)2 ; n = 100$$

$$S_{100} = 100/2 (2 + 200) ; S_{100} = 10100$$

**XI** El término general de una sucesión es  $u_n = 4n - 1$ . Hallar :

1. La suma de los 10 primeros términos.

$$u_n = 4n - 1; \quad u_{n+1} = 4(n+1) - 1; \quad u_{n+1} = 4n + 3 \Rightarrow a = 3$$

$$d = u_{n+1} - u_n; \quad d = 4(n+1) - 1 - (4n - 1); \quad d = 4$$

$$S = n/2 [2a + (n-1)d]; \quad S_{10} = 10/2 [6 + 9 \cdot 4]; \quad S_{10} = 210$$

2. La suma de los  $n$  primeros términos. (Compárese el resultado con el ejercicio 15.)

$$l = u_n = 4n - 1; \quad u_{n+1} = 4(n+1) - 1; \quad u_{n+1} = 4n + 3$$

$$d = u_{n+1} - u_n; \quad d = 4n + 3 - 4n - 1; \quad d = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$S_n = n/2 (a + l); \quad S_n = n/2 (3 + 4n - 1); \quad S_n = n(2n + 1)$$

### Ejercicio 164

#### I. Interpolar:

1. Seis medios aritméticos entre 3 y 38

$$n = 8, a = 3, l = 38; \quad l = a + (n-1)d; \quad 38 = 3 + (8-1)d; \quad d = 5$$

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38$$

2. Cuatro medios aritméticos entre 1 y 21

$$21 = 1 + (6-1)d; \quad d = 4 \quad 1, 5, 9, 13, 17, 21$$

3. Diez medios aritméticos entre 127 y 6

$$6 = 127 + (12-1)d; \quad d = -11 \quad 127, 116, 105, 94, 83, 72, 61, 50, 39, 28, 17, 6$$

4. Ocho medios aritméticos entre 17 y 53

$$53 = 17 + (10-1)d; \quad d = 4 \quad 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53$$

5. Dos medios aritméticos entre 3 y 4

$$4 = 3 + (4-1)d; \quad d = 1/3 \quad 3, 10/3, 11/3, 4$$

6. Siete medios aritméticos entre 152 y 128

$$128 = 152 + (9-1)d; \quad d = -3 \quad 152, 149, 146, 143, 140, 137, 134, 131, 128$$

7. Nueve medios aritméticos entre -2 y 1

$$1 = -2 + (11-1)d; \quad d = 3/10 \quad -2, -17/10, -14/10, -11/10, -8/10, -5/10, -2/10, 1/10, 4/10, 7/10, 1$$

8. Cinco medios aritméticos entre 3.1 y 4.3

$$4.3 = 3.1 + (7-1)d; \quad d = 0.2 \quad 3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.9, 4.1, 4.3$$

9. Cuatro medios aritméticos entre  $-5$  y  $5$

$$5 = -5 + (6-1)d; d = 2 \quad -5, -3, -1, 1, 3, 5$$

10. Cuatro medios aritméticos entre  $1/7$  y  $6/7$

$$6/7 = 1/7 + (6-1)d; d = 1/7 \quad 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7$$

11. Seis medios aritméticos entre  $2x-3y$  y  $9x+4y$

$$9x+4y = 2x-3y + (8-1)d; d = x+y \quad 2x-3y, 3x-2y, 4x-y, 5x, 6x+y, 7x+2y, 8x+3y, 9x+4y$$

II Probar que si se han de interpolar  $m$  medios aritméticos entre  $a$  y  $b$ , entonces:  
 $n = m+1, a = a, l = b, d = ? \quad d = (b-a)/(m+1); l = a + (n-1)d; b = a + (m+1)d$   
 $d = (b-a)/(m+1)$  NO satisface

III Determinar  $x$  de modo que  $3, 1+4x, 9+3x$ , formen una progresión aritmética.  
 $a = 3, n = 3, l = 9+3x, d = 4x-2; \quad 9+3x = 3 + (3-1)(4x-2); x = 2$

IV Determinar  $x$  de modo que  $2x, 3+x, 5x-9$ , formen una progresión aritmética.  
 $5x-9 = 2x + (3-1)(3+x-2x); x = 3$

V Demostrar que en toda progresión aritmética la suma de los términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.  
 Sea la progresión  $3, 1, 3, 3, 3, 5, 3, 7, 3, 9, 4, 1, 4, 3$

$$3, 5 + 3, 9 = 3, 1 + 4, 3$$

$$7, 4 = 7, 4$$

### Ejercicio 165

1. Dados  $a = 3, u = 59$  y  $d = 4$ ; hallar  $n$  y  $S_n$ ;  $u = l$

$$l = a + (n-1)d; S_n = n/2(a+l) \quad 59 = 3 + (n-1)4; n = 15 \quad S_{15} = 15/2(3+59); S_{15} = 465$$

2. Dados  $n = 10, l = 35$  y  $S_n = 215$ , hallar  $a$  y  $d$

$$35 = a + (10-1)d; 35 = a + 9d, \quad 215 = 10/2(a+35); a = 8; \quad 35 = 8 + 9d; d = 3$$

3. Dados  $n = 15, l = -27$  y  $d = -3$ , hallar  $a$  y  $S_{15}$

$$-27 = a + (15-1)(-3); a = 15 \quad S_{15} = 15/2(15-27); S_{15} = -90$$

4. Dados  $d=3$ ,  $n=9$  y  $S_n=126$ , hallar  $a$  y  $l$   
 $l = a + (n-1)d$ ,  $l = a + 24$ ;  $126 = 9/2(a+l)$ ;  $28 = a+l$   
 $l - a = 24$   
 $\frac{l+a}{2} = 28$   
 $2l = 52$ ,  $l = 26$ ,  $a = 2$
5. Dados  $a=3$ ,  $d=4$  y  $S_n=465$  hallar  $n$  y  $l$   
 $l = 3 + (n-1)4$ ,  $l = 4n - 1$ ;  $465 = n/2(3+l)$ ;  $930 = n(3+l)$ ;  $930 = n(3+4n-1)$   
 $2n^2 + n - 465 = 0$ ;  $(2n+31)(n-15) = 0$ ,  $n = -31/2$  NO,  $n_2 = 15$ ;  $l = 4(15) - 1 = 59$
6. Dados  $a=6$ ,  $S_n=500$  y  $n=20$ , hallar  $d$  y  $l$   
 $l = 6 + (20-1)d$ ;  $l = 6 + 19d$ ,  $500 = 20/2(6+l)$ ,  $l = 44$  y  $d = 2$
7. Dados  $a=-2$ ,  $l=20$  y  $n=12$ , hallar  $d$  y  $S_n$   
 $20 = -2 + 11d$ ;  $d = 2$   $S_n = 12/2(-2+20)$ ,  $S_n = 108$
8. Dados  $d=4$ ,  $l=45$  y  $S_n=216$ , hallar  $n$  y  $a$  \* Corregir la respuesta del texto:  $a=9$   
 $45 = a + (n-1)4$ ;  $49 = a + 4n$ ;  $a = 49 - 4n$ ,  $216 = n/2(a+45)$ ;  $432 = n(a+45)$ :  
 $432 = n(49-4n+45)$ ;  $2n^2 - 47n + 216 = 0$ ;  $(2n-27)(n-8) = 0$ ,  $n = 27/2$  NO,  $n_2 = 8$ ;  $a = 17$
9. Dados  $a=10$ ,  $l=-26$  y  $S_n=-80$ , hallar  $n$  y  $d$   
 $-26 = 10 + (n-1)d$ ,  $-36 = (n-1)d$ ;  $d = -36/9$ ,  $d = -4$   $-80 = n/2(10-26)$ ;  $n = 10$
10. Dados  $a=18$ ,  $d=-3$  y  $S_n=54$ , hallar  $n$  y  $l$   
 $l = 18 + (n-1)(-3)$ ,  $l = 21 - 3n$   $54 = n/2(18+l)$ ;  $108 = 18n + n l$ ;  $108 = 18n + n(21-3n)$   
 $n^2 - 13n + 36 = 0$ ;  $(n-9)(n-4) = 0$ ;  $n = 9$ ,  $n = 4$   
 Con  $n=9$ ;  $l = -6$  Con  $n=4$ ,  $l = 9$
11. ¿Cuántas campanadas de un reloj de pared \* en 24 horas?  
 \* Esfera dividido en 12 horas; el reloj de una campanada a las medias horas.
- 
- |        |                                  |
|--------|----------------------------------|
| $a=1$  | $S = n/2 [2a + (n-1)d]$          |
| $d=1$  | $S = 12/2 [2 \cdot 1 + (12-1)1]$ |
| $n=12$ | $S = 78$ para 12 horas           |
| $S=?$  | $2S = 156$ para 24 horas         |
- En 24 horas da 24 campanadas Total  $24 + 156 = 180$  campanadas
12. Una pila de troncos de madera se forma colocando 16 troncos debajo, 15 troncos sobre éstos, 14 sobre estos últimos, y así sucesivamente, hasta poner un solo tronco arriba. ¿Cuántos troncos hay en la pila?  
 $a=16$ ,  $l=1$ ;  $d=-1$ ,  $l = a + (n-1)d$ ;  $1 = 16 + (n-1)(-1)$ ;  $n = 16$   
 $S_{16} = 16/2(16+1)$ ,  $S_{16} = 136$

13. Un cuerpo que cae en el vacío recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos pies recorre el cuerpo durante el 7º segundo? ¿Cuál es la distancia total recorrida en 10 segundos?
- Para el 7º segundo  $n=7$ ,  $a=16$ ,  $d=32$ ,  $f_7=?$   $f_7=16+(7-1)32$ ;  $f_7=208$  pies  
para la distancia total;  $n=10$ :  $S_n=n/2[2a+(n-1)d]$ ;  $S_n=10/2[32+(9)32]$ ;  $S_n=1600$  pies

14. Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 3m durante el primer segundo, 9m durante el segundo, 15m durante el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos metros recorre durante el 10º segundo? ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer una distancia total de 192m?
- $a=3$ ,  $d=6$ ,  $n=10$ ,  $f_{10}=?$   $f_{10}=3+9.6$ ;  $f_{10}=57m$   
Para el tiempo:  $n=?$   $S_n=n/2[2a+(n-1)d]$ ;  $192=n/2[6+(n-1)6]$ ;  $n^2=64$ ;  $n=\pm 8$   
 $n_1=8$  seg.,  $n_2=-8$  NO

15. En un cartón de rifa hay números del 1 al 100. Cada jugador paga tantos centavos como indique el número que destapa. Si el cartón cuesta 1\$ y el número premiado recibe 30\$, ¿a cuánto asciende la ganancia?

$$a=1 \text{ ctvs}, d=1 \text{ ctvs}, n=100 \text{ ctvs}, S=?$$

$$S=n/2[2a+(n-1)d]$$

$$S=100/2[2.1+(100-1).1]$$

$$S=5050 \text{ ctvs.}$$

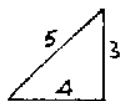
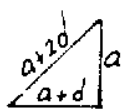
$$S=50.5 \$ \text{ se pagó } 1 \$ \text{ del cartón}$$

$$30 \$ \text{ del } n^\circ \text{ premiado}$$

$$\text{queda } 50.5 - 31 = 19.5 \$$$

16. Un contratista ofrece realizar un trabajo a razón de 10\$ el primer pie, 11,50\$ el segundo pie, 13\$ el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos pies se puede realizar con 2337,50\$?
- $a=10$ ,  $d=1.50 \$$ ,  $S=2337.50 \$$ ,  $n=?$   $S=n/2[2a+(n-1)d]$   
 $2337.50=n/2[20+(n-1)1.50]$ ;  $1.50n^2+18.5n-4675=0$ ,  $n_1=50$ ,  $n_2=-18.7/0.3$  NO

17. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Demostrar que sus lados serán proporcionales a los del triángulo rectángulo cuyos lados son 3, 4 y 5.



$$\frac{a}{3} = \frac{a+d}{4} = \frac{a+2d}{5}; \frac{a}{3} = \frac{a+d}{4}; a=3d$$

$$\frac{a}{3} = \frac{a+2d}{5}; a=3d \quad \frac{a+d}{4} = \frac{a+2d}{5}; a=3d$$

18. Un niño ahorra 50 centavos la primera semana, 1\$ la segunda, 1,50\$ la tercera, etc., hasta que llega a ahorrar 4\$ a la semana. De aquí en adelante sigue ahorrando 4\$ semanales. ¿Cuánto ahorrará en un año (52 semanas)?

$$a=0.5, d=0.5, f_4=? \text{ 1ª semana}; f_4=a+(n-1)d; 4=0.5+(n-1)(0.5); n=8 \text{ semanas}$$

$$S_8=8/2(0.5+4); S_8=18 \text{ en las 8 semanas} \Rightarrow 52-8=44 \text{ semanas}$$

$$\text{que ahorra } 4 \$ \text{ esto dará } S=176 \Rightarrow S_T=18+176=194 \$$$

19. Un joven ahorra cada mes 50 centavos más que en el mes anterior. En 10 años sus ahorros suman 3690\$. Determine: a) lo que ahorró el primer mes; b) lo que ahorró el último mes.

$$a = ? , l = ? , s = 3690 ; n = 120 \text{ meses} , d = 0.5 ; S_n = n/2 (a + l) ; l = a + (n-1)d$$

$$l = a + 119(0.5) ; l - a = 59.5 ; 3690 = 120/2 (a + l) , l + a = 61.5$$

$$(l - a = 59.5) + (l + a = 61.5) ; 2l = 121 , l = 60.5 \Rightarrow a = 1\$ , l = 60.5\$$$

20. Pedro ha ganado 168\$ en 7 días. Si sus ganancias diarias están en progresión aritmética y el primer día ganó 30\$, ¿cuánto ganó el segundo día y el séptimo día?

$$n = 7 , S_7 = 168 , a = 30 , a_2 = ? , l = ? \quad S = n/2 (a + l) , 168 = 7/2 (30 + l) ; l = 18 \text{ último día}$$

$$l = a + (n-1)d , 18 = 30 + 6d , d = -2 ; a_2 = a + d , a_2 = 30 - 2 , a_2 = 28 \text{ 2º día}$$

21. En un hexágono, cada lado (excepto el primero) es 5 cm mayor que el anterior. El perímetro mide 1,35 m. ¿Qué longitud tiene el primer lado? ¿Y el último?

$$n = 6 , d = 0.05 \text{ m} , S = p = 1.35 \text{ m} , a = ? , l = ? \quad S = n/2 (a + l)$$

$$1.35 = 6/2 (a + l) ; l = a + (n-1)d , l = a + 5(0.05) ; l = a + 0.25 ; l - a = 0.25$$

$$(l - a = 0.25) + (l + a = 0.45) ; 2l = 0.70 , l = 0.35 \text{ m} \Rightarrow a = 10 \text{ cm}$$

22. Hallar la suma de los múltiplos de 7 mayores que 100 y menores que 200.

$$a = 105 , d = 7 , l = 196 , n = 14 , S = ?$$

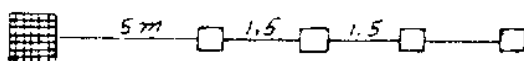
$$S = n/2 (a + l) ; S = 14/2 (105 + 196) ; S = 2107$$

23. Hallar la suma de los múltiplos de 13 mayores que 100 y menores que 500.

$$a = 104 ; d = 13 ; n = 31 , l = 494$$

$$S = 31/2 (104 + 494) ; S = 9269$$

24. En línea recta, en el suelo hay un cesto y varias piedras. El cesto está a 5 m de la primera piedra y las piedras están a 1.5 m unas de otras. Un niño parte del cesto, recoge la primera piedra y regresa a ponerla en el cesto; después hace la misma operación con la segunda piedra, y así sucesivamente. ¿Qué distancia recorre para colocar en el cesto la octava piedra? ¿Qué distancia total ha recorrido hasta ese momento?



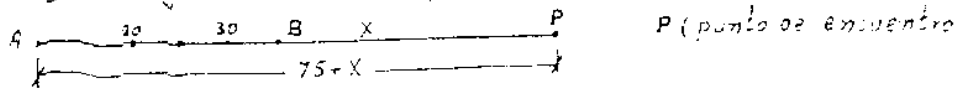
$$a = 5 \text{ m} ; d = 1.5 ; n = 8 ; l = ? ; S = ?$$

Como el niño va y viene  $\Rightarrow$  el 1º paso queda de ida es 5 y regresa 5 da 10 para la primera piedra y así sucesivamente.

$$a = 10 , d = 3 , n = 8 ; l = a + (n-1)d ; l = 10 + 7(3) ; l = 31$$

$$S = n/2 (a + l) ; S = 8/2 (10 + 31) ; S = 164$$

25. Un viajero sale de A a las 7 am y recorre 10 km en la primera hora; 20 km en la segunda hora; 30 km en la tercera hora, etc. Tres horas más tarde otro viajero sale por el mismo camino a una velocidad constante de 65 km por hora, ¿a qué hora el segundo viajero encontrará al primero?



$$t_A = t_B \text{ si A se le toma desde el punto B; } t_A = t_B = n; \quad S_n = n/2 [20 + (n-1)5]$$

$$\text{para el viajero } \textcircled{1} \quad S_n = n/2 [20 + (n-1)5]; \quad X = n/2 (65 + 5n)$$

$$\text{para el viajero } \textcircled{2} \quad d = V \cdot t_B; \quad 75 + X = 65 \cdot n; \quad 75 + n/2 (65 + 5n) = 65n$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0; \quad (n-10)(n-3) = 0; \quad n = 10$$

$$n = 3 \text{ No puesto que en 3 horas el 1º se desplazó cierta distancia y el 2º No}$$

$$t_B = t_A = 10 \text{ como salió 3 horas}$$

$$\text{después } p \Rightarrow 10 + 3 = 13 \text{ horas}$$

El 1º viajero salió a las 7 y se demora 13 horas da un tiempo de encuentro a las 20 horas = Spr

### Ejercicio 166

I Hallar el:

1. 9º término de 10, 20, 40, ...

$$a = 10; \quad r = 2; \quad n = 9; \quad u_n = ? \quad u_n = ar^{n-1}; \quad u_9 = 10 \cdot 2^{9-1}; \quad u_9 = 2560$$

2. 7º término de 7, 14, 28, ...

$$u_7 = 7 \cdot 2^{7-1}; \quad u_7 = 448$$

3. 6º término de 256, 128, 64, ...

$$u_6 = 256 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}; \quad u_6 = 8$$

4. 5º término de 5, 15, 45, ...

$$u_5 = 5 \cdot 3^{5-1}; \quad u_5 = 405$$

5. 10º término de 1, -2, 4, -8, ...

$$u_{10} = 1 \cdot (-2)^{10-1}; \quad u_{10} = -512$$

6. 6º término de 625, 125, 25, ...

$$u_6 = 625 \left(\frac{1}{5}\right)^{6-1}; \quad u_6 = 1/5$$

7. 5º término de 81, -27, 9, ...

$$u_5 = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{5-1}; \quad u_5 = 1$$

8. 7º término de 0.2, 0.01, 0.002, ...

$$u_7 = 0.2 \cdot (0.1)^{7-1}; \quad u_7 = 0.000002$$

9. 5º término de 10,  $15\sqrt{2}$ , 45, ...

$$u_5 = 10 \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^{5-1}; \quad u_5 = 204.5$$

10. 8º término de  $2/3, 1/3, 1/6, \dots$

$$u_8 = 2/3 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}; \quad u_8 = 1/192$$

11. Primer término de una progresión geométrica de 6 términos cuya razón es  $2/3$ , sabiendo que el último término vale 320.

$$l = ar^{n-1} ; 320 = a(2/3)^{4-1} ; a = 2430$$

- II Una progresión geométrica se compone de 8 términos. La razón es 0,1 y el último término es 0,25. ¿Cuánto vale el primero?

$$l = ar^{n-1} ; 0,25 = a(0,1)^{8-1} ; a = 250000$$

- III Una progresión geométrica tiene 5 términos. El último término es -1024 y la razón es -4. Hallar el primer término.

$$-1024 = a(-4)^{5-1} ; a = -4$$

- IV Hallar el número de términos de una progresión geométrica que comienza por 7 y termina por 448, sabiendo que su razón es 2.

$$448 = 7(2)^{n-1} ; 64 = 2^{n-1} ; 2^6 = 2^{n-1} ; 6 = n-1 ; n = 7$$

- V El primer término de una progresión geométrica es 8 y el último es 40,5. Si la razón de la progresión es 3/2, ¿de cuántos términos se compone ésta?

$$40,5 = 8(3/2)^{n-1} ; 5,0625 = (3/2)^{n-1} ; 5,0625 = (1,5)^{n-1} ; (1,5)^4 = (1,5)^{n-1} \\ 4 = n-1 ; n = 5$$

- VI Una progresión geométrica que comienza por  $3\sqrt{2}$  termina por 24. La razón es  $\sqrt{2}$ . ¿Cuántos términos hay en la progresión?

$$24 = 3\sqrt{2}(\sqrt{2})^{n-1} ; 8 = \sqrt{2}(\sqrt{2})^{n-1} ; 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{n-1} ; 2^{5/2} = (2^{1/2})^{n-1} \\ 5/2 = 1/2 n-1 ; n = 6$$

- VII Una progresión geométrica se compone de 5 términos. El primero es 9 y el último es 144. Hallar la razón de la progresión.

$$144 = 9(r)^{5-1} ; 16 = r^4 ; 2^4 = r^4 ; r = \pm 2$$

- VIII En una progresión geométrica de 3 términos el primer término es 250 y el último 10. ¿Cuánto vale la razón?

$$10 = 250(r)^{3-1} ; 1/25 = r^2 ; r = \pm 1/5$$

- IX En una progresión geométrica de 6 términos el primero es 5 y el último es 5120. Determinar la razón y construir la progresión?

$$5120 = 5(r)^{6-1} ; 1024 = r^5 ; 2^{10} = r^5 ; r = \sqrt[5]{2^{10}} ; r = 4$$



X En cada una de las progresiones geométricas siguientes hallar la suma  $S_n$  para el valor de  $n$  que se indica:

1. 1.5, 3, 6, ... ( $n=5$ )

$$S_n = \frac{ar^n - a}{r - 1} ; S_n = \frac{ar - a}{r - 1} ; S_n = \frac{1.5(2)^5 - 1.5}{2 - 1} ; S_n = 46.5$$

2. 90, 30, 10, ... ( $n=4$ )

$$S_n = \frac{90(1/3)^4 - 90}{1/3 - 1} ; S_n = \frac{400}{3}$$

3. 1, 3, 9, ... ( $n=6$ )

$$S_n = 1(3)^6 - 1/3 - 1 ; S_n = 364$$

4. 1/4, 1/2, 1, ... ( $n=8$ )

$$S_n = 1/4(2)^8 - 1/4/2 - 1 ; S_n = 63.75$$

5. 1, -1/2, 1/4, ... ( $n=7$ )

$$S_n = 1(-1/2)^7 - 1/-1/2 - 1 ; S_n = 43/64$$

6.  $\sqrt{3}$ , 3,  $3\sqrt{3}$ , ... ( $n=5$ )

$$S_n = \sqrt{3}(\sqrt{3})^5 - \sqrt{3}/\sqrt{3} - 1 ; S_n = 12 + 13\sqrt{3}$$

7. 4,  $-4\sqrt{2}$ , 8, ... ( $n=6$ )

$$S_n = 4(-\sqrt{2})^6 - 4/-\sqrt{2} - 1 ; S_n = 28 - 18\sqrt{2}$$

8. 5, 20, 80, ... ( $n=6$ )

$$S_n = 5(4)^6 - 5/4 - 1 ; S_n = 6825$$

9. 0.3, 0.06, 0.012, ... ( $n=5$ )

$$S_n = 0.3(0.2)^5 - 0.3/0.2 - 1 ; S_n = 0.37488$$

10. 2, -6, 18, ... ( $n=7$ )

$$S_n = 2(-3)^7 - 2/-3 - 1 ; S_n = 1094$$

11.  $K$ ,  $-K/2$ ,  $K/4$ , ... ( $n=6$ )

$$S_n = K(-1/2)^6 - K/-1/2 - 1 ; S_n = 21K/32$$

XI Calcular las sumas indicadas siguientes:

1.  $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot 3^6$

$$a = ar^{n-1} ; 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 3^{n-1} ; 3^6 = 3^{n-1} ; 6 = n-1 ; n = 7$$

$$S_7 = 2(3)^7 - 2/3 - 1 ; S_7 = 2186$$

2.  $1 + (1.02) + (1.02)^2 + \dots + (1.02)^5$

$$(1.02)^5 = 1(1.02)^{n-1} ; n = 6$$

$$S_6 = 1(1.02)^6 - 1/1.02 - 1 ; S_6 = 6.308$$

3.  $1 + (1.03)^{-1} + (1.03)^{-2} + \dots + (1.03)^{-5}$

$$(1.03)^{-5} = 1(1.03)^{-(n-1)} ; n = 6$$

$$S_6 = 1(1.03)^{-6} - 1/(1.03)^{-1} - 1 ; S_6 = 5.580$$

4.  $1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^n$

$$S_n = \frac{ar - a}{r - 1} ; S_n = \frac{(1+r)^n(1+r) - 1}{1+r-1} ; S_n = \frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r}$$

5.  $10 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \dots + 9 \cdot 10^n$

Si:  $r = 9 \cdot 10^2 / 9 \cdot 10$ ;  $r = 10$ . Se concluye que 10 no es el 1º término de la progresión  
 $r = 9 \cdot 10 / 10$ ;  $r = 9$  En este caso viene hacer  $a = 9 \cdot 0 = 0$  puesto que  $K = 9$   
 Con  $r = 10$ ;  $S_n = \frac{r^n - a}{r - 1}$ ;  $S_n = \frac{9 \cdot 10^n \cdot 10 - 0}{10 - 1}$ ;  $S_n = 10^{n+1}$

**XII** El término general de una sucesión es  $u_n = (a-1)a^n$ . Hallar: a) la suma de los 8 primeros términos; b) la suma de los  $n$  primeros términos.

Si:  $u_n = (a-1)a^n$ ;  $u_{n+1} = (a-1)a^{n+1}$ ;  $u_{n+1} = (a-1)a^n \cdot a$

$r = u_{n+1} / u_n$ ;  $r = (a-1)a^n \cdot a / (a-1)a^n$ ;  $r = a$

$u_1 = (a-1)a^1$ ;  $u_2 = a(a-1)$ ;  $u_3 = (a-1)a^3$

$S_n = \frac{r^n - a}{r - 1}$ ;  $S_8 = \frac{(a-1)a^8 \cdot 10 - a(a-1)}{a - 1}$ ;  $S_8 = a^9 - a$

$S_n = (a-1)a^n \cdot a - a(a-1) / a - 1$ ;  $S_n = a^{n+1} - a$

## Ejercicio 167

### I Interpolación:

1. Un medio geométrico entre 4 y 25

Al interpolar un medio geométrico es como hallar la media geométrica.

$X = \sqrt{4 \cdot 25}$ ;  $X = \pm 10$  Con  $X = 10$ ; 4, 10, 25 Si  $n = \text{impar}$ ; dos soluciones reales

Con  $X = -10$ ; 4, -10, 25 Si  $n = \text{par}$ ; Una solución real

2. Un medio geométrico entre 9 y 16

$X = \sqrt{9 \cdot 16}$ ;  $X = \pm 12$

9, 12, 16 y 9, -12, 16

3. Un medio geométrico entre 5 y 10

$X = \sqrt{5 \cdot 10}$ ;  $X = \pm 5\sqrt{2}$

5,  $5\sqrt{2}$ , 10 y 5,  $-5\sqrt{2}$ , 10

4. Dos medios geométricos entre 2 y 16

$n = 4$ ,  $a = 2$ ,  $f = 16$ ;  $f = ar^{n-1}$ ;  $16 = 2r^{4-1}$ ;  $2^3 = r^3$ ;  $r = 2 \Rightarrow 2, 4, 8, 16$

5. Dos medios geométricos entre -4 y 108

$a = -4$ ,  $f = 108$ ,  $n = 4$ ;  $108 = -4r^{4-1}$ ;  $3^3 = -r^3$ ;  $r = -3 \Rightarrow -4, 12, -36, 108$

6. Tres medios geométricos entre 1 y 81

$n = 5$ ,  $a = 1$ ,  $f = 81$ ;  $81 = 1(r)^{5-1}$ ;  $3^4 = r^4$ ;  $r = \pm 3 \Rightarrow 1, 3, 9, 27, 81$  y  $1, -3, 9, -27, 81$

7. Tres medios geométricos entre  $4/5$  y  $1/20$

$$n=5; a=4/5, l=1/20 \quad 1/20 = 4/5(r)^{5-1}; 1/16 = r^4; r = \pm 1/2$$

$$4/5, 2/5, 1/5, 1/10, 1/20 \quad \text{y} \quad 4/5, -2/5, 1/5, -1/10, 1/20$$

8. Cuatro medios geométricos entre  $4/9$  y  $27/8$

$$n=6, a=4/9, l=27/8 \quad 27/8 = 4/9(r)^{6-1}; (3/2)^5 = 1/5; r=3/2 \Rightarrow 4/9, 2/3, 1, 3/2, 9/4, 27/8$$

9. Cinco medios geométricos entre  $7$  y  $5103$

$$n=7, a=7, l=5103 : 5103 = 7r^{7-1}; 3^6 = r^6; r = \pm 3$$

$$7, 21, 63, 189, 567, 1701, 5103 \quad \text{y} \quad 7, -21, 63, -189, 567, -1701, 5103$$

10. Seis medios geométricos entre  $512$  y  $-4$

$$n=8, a=512, l=-4 : -4 = 512r^{8-1}; -1/128 = r^7; r = -1/2; 512, -256, 128, -64, 32, -16, 8, -4$$

11. Determinar  $x$  de modo que  $x-5, x+7, 8x+11$ , estén en progresión geométrica

$$a = x-5, l = 8x+11, r = (x+7)/(x-5), n=3$$

$$l = ar^{n-1}; 8x+11 = (x-5)(x+7)/(x-5)^2; 8x+11 = (x+7)^2/(x-5); 7x^2 - 43x - 104 = 0$$

$$x_1 = 8, x_2 = -13/7$$

12. Demostrar que en toda progresión geométrica el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.

Sea la progresión  $7, 21, 63, 189, 567, 1701, 5103$

$$63 \cdot 567 = 7(5103)$$

$$35721 = 35721$$

### Ejercicio 168

I Datos:

1.  $a=6, r=1/3, l=2/9$ , hallar  $n$  y  $S_n$

$$l = ar^{n-1}; 2/9 = 6(1/3)^{n-1}; (1/3)^3 = (1/3)^{n-1}; 3 = n-1, n=4$$

$$S_n = l(r-a/r-1); S_4 = 2/9 \cdot 1/3 - 6/1/3 - 1; S_4 = 80/9$$

2.  $l=1024, r=8, n=4$ , hallar  $a$  y  $S_4$

$$1024 = a(8)^{4-1}; a=2$$

$$S_4 = 1024 \cdot 8 - 2/8 - 1; S_4 = 1170$$

3.  $a=3, l=192, n=7$ , hallar  $r$  y  $S_7$

$$192 = 3(r)^{n-1}, 2^4 = r^4; r = \pm 2$$

$$\text{Con } r=2, S_7 = 192 \cdot 2 - 3/2 - 1; S_7 = 381$$

$$\text{Con } r=-2; S_7 = 192 \cdot 2 - 3/-2 - 1; S_7 = -127$$

4.  $n=5, r=3; S_5 = 242/3$ , hallar  $a$  y  $l$

$$l = ar^{n-1}; l = a \cdot 3^{5-1}; l = 81a$$

$$S_n = l(r-a)/(r-1); 242/3 = 3l \cdot a/3-1$$

$$484 = 9l - 3a; 484 = 9(81a) - 3a; a = 2/3, l = 54$$

5.  $a=200, r=1/2, S_n=375$ , hallar  $l$  y  $n$

$$l = 200(1/2)^{n-1}; 375 = l(1/2) - 200/1/2 - 1; l = 25$$

$$25 = 200(1/2)^{n-1}; (1/2)^3 = (1/2)^{n-1}; n-1=3; n=4$$

6.  $r=-2, l=-320, S_n=-210$ , hallar  $a$  y  $n$

$$-320 = a(-2)^{n-1}$$

$$-210 = -320(-2) - a/-2 - 1; a = 10$$

$$-320 = 10(-2)^{n-1}; (-2)^5 = (-2)^{n-1}; 5 = n-1; n=6$$

7.  $a=5, n=3, S_3=105$ , hallar  $r$  y  $l$

$$l = 5(r)^{3-1}; l = 5r^2 \text{ (A)}$$

$$105 = l(r-5)/(r-1) \text{ (B) resolviendo el sistema (A) y (B) se obtiene } r^3 - 21r + 20 = 0$$

$$\text{Factorando } r^3 - r - 20r + 20 = 0; r(r^2-1) - 20(r-1) = 0; (r-1)(r^2+r-20) = 0; (r-1)(r+5)(r-4) = 0$$

$$r=1 \text{ No satisface } S_n$$

$$\text{Con } r=4; l=80$$

$$\text{Con } r=-5; l=125$$

8.  $a=540, l=20, S_n=800$ , hallar  $r$  y  $n$

$$20 = 540(1/3)^{n-1}; (1/3)^3 = (1/3)^{n-1}; 3 = n-1; n=4$$

$$20 = 540r^{n-1}; 800 = 20r - 540/r - 1; r = 1/3$$

9.  $l=4, n=3, S_3=28$ , hallar  $r$  y  $a$

$$4 = ar^{3-1}; 4 = ar^2 \text{ (A)}$$

$$28 = 4r - a/r - 1 \text{ (B)}$$

$$\text{resolviendo el sistema (A) y (B) se llega a: } 6r^3 - 7r^2 + 1 = 0$$

$$\text{Factorando } 6r^3 - 6r^3 - r^3 + 1 = 0; (r-1)(2r-1)(3r+1) = 0$$

$$\text{Con } r=1 \text{ No Satisface}$$

$$\text{Con } r=1/2, a=16$$

$$\text{Con } r=-1/3, a=36$$

10.  $r=-3; n=7, S_7=1094$ , hallar  $a$  y  $l$

$$S_n = ar^n - a/r - 1; 1094 = a(-3)^7 - a/-3 - 1; a = 2$$

$$l = ar^{n-1}; l = 2(-3)^6; l = 1458$$

## II. Responder a los siguientes problemas:

1. El 5º término de una progresión geométrica es 9 y el término 11º es 6561. Hallar el 2º término y la suma de los seis primeros términos.

$$u_5 = 9; u_5: n=5, l=9, r=? a=? \Rightarrow 9 = ar^4 \text{ (a)}$$

$$u_{11} = 6561; u_{11}: n=11, l=6561, r=?, a=? \Rightarrow 6561 = ar^{10} \text{ (b)}$$

resolviendo el sistema por igualación en a:  $r^6 = 729; r^6 = 3^6; r = \pm 3$

Con  $r=3; a=1/9 \Rightarrow$  el 2º término es  $ar = 1/9(3); ar = 1/3$

y la suma  $S_6 = ar^n - a/r - 1; S_6 = 1/9(3)^6 - 1/9/3 - 1; S_6 = 364/9$

Como el nº de términos es par para la suma; existe una sola respuesta y se descarta  $r=-3$ .

2. Hallar la suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica cuyo quinto término es  $1/2$  y cuyo último término es 4.

$$S_8 = ?; u_5 = 1/2; l=4, n=8 \Rightarrow u_5: n=5, l=1/2; a=?, r=?$$

$$u_n: l=4, n=8, a=?, r=?$$

$$l = ar^{n-1}; 1/2 = ar^4, a = 1/2 r^4 \text{ (a)} \text{ y } 4 = ar^7; a = 4/r^7 \text{ (b)}$$

por igualación (a) = (b)  $\frac{1}{2r^4} = \frac{4}{r^7}; r^3 = 2^3; r = 2 \Rightarrow a = 1/32$

$$S_8 = lr - a/r - 1; S_8 = 4 \cdot 2 - 1/32/2 - 1; S_8 = 255/32$$

3. El tercer término de una progresión geométrica es 10 y el sexto término es 0,01. Hallar la suma de los nueve primeros términos.

$$u_3: l=10, n=3, a=?, r=?; 10 = ar^2, a = 10/r^2$$

$$u_6: l=0,01, n=6, a=?, r=?; 0,01 = ar^5; a = 0,01/r^5$$

$$10/r^2 = 0,01/r^5; r^3 = 10^{-3}; (r)^3 = (10^{-1})^3; r = 10^{-1}; r = 0,1 \Rightarrow a = 1000$$

$$S_9 = ar^n - a/r - 1; S_9 = 1000(0,1)^9 - 1000/0,1 - 1; S_9 = 1111,11111$$

4. En una progresión geométrica el primer término es  $3/4$ , el último es  $2/9$  y la suma de los términos vale  $65/36$ . ¿De cuántos términos se compone la progresión?

$$a = 3/4, l = 2/9, n = ?, S_n = 65/36 \quad | \quad 2/9 = 3/4 r^{n-1}; (2/3)^3 = r^{n-1}; 8/27 r = r^n$$

$$\frac{65}{36} = \frac{3/4 r^n - 3/4}{r - 1}; 27r^n - 65r + 38 = 0; 27(8/27r) - 65r + 38 = 0; r = 2/3$$

$$(2/3)^3 = (2/3)^{n-1}; 3 = n-1; n = 4$$

5. Un padre proyecta depositar en el banco 1\$ el día que su hijo cumple un año y duplicar la cantidad en cada uno de los cumpleaños de su hijo. ¿Cuánto tendría que depositar al cumplir su hijo 20 años? \* Corregir la coma decimal en la respuesta del texto.

$$a = 1, r = 2, n = 20, l_{20} = ?; l = ar^{n-1}; l_{20} = 1(2)^{20-1}; l_{20} = 524288 \$$$

6. Una máquina costó 60000 \$. Se calcula que, al final de cada año sufre una depreciación igual al 10% del valor que tiene al principio de ese año. ¿Cuál será su valor al cabo de 5 años?

El 10% de 60000 es 6000; Final del 1º año =  $60000 - 6000 = 54000$

El 10% de 54000 es 5400; Final del 2º año =  $54000 - 5400 = 48600$

$$a = 54000, r = 48600/54000; r = 0.9, n = 5$$

$$l = ar^{n-1}, l = 54000(0.9)^4, l = 35429.40 \$$$

7. Una pelota de golf es arrojada desde una altura de 15 m. En cada rebote llega a los  $2/3$  de la última altura alcanzada. ¿Cuál será la distancia total recorrida por la pelota cuando toca el suelo por sexta vez? la progresión es  $15 + 30(2/3) + 30(2/3)^2 + \dots$  la primera altura que es 15 m no forma parte de la progresión geométrica.

Esdécir el primer rebote es  $2/3(15) = 10$  y no sería  $n=6$  para el cálculo.

$$a = 10; r = 2/3; n = 5; S_5 = ? \quad S_5 = \frac{ar^n - a}{r - 1}; S_5 = \frac{10(2/3)^5 - 10}{2/3 - 1}; S_5 = 26.049$$

Como los rebotes son ida y regreso  $\Rightarrow$  la suma de los 5 rebotes sería

$$S = 2(26.049), S = 52.098$$

Como se pide la distancia total cuando toca por sexta vez la 1ª locada es 15 m

$$S = 52.098 + 15; S = 67.098; S = 67.1 \text{ m}$$

8. El número de bacterias en un cultivo está aumentando un 20% cada hora. Si al principio había 400000 bacterias en el cultivo, ¿cuántas habrá al cabo de 4 horas?

Al final de la 1ª hora será el 120% = 1.2

$$a = 400000; r = 1.2; n = 5; l = 400000(1.2)^4; l = 829440 \text{ bacterias.}$$

9. La población de una ciudad aumenta en 40% cada 10 años. Si su población en 1920 era de 50000 habitantes, ¿cuál será su población en 1970?

1970-1920 = 50 años; cada 10 años aumenta  $\Rightarrow$  se trata del 6º término puesto que  $(100+40)\% = 1.4$

$$l = 50000(1.4)^5; l = 268912 \text{ habitantes}$$

10. El valor de una mercadería se desprecia 3% cada año. Su precio original fue de 20000 \$ ¿cuánto valdrá al cabo de 5 años?

$(100-3)\% = 0.97 \Rightarrow$  se trata del 6º término

$$l = 20000(0.97)^5; l = 17174.68 \$$$

11. De un recipiente que contiene 10 litros de alcohol se saca un litro del alcohol y se reemplaza con agua. Después se saca un litro de la mezcla y se reemplaza con agua, efectuándose la operación 7 veces en total. ¿Qué cantidad de alcohol queda entonces en el recipiente?

$a = 10$ , al extraer un litro quedan  $10 - 1 = 9$ , se trata del 8º término

$$r = 9/10, r = 0.9; l_8 = ? \quad l_8 = 10(0.9)^7; l_8 = 4.783 \text{ o litros de alcohol.}$$

12. Se refiere que Sirham, príncipe de la India, invitó a Sissa, inventor del ajedrez, a pedir la remuneración que fuese de su agrado, y el inventor respondió: «Pido a Vuestra Majestad que se digne darme un grano de trigo por la primera casilla del tablero, 2 granos por la segunda, 4 granos por la tercera, y así sucesivamente, siempre duplicando el número de granos hasta la 64ª casilla». Sorprendido por la modestia del inventor ordenó Sirham que se le pagase inmediatamente, pero pronto descubrieron sus ministros que no bastaban los graneros reales, milos de toda la India, para satisfacer la demandado por Sissa. Suponiendo que haya aproximadamente 20000 granos en un Kilo de trigo. ¿Cuántas toneladas de trigo había pedido el inventor del ajedrez? (Dar la respuesta en notación científica).

$$a = 1, n = 64, S_n = ?, r = 2 : S = a \frac{r^n - 1}{r - 1}; S = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1}; S = 1.845 \cdot 10^{19} \text{ granos}$$

$$1 \text{ Kilo tendrá } 1.845 \cdot 10^{19} / 20000 = 9.223 \cdot 10^{14}$$

$$\text{En toneladas será } 9.223 \cdot 10^{14} / 1000 = 9.223 \cdot 10^{11} \text{ Ton}$$

13. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 21 y que el mayor excede en 3 unidades a la suma de los otros dos.

$$a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2, n = 3, S_3 = 21$$

$$a_3 = (a_1 + a_2) + 3, ar^2 = a + ar + 3 \Rightarrow a = 3 / (r^2 - r - 1), S = a \frac{r^3 - 1}{r - 1}$$

$$21 = a(r^2 + r + 1); 21 = 3(r^2 + r + 1) / (r^2 - r - 1); 3r^2 - 4r - 4 = 0; (r - 2)(3r + 2) = 0$$

$$\text{Con } r = 2; a = 3 / (4 - 2 - 1); a = 3, \text{ la progresión será: } 3, 6, 12$$

$$\text{Con } r = -2/3; a = 3 / (4/9 + 2/3 - 1); a = 27 \Rightarrow 27, -18, 12 \text{ progresión que no satisface la condición del problema}$$

14. Una máquina neumática extrae en cada golpe  $1/3$  del aire que contiene un depósito. ¿Qué parte del aire se habrá extraído después de 8 golpes de la máquina?

El dato que nos hace falta es la capacidad del depósito

$$a = 1/3 \quad S = n/2 [2a + (n-1)d]$$

$$d = 1/3 \quad S = 8/2 [2(1/3) + (8-1)1/3]$$

$$n = 8 \quad S = 12$$

$$S = ? \quad \text{Sea } x \text{ el contenido} \rightarrow \text{se sacará } x - 12 \text{ de aire}$$

15. La suma de tres números en progresión geométrica es 130. Si se suma 20 al término medio y los extremos no se alteran resulta una progresión aritmética. Hallar la progresión geométrica.

$$P.G.: a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2; S = a \frac{r^3 - 1}{r - 1}; 130 = a(r^2 + r + 1) \quad (a)$$

$$P.A.: a_1 = a, a_2 = a + 20 \text{ pero } ar + 20 \text{ es el } 2^{\text{o}}; a_3 = ar + 20, a_4 = ar^2$$

$$\text{Ahora la suma será } 150: S = n/2(a + l); 150 = 3/2(a + ar^2) \quad (b)$$

Resolviendo el sistema (a) y (b) se obtiene

$$3r^2 - 10r + 3 = 0; (r - 3)(3r - 1) = 0.$$

$$\text{Con } r = 3, a = 10 \Rightarrow P.G.: 10, 30, 90$$

$$\text{Con } r = 1/3, a = 90 \Rightarrow 90, 30, 10$$

### Ejercicio 169

I Hallar la suma de las series siguientes:

$$1. 1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots \quad S = \frac{a}{1 - r}; S = \frac{1}{1 - 1/3}; S = \frac{3}{2}$$

$$2. 4 + 1 + 1/4 + 1/16 + \dots \quad \text{La serie geométrica comienza en el } 3^{\text{o}} \text{ término} \Rightarrow \text{la suma total será: } S = 5 + 1/4 / 1 - 1/4; S = 16/3$$

$$3. 3/4, -1/4 + 1/12 - 1/36 + \dots \quad S = \frac{3/4}{1 + 1/3}; S = 9/16$$

$$4. 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + \dots \quad S = 1 / 1 + 1/2; S = 2/3$$

$$5. 1 + 2/5 + 4/25 + 8/125 + \dots \quad S = 1 / 1 - 2/5; S = 5/3$$

$$6. 0.1 - 0.01 + 0.001 - 0.0001 + \dots \quad S = 0.1 / 1 + 0.1; S = 0.1 / 1.1; S = 1/11$$

$$7. 16 + 12 + 9 + (27/4) + \dots \quad S = 16 / 1 - 3/4; S = 64$$

$$8. 3 + \sqrt{3} + 1 + 1/\sqrt{3} + \dots \quad S = 3 / 1 - \sqrt{3}/3; S = 3/2 (3 + \sqrt{3})$$

$$9. 4 - 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \dots \quad S = 4 / 1 + \sqrt{2}/2; S = 4(2 - \sqrt{2})$$

$$10. 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1) \quad S = 1 / 1 - x; a = 1, r = x$$

II Hallar las Fracciones ordinarias equivalentes a las Fracciones decimales periódicas siguientes:

$$1. 0.\overline{6} \quad 0.\overline{6} = 6/10 + 6/100 + 6/1000 + \dots$$



$$q = 6/10, r = 1/10, S = 6/10 / (1 - 1/10) ; S = 6/9, S = 2/3$$

$$2. \quad 1.\overline{27} : \quad 1.\overline{27} = 1 + 27/100 + 27/10000 + \dots$$

La serie geométrica comienza en el 2º término  $\Rightarrow$  la suma total es:

$$a = 27/100 ; r = 1/100 ; S = 1 + 27/100 / (1 - 1/100) ; S = 14/11$$

$$3. \quad 0.\overline{64} \quad 0.\overline{64} = 6/10 + 4/100 + 4/1000 + 4/10000 + \dots$$

$$a = 4/100 ; r = 1/10 \quad S = \frac{6}{10} + \frac{4/100}{1 - 1/10} ; S = \frac{29}{45}$$

$$4. \quad 2.\overline{83} \quad 2.\overline{83} = 2 + 8/10 + 3/100 + 3/1000 + \dots$$

$$S = 2 + \frac{8}{10} + \frac{3/100}{1 - 1/10} ; S = 17/6$$

$$5. \quad 1.\overline{423} \quad 1.\overline{423} = 1 + 423/1000 + 423/1000000 + \dots$$

$$S = 1 + \frac{423/1000}{1 - 1/1000} ; S = \frac{158}{111}$$

$$6. \quad 0.\overline{2418} \quad 0.\overline{2418} = 2/10 + 4/100 + 18/10000 + 18/1000000 + \dots$$

$$S = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{18/10000}{1 - 1/10000} ; S = \frac{733}{550}$$

III Se da un triángulo equilátero de lado  $a$ . Uniendo los puntos medios de sus lados se forma otro triángulo equilátero. Repitiendo la operación en este último se obtiene un nuevo triángulo equilátero, y así indefinidamente. Hallar el límite de la suma de las áreas de estos triángulos.

El área del 1º triángulo es:  $A_1 = bh/2$ ;  $A_1 = ah/2$ ;  $h = \sqrt{a^2 - a^2/4}$

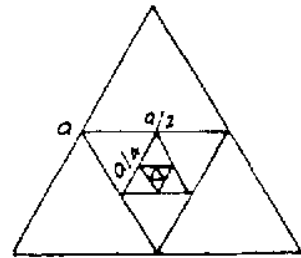
$$A_1 = a^2 \sqrt{3}/4$$

Del 2º  $\Delta$  es:  $A_2 = a/2 \cdot h_1/2$ ;  $h_1 = \sqrt{a^2/4 - a^2/16}$ ;  $A_2 = a^2 \sqrt{3}/16$

Siguiendo con el procedimiento se obtiene  $A_3 = a^2 \sqrt{3}/64$

$$a^2 \sqrt{3}/4 + a^2 \sqrt{3}/16 + a^2 \sqrt{3}/64 + \dots$$

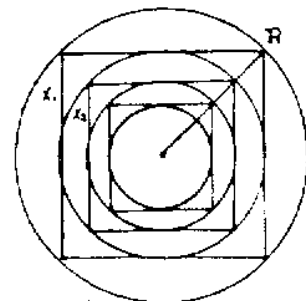
$$r = 1/4 ; S = a^2 \sqrt{3}/4 / (1 - 1/4) ; S = a^2 \sqrt{3}/3$$



IV En una circunferencia de radio  $R$  se inscribe un cuadrado, en el cuadrado se inscribe una circunferencia en ésta otra cuadrado y se prosigue así indefinidamente. Hallar: a) el límite de la suma de las áreas de los cuadrados; b) el límite de la suma de las áreas de los círculos.

a.- El área del 1º cuadrado es:  $A_1 = X^2$

La diagonal del cuadrado es el diámetro del círculo  $= 2R =$  hipotenusa del  $\Delta$



$$(\text{Hipotenusa})^2 = 2X_1^2; (2R)^2 = 2X_1^2; X_1^2 = 2R^2; A_1 = 2R^2$$

El área del 2º cuadrado: su lado es  $X_2$ ;  $A_2 = X_2^2$

La hipotenusa es el diámetro del 2º círculo que es 2 veces la línea cortada:  $X_1 = R\sqrt{2}$

$$(\text{Hip})^2 = 2X_2^2; (R\sqrt{2})^2 = 2X_2^2 \Rightarrow X_2^2 = R^2; A_2 = R^2$$

$$\text{La suma será: } 2R^2 + R^2 + R^2/2 + \dots \quad S = 2R^2/1 - 1/2; S = 4R^2$$

b. El área del 1º círculo es  $A_1 = \pi R^2$

el área del 2º círculo es  $A_2 = \pi R_2^2$  pero  $R_2 = X_1/2 = R\sqrt{2}/2$ ;  $A_2 = \pi R^2/2$

$$\text{La suma será: } \pi R^2 + \pi R^2/2 + \pi R^2/4 + \dots \quad S = \pi R^2/1 - 1/2; S = 2\pi R^2$$

V Una pelota de golf cae desde una altura de 15m y en cada rebote llega a los  $2/3$  de la última altura alcanzada. Suponiendo que la pelota continúe rebotando indefinidamente de la misma manera, ¿cuál será el límite de la suma de las distancias recorridas?

Al tocar el suelo por 1ª vez ha recorrido 15m; en el 1º rebote llega a una altura de  $2/3(15)$  y la distancia total recorrida en ese rebote hasta que toca de nuevo el suelo es  $2(2/3)15 = 30(2/3)$ . En el 2º rebote llega una altura de  $2/3(15)2/3 = 15(2/3)^2$  y la distancia que recorre hasta que toca de nuevo el suelo es dos veces ésta o sea  $30(2/3)^2$ .

$$S = 15 + 30(2/3) + 30(2/3)^2 + 30(2/3)^3 + \dots$$

$$\text{A partir del 1º término es una progresión geométrica: } S = 15 + \frac{30(2/3)}{1 - 2/3}; S = 75 \text{ m}$$

VI En la famosa parábola de Aquiles y la tortuga, Aquiles, en el primer minuto, reduce a la mitad la distancia que originalmente lo separa de la tortuga; en el próximo medio minuto reduce a la mitad la distancia que ahora lo separa de la tortuga; en el próximo cuarto de minuto reduce la distancia restante a la mitad, y así sucesivamente, calcúlese el tiempo máximo que tardará Aquiles en alcanzar la tortuga.

$$\begin{array}{c} \text{Aquiles} \quad \quad \quad X \quad \quad \quad \text{Tortuga} \\ \quad \quad \quad X/2 \quad \quad X/4 \quad \quad X/8 \end{array} \quad \begin{array}{l} t_1 = 1 \text{ min} \quad t_2 = 1/2 \text{ min} \\ t_3 = 1/4 \text{ min} \end{array}$$

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + \dots \quad S = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots \quad a_1 = X/2, a_2 = X/4, a_3 = X/8; r = 1/2$$

$$S = 1 + 1/2/1 - 1/2; S = 2 \text{ min}$$

## Ejercicio 170

I Hallar el:

1. 5º término de la progresión armónica  $1/3, 1/7, 1/11, \dots$

La progresión aritmética correspondiente es  $3, 7, 11, \dots$

$$a = 3, d = 4, n = 5; l = a + (n-1)d, l = 3 + (5-1)4, l = 19$$

Por tanto el 5º término de la progresión armónica es  $1/19$

2. 8º término de la progresión armónica  $1/2, 1/4, 1/6, \dots$   
 $a=2, d=2, n=8 \quad l = 2 + (8-1)2; l_8 = 1/16$
3. 9º término de la progresión armónica  $12, 8, 6, \dots$   
 progresión aritmética es:  $1/12, 1/8, 1/6, \dots$   
 $a=1/12; d=1/24; n=9 \quad l = 1/12 + (9-1)(1/24); l = 5/12; l_9 = 12/5; l_9 = 2,4$
4. 7º término de la progresión armónica  $0,6, 0,4, 0,3, \dots$  en forma de fracción  $6/10, 4/10, 3/10, \dots$   
 ó  $3/5, 2/5, 1/5, \dots$  progresión aritmética es:  $5/3, 5/2, 10/3, \dots$   
 $a=5/3; d=5/6; n=7 \quad l = 5/3 + (7-1)5/6; l = 20/3; l_7 = 3/20; l_7 = 0,15$
5. término  $n$ -ésimo de la progresión armónica  $1, 1/3, 1/5, \dots$  y calcular el término 11º.  
 la progresión armónica correspondiente es:  $1, 3, 5, \dots$   
 $a=1, d=2, n=n \quad l = a + (n-1)d; l = 1 + (n-1)2; l = 2n-1; l_n = 1/2n-1; \text{ si } n=11; l_{11} = 1/21$

III Hallar la media armónica entre los siguientes pares de números:  $H = 2ab/a+b$

1. 2 y 6  $H = 2(2)(6)/2+6; H = 3$
2.  $1/2$  y  $1/6$   $H = \frac{2(1/2)(1/6)}{1/2 + 1/6}; H = 1/4$
3.  $-1/2$  y  $1/3$   $H = \frac{2(-1/2)(1/3)}{-1/2 + 1/3}; H = 2$
4. 12 y 6  $H = \frac{2(12)(6)}{12+6}; H = 8$
5. 10 y 30  $H = 2(10)(30)/10+30; H = 15$
6.  $-1$  y  $1/6$   $H = 2(-1)(1/6)/-1+1/6; H = 1/5$

### III Interpolación:

1. Cinco medios armónicos entre  $1/2$  y  $1/8$

Se interpolan 1º cinco medios aritméticos así:  $a=2; b=8; n=7; l=8$

$8 = 2 + (7-1)d; d=1$  y la progresión aritmética es:  $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

la progresión armónica es:  $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8$

2. Tres medios armónicos entre 12 y 60  $a=1/12; d=?; n=5; l=1/60$   
 $1/60 = 1/12 + 4d; d=-1/60$  progresión aritmética:  $1/12, 1/15, 1/20, 1/30, 1/60$   
 progresión armónica:  $12, 15, 20, 30, 60$

3. Cuatro medios armónicos entre 20 y 30  $a = 1/20$ ;  $d = 7$ ;  $n = 6$ ;  $f = 1/30$   
 $1/30 = 1/20 + 5d$ ;  $d = -1/300$ ; prog. arit:  $1/20, 7/150, 13/300, 1/25, 11/300, 1/30$   
 progresión armónica:  $20, 150/7, 300/13, 25, 300/11, 30$

- IV Demostrar que es imposible interpolar 4 medios armónicos entre  $-1/10$  y  $1/15$   
 $n = 6$ ;  $a = -10$ ;  $d = 7$ ;  $f = 15$   $15 = -10 + 5d$ ;  $d = 5$   
 progresión aritmética:  $-10, -5, 0, 5, 10, 15$   
 progresión armónica:  $-1/10, -1/5, 1/0, 1/5, 1/10, 1/15$  : Por la expresión  $1/0$  que no está definida la división para el cero es imposible interpolar los 4 medios armónicos.

- V Hallar una progresión armónica cuya 3<sup>er</sup> término es  $1/3$  y cuyo 6<sup>er</sup> término es  $1/9$ .  
 progresión aritmética: 3<sup>er</sup> término = 3;  $n = 3$   
 6<sup>er</sup> término = 9;  $n = 6$   
 $f_3 = a + (n-1)d$ ;  $f_3 = a + 2d$ ;  $3 = a + 2d$  ①  $f_6 = a + 5d$ ;  $9 = a + 5d$  ② resolviendo 1 y 2  $\Rightarrow a = -10$ ;  $d = 2$   
 prog. arit:  $-1, 1, 3, 5, 7, 9$   
 prog. armónica:  $-1, 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9$

- VI Hallar dos números cuya media aritmética es 16 y cuya media armónica es 12.  
 media aritmética =  $a+b/2$ ;  $16 = a+b/2$  ①  
 media armónica =  $2ab/a+b$ ;  $12 = 2ab/a+b$  ② resolviendo 1 y 2 se llega a  
 $b^2 - 32b + 192 = 0$ ;  $(b-24)(b-8)$  : Con  $b=24$ ;  $a=8$   
 Con  $b=8$ ;  $a=24$

- VII Demostrar que si tres números están en progresión armónica y se resta de cada uno de ellos la mitad del término medio, resulta una progresión geométrica.  
 progresión armónica  $12, 8, 6$   $a_1 = 12 - 4 = 8$ ;  $a_2 = 8 - 4 = 4$ ;  $a_3 = 6 - 4 = 2$   
 progresión geométrica  $8, 4, 2$

- VIII Demostrar que si  $a, b, c$  es una progresión armónica, se tiene:  $a/c = a-b/b-c$   
 progresión aritmética:  $1/a, 1/b, 1/c$   
 cuya diferencia es:  $d = 1/c - 1/b$  ① ó  $d = 1/b - 1/a$  ②  
 $① = ②$   $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ ;  $\frac{b-c}{bc} = \frac{a-b}{ab}$   
 $\frac{ab}{bc} = \frac{a-b}{b-c} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$

- IX Demostrar que si  $a+b, b+c, c+a$  es una progresión armónica, entonces  $b^2, a^2, c^2$  es una progresión geométrica.

$$\text{Sea: } \left. \begin{array}{l} a+b=1/3 \\ b+c=1/6 \\ c+a=1/9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Prog} \\ \text{armónica} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a=5/36 \\ b=7/36 \\ c=-1/36 \end{array}$$

$b^2, a^2, c^2$  será progr. aritmética  $\frac{49}{1296}, \frac{25}{1296}, \frac{1}{1296}$  si es prog. aritmética

### Ejercicio 171

Calcular las sumas siguientes aplicando el procedimiento general estudiado en el apartado anterior.

1.  $(2/1 \cdot 3) + (2/3 \cdot 5) + \dots + 2/(2n-1)(2n+1)$

$$u_n = 2/(2n-1)(2n+1) \quad S_n = f(n+1) - f(1) \text{ ecuación} \quad u_n = f(n+1) - f(n)$$

$$\text{descomponiendo } u_n: \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{(2n-1)} + \frac{B}{(2n+1)} \quad ; \quad = \frac{-1}{2n+1} - \frac{-1}{2n-1}$$

$$f(n) = -1/2n-1 \quad ; \quad f(1) = -1 \quad ; \quad f(n+1) = -1/2(n+1)-1 \quad ; \quad f(n+1) = -1/2n+1$$

$$S_n = f(n+1) - f(1) \quad ; \quad S_n = -1/2n+1 + 1 \quad ; \quad S_n = 2n/2n+1$$

2.  $(1/1 \cdot 4) + (1/4 \cdot 7) + \dots + 1/(3n-2)(3n+1)$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{(3n-2)} + \frac{B}{3n+1} \quad ; \quad = \frac{3n(A+B)+A-2B}{(3n-2)(3n+1)} \quad \text{resolviendo } A+B=0 \quad A=1/3$$

$$A-2B=1 \quad B=-1/3$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)} \quad ; \quad u_n = \frac{1}{3(3n+1)} - \frac{1}{3(3n-2)}$$

$$f(n) = -1/3(3n-2) \quad ; \quad f(1) = -1/3$$

$$f(n+1) = -1/3[3(n+1)-2] \quad ; \quad f(n+1) = -1/3(3n+1)$$

$$S_n = f(n+1) - f(1) \quad ; \quad S_n = \frac{-1}{3(3n+1)} + \frac{1}{3} \quad ; \quad S_n = \frac{2n}{3n+1}$$

3.  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$

$$\text{Sea } f(n) = a(2n-1)^3 + b(2n-1)^2 + c(2n-1) + d \quad ; \quad f(n+1) = a(2n+1)^3 + b(2n+1)^2 + c(2n+1) + d$$

$$u_n = f(n+1) - f(n) \quad ; \quad u_n = a[(2n+1)^3 - (2n-1)^3] + b[(2n+1)^2 - (2n-1)^2] + 2c$$

$$u_n = 24an^2 + 8bn + 2(a+c)$$

$$u_n = u_n \quad ; \quad 24an^2 + 8bn + 2(a+c) = (2n-1)^2 \quad ; \quad 24an^2 + 8bn + 2(a+c) = 4n^2 - 4n + 1$$

$$24a=4 \quad ; \quad a=1/6 \quad \quad 8b=-4 \quad ; \quad b=-1/2 \quad \quad 2(a+c)=1 \quad ; \quad c=1/3$$

$$f(n) = 1/6(2n-1)^3 - 1/2(2n-1)^2 + 1/3(2n-1) + d \quad ; \quad f(1) = d$$

$$f(n+1) = 1/6(2n+1)^3 - 1/2(2n+1)^2 + 1/3(2n+1) + d$$

$$S_n = f(n+1) - f(1) \quad ; \quad S_n = 1/6(2n+1)^3 - 1/2(2n+1)^2 + 1/3(2n+1) + d - d \quad ; \quad S_n = 1/6(2n+1)[(2n+1)^2 - 3(2n+1) + 2]$$

$$S_n = 1/6 (2n+1)(2n-1)(2n) ; S_n = n(4n^2-1)/3$$

4.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

Sea  $F(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$  ;  $F(n+1) = a(n+1)^4 + b(n+1)^3 + c(n+1)^2 + d(n+1) + e$

$$u_n = F(n+1) - F(n) ; u_n = a[(n+1)^4 - n^4] + b[(n+1)^3 - n^3] + c[(n+1)^2 - n^2] + d[(n+1) - n] + e - e$$

$$u_n = 4an^3 + (6a+3b)n^2 + (4a+3b+2c)n + (a+b+c+d)$$

pero  $u_n = n^3$  ;  $4a=1, a=1/4$  ;  $6a+3b=0, b=-1/2$  ;  $4a+3b+2c=0, c=1/4$  ;  $a+b+c+d=0, d=0$

$$F(n) = 1/4 n^4 - 1/2 n^3 + 1/4 n^2 + e ; F(1) = e$$

$$F(n+1) = 1/4 (n+1)^4 - 1/2 (n+1)^3 + 1/4 (n+1)^2 + e$$

$$S_n = F(n+1) - F(n) ; S_n = 1/4 (n+1)^4 - 1/2 (n+1)^3 + 1/4 (n+1)^2 + e - e$$

$$S_n = 1/4 (n+1)^2 [(n+1)^2 - 2(n+1) + 1] ; S_n = 1/4 (n+1)^2 (n+1-1)^2$$

$$S_n = n^2(n+1)^2/4$$

5.  $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a+(n-1)d]$

Si  $[a+(n-1)d] = u_n$

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (u_n - 2d) + (u_n - d) + u_n \quad \text{invertiendo}$$

$$S = u_n + (u_n - d) + (u_n - 2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$$

Sumando

$$2S = (a+u_n) + (a+u_n) + (a+u_n) + \dots + (a+u_n) + (a+u_n) + (a+u_n)$$

$$2S = n(a+u_n)$$

$$S = \frac{n}{2} (a+u_n) \rightarrow S = \frac{n}{2} [a+(n-1)d]$$

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a+(n-1)d] = \frac{n}{2} [a+(n-1)d]$$

### Ejercicio 172 (Repaso)

1. Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones cuyos términos son los siguientes.

a.  $u_n = 3n-1$  ;  $n=1, u_1=2$  ;  $n_2, u_2=5$  ;  $n_3, u_3=8$  ;  $n_4, u_4=11$  es: 2, 5, 8, 11, ...

b.  $u_n = n^2 \cdot n$  ;  $n_1=1, u_1=0$  ;  $n_2, u_2=2$  ;  $n_3, u_3=6$  ;  $n_4, u_4=12$  es: 0, 2, 6, 12, ...

c.  $u_n = 5(-2)^{n-1}$  ;  $n=1, u_1=5$  ;  $n_2, u_2=-10$  ;  $n_3, u_3=20$  es: 5, -10, 20, -40, ...

d.  $u_n = 9(1/3)^n$  ;  $n=1, u_1=3$  ;  $n_2, u_2=1$  ;  $n_3, u_3=1/3$  ;  $n_4, u_4=1/9$  es: 3, 1, 1/3, 1/9, ...

2. Clasificar las progresiones siguientes:

a.- 7, 10, 13, ...  $d = 13 - 10 = 3$ ;  $d = 10 - 7 = 3$ ; es una progresión aritmética

b.- 9, 18, 36, ...  $d = 36 - 18 = 18$ ;  $d = 18 - 9 = 9$ ; No es aritmética

$r = 36/18 = 2$ ;  $r = 18/9 = 2$ ; es geométrica

c.- -2, -4, -8, ...  $d = -8 - 4 = -4$ ;  $d = -4 - 2 = -2$  No es aritmética

$r = -8/-4 = 2$ ;  $r = -4/-2 = 2$  es geométrica

d.- -2, -4, -6, ...  $d = -6 - 4 = -2$ ;  $d = -4 - 2 = -2$  es aritmética

e.-  $3/2, 1/2, 1/6, \dots$   $d = 1/6 - 1/2 = -1/3$ ;  $d = 1/2 - 3/2 = -1$  No es aritmética

$r = 1/6 / 1/2 = 1/3$ ;  $r = 1/2 / 3/2 = 1/3$  es geométrica

f.- 10, 16, 40, ...  $d = 40 - 16 = 24$ ;  $d = 16 - 10 = 6$  no es aritmética

$r = 40/16 = 5/2$ ;  $r = 16/10 = 8/5$  no es geométrica

$d = 1/40 - 1/16 = -3/80$ ;  $d = 1/16 - 1/10 = -3/80$  es armónica

3. Hallar el:

a.- 7º término de 3, 9, 15, ...  $f_7 = 3 + (7-1)6$ ;  $f_7 = 39$  prog. arit

b.- 10º término de -6, -2, 2, ...  $f_{10} = -6 + (10-1)4$ ;  $f_{10} = 30$

c.- 8º término de 75, 70, 65, ...  $f_8 = 75 + (8-1)(-5)$ ;  $f_8 = 40$

d.- 12º término de  $1/3, 2/3, 1, \dots$   $f_{12} = 1/3 + (12-1)1/3$ ;  $f_{12} = 4$

4. Una progresión aritmética se compone de 19 términos. Su diferencia es  $2/3$  y el último término vale 20. ¿Cuánto vale el primero?

$$f_n = a + (n-1)d; \quad 20 = a + (19-1)(2/3); \quad a = 8$$

5. Hallar el número de términos de una progresión aritmética sabiendo que comienza por 20 y termina por -12, y que su diferencia es -4.

$$-12 = 20 + (n-1)(-4); \quad n = 9$$

6. En una progresión aritmética el primer término es 8, el último es 50 y el número de términos es 13. ¿Cuál es su diferencia?

$$50 = 8 + (13-1)d; \quad d = 3,5$$

7. El cuarto término de una progresión aritmética es 13 y el séptimo término es 25. ¿Cuál es la progresión?

$$u_n: n=4; f_4=13; a=?; d=? \quad 13 = a + (4-1)d; \quad 13 = a + 3d \quad \textcircled{1}$$

$$u_n: n=7; f_7=25; a=?; d=? \quad 25 = a + (7-1)d; \quad 25 = a + 6d \quad \textcircled{2}$$

Resolviendo el sistema  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$  se obtiene  $a=1$ ;  $d=4$

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$$

8. El tercer término de una progresión aritmética es -6 y el quinto término es -10.  
¿Cuál es la progresión?

$$-6 = a + (3-1)d; \quad -6 = a + 2d$$

$$-10 = a + (5-1)d; \quad 10 = -a - 4d$$

$$A = -2d; \quad d = -1 \text{ y } a = -2 \Rightarrow \quad -2, -4, -6, -8, -10$$

9. En cada una de las progresiones siguientes hallar  $S_n$  para el valor de  $n$  que se indica.

a.  $2, 4, 6, \dots$  ( $n=100$ )  $S_n = n/2 [2a + (n-1)d]; S_{100} = 100/2 [2(2) + (100-1)2]; S_{100} = 10100$

b.  $4.5, 7, 9.5, \dots$  ( $n=10$ )  $S_n = 10/2 [2(4.5) + (10-1)2.5]; S_{10} = 157.5$

c.  $15, 12, 9, \dots$  ( $n=11$ )  $S_n = 11/2 [2(15) + (11-1)(-3)]; S_{11} = 0$

d.  $1/5, 4/5, 7/5, \dots$  ( $n=20$ )  $S_n = 20/2 [2(1/5) + (20-1)(3/5)]; S_{20} = 118$

e.  $-20, -30, -40, \dots$  ( $n=6$ )  $S_n = 6/2 [2(-20) + (6-1)(-10)]; S_6 = -270$

10. El término general de una sucesión es  $u_n = 3n + 2$ . Hallar a) la suma de los 8 primeros términos; b) la suma de los  $n$  primeros términos.

a.  $u_n = 3n + 2; u_{(n+1)} = 3(n+1) + 2; u_{(n+1)} = 3n + 5; a = u_1 = 5$

$$d = u_{(n+1)} - u_n; d = 3n + 5 - 3n - 2; d = 3$$

$$S_8 = 8/2 [2(5) + (8-1)(3)]; S_8 = 124$$

b.  $S_n = n/2 [2(5) + (n-1)(3)]; S_n = n/2 (3n + 7)$

11. Hallar el:

a. 8º término de  $2.5, 5, 10, \dots$   $l_8 = 2.5(2)^{8-1}; l_8 = 320$

b. 10º término de  $128, 64, 32, \dots$   $l_{10} = 128(1/2)^{10-1}; l_{10} = 1/4$

c. 6º término de  $5, -15, 45, \dots$   $l_6 = 5(-3)^{6-1}; l_6 = -1215$

d. 5º término de  $6, -3/2, 3/8, \dots$   $l_5 = 6(-1/4)^{5-1}; l_5 = 3/128$

e. 7º término de  $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \dots$   $l_7 = \sqrt{3}(\sqrt{3})^{7-1}; l_7 = 27\sqrt{3}$

12. En una progresión geométrica que se compone de 5 términos la razón vale  $3/2$  y el último término es 405. Hallar el primer término.

$$l = ar^{n-1}; 405 = a(3/2)^{5-1}; a = 80$$

13. El primer término de una progresión geométrica es 20 y el último es 20480. La razón es 4. ¿De cuántos términos se compone la progresión?

$$l = ar^{n-1}; 20480 = 20(4)^{n-1}; 2^{10} = (2)^{2(n-1)}; 10 = 2(n-1); n = 6$$

14. Una progresión geométrica tiene 4 términos de los cuales el primero es 24 y el último 375. Hallar la razón de la progresión.

$$l = ar^{n-1}; 375 = 24r^3; 375/24 = r^3; r^3 = 125/8; r = 5/2$$



15. El segundo término de una progresión geométrica es 36 y el cuarto término es 81. ¿Cuál es la progresión?

$$36 = ar; 81 = ar^3; 81 = 36/r \cdot r^3; r^2 = 81/36; r = \pm 3/2; a = \pm 24$$

Con  $r = 3/2$  la progresión es: 24, 36, 54, 81, ... Con  $r = -3/2$  es: -24, 36, -54, 81, ...

16. En cada una de las progresiones siguientes hallar  $S_n$  para el valor de  $n$  que se indica:

a. 3, 6, 12, ... ( $n=6$ )  $S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}; S_6 = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1}; S_6 = 189$

b.  $1/2, 1/4, 1/8, \dots$  ( $n=7$ )  $S_7 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1/2)^7 - 1}{1/2 - 1}; S_7 = 127/128$

c. 160, 80, 40, ... ( $n=6$ )  $S_n = 160 \cdot \frac{(1/2)^n - 1}{1/2 - 1}; S_6 = 315$  \* Corregir  $n=7$ , es  $n=6$

d. 4, -4/3, 4/9, ... ( $n=6$ )  $S_6 = 4 \cdot \frac{(-1/3)^6 - 1}{-1/3 - 1}; S_6 = 728/243$

e.  $-1/3, 1/6, -1/2, \dots$  ( $n=6$ )  $S_6 = (-1/3) \cdot \frac{(-1/2)^6 - 1}{-1/2 - 1}; S_6 = -7/32$

17. Hallar el 12º término de la progresión armónica  $1/4, 1/7, 1/10, \dots$

La progresión aritmética es: 4, 7, 10, ...  $a=4; d=3; n=12$

$$l = a + (n-1)d; l = 4 + (12-1)3; l = 37; l_{12} = 1/37$$

18. Hallar el 10º término de la progresión armónica 6, 3, 2, ...

$$l = 1/6 + (10-1)(1/6); l = 5/3; l_{10} = 3/5$$

19. Hallar la progresión armónica cuyo segundo término es  $1/5$  y cuyo sexto término es  $1/15$ .

$$l_2 = 5, l_6 = 15 \quad 5 = a + (2-1)d; 5 = a + d \quad \text{resolviendo } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2}$$

$$15 = a + (6-1)d; 15 = a + 5d \quad a = 5/2; d = 5/2$$

progresión aritmética  $5/2, 5, 15/2, 10, 25/2, 15$

progresión armónica:  $2/5, 1/5, 2/15, 1/10, 2/25, 1/15$

20. Hallar las medias aritméticas, geométricas y armónica de los pares de números siguientes:

a.  $4/5$  y 5 media aritmética  $A = \frac{a+b}{2} \quad A = \frac{4/5 + 5}{2}; A = 2.9$

media geométrica  $B = \sqrt{ab} \quad B = \sqrt{4/5 \cdot 5}, B = 2$

media armónica  $H = \frac{2ab}{a+b} \quad H = \frac{2(4/5) \cdot 5}{4/5 + 5}; H = 1.38$

b. 4 y 16  $A = \frac{4+16}{2}, A = 10 \quad B = \sqrt{4 \cdot 16}, B = 8 \quad H = \frac{2(4)(16)}{4+16}, H = 6.4$

c. 8 y 10  $A = \frac{8+10}{2}, A = 9 \quad B = \sqrt{8 \cdot 10}, B = 4\sqrt{5} \quad H = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10}{8+10}, H = 8 \frac{3}{9}$

d. -2 y -8  $A = \frac{-2-8}{2}, A = -5 \quad B = \sqrt{(-2)(-8)}, B = -4 \quad H = \frac{2(-2)(-8)}{-2-8}, H = -3.2$

Cuando los dos son negativos es más adecuado tomar la raíz negativa

## 21. Interpolación:

a.- Cinco medios aritméticos entre 6 y 24

$$n=7, a=6, l=24 \quad 24=6+(7-1)d, d=3 \quad \text{es: } 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

b.- Cuatro medios aritméticos entre 22 y 7

$$a=22, l=7, n=6 \quad 7=22+(6-1)d, d=-3 \quad : 22, 19, 16, 13, 10, 7$$

c.- Dos medios aritméticos entre  $1/4$  y  $5/8$ 

$$5/8 = 1/4 + (4-1)d, d=1/8 \quad : 1/4, 3/8, 1/2, 5/8$$

d.- Tres medios geométricos entre 10 y 160

$$n=5, a=10, l=160; l=ar^{n-1}; 160=10r^{5-1}, r=\pm 2: 10, \pm 20, 40, \pm 80, 160$$

e.- Dos medios geométricos entre 6 y  $2/9$ 

$$2/9 = 6r^{4-1}; r=1/3 \quad : 6, 2, 2/3, 2/9$$

f.- Cuatro medios geométricos entre 40 y -1.25

$$-1.25 = 40r^{6-1}; r=-1/2 \quad : 40, -20, 10, -5, 2.5, -1.25$$

g.- Tres medios armónicos entre 4 y 12. Se deben interpolar 3 medios arit. y luego los armónicos

$$1/12 = 1/4 + (5-1)d, d=-1/24 \quad : 1/4, 5/24, 1/6, 1/8, 1/12 \quad : 4, 4.8, 6, 8, 12$$

h.- Cinco medios armónicos entre 3 y 21

$$1/21 = 1/3 + (7-1)d, d=-1/21 \quad : 1/3, 2/7, 5/21, 4/21, 1/7, 2/21, 1/21 \quad ; 3, 3.5, 4.2, 5.25, 7, 10.5, 21$$

i.- Cuatro medios armónicos entre  $1/2$  y  $1/12$ 

$$12 = 2 + (6-1)d, d=2 \quad : 2, 4, 6, 8, 10, 12 \quad ; 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12$$

## 22. En los siguientes problemas se dan tres de los cinco elementos de una progresión aritmética. Hallar los dos elementos restantes:

a.-  $d=4, n=8, S_8=152$   $S_n = n/2 [2a + (n-1)d]$   $l = a + (n-1)d$

$$152 = 8/2 [2a + (8-1)4], a=5 \quad l = 5 + (8-1)4, l=33$$

b.-  $a=-2, d=5, S_{10}=205$   $205 = n/2 [2(-2) + (n-1)5]; 5n^2 - 9n - 410 = 0; n_1=10; n_2=-8.260$   
 $l = -2 + (10-1)5; l=43$

c.-  $a=3, n=7, l=63$   $63 = 3 + (7-1)d; d=10$   $S_7 = 7/2 (3+63), S_7=237$

d.-  $n=12, l=47, d=-3$   $47 = a + (12-1)(-3), a=80$   $S_{12} = 12/2 (80+47), S_{12}=762$

e.-  $a=8, l=13, d=0.5, n=?$   $13 = 8 + (n-1)(0.5), n=11$   $S_{11} = 11/2 (8+13), S_{11}=115.5$

## 23. En los problemas siguientes se dan tres de los cinco elementos de una progresión geométrica. Hallar los dos elementos restantes:

a.-  $a=1/2, l=512, n=6, r=?$   $S_n=?$   $l = ar^{n-1}; 512 = 1/2 r^{6-1}; 2^6 = r^5, r = \sqrt[5]{2^6}, r=4$   
 $S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}; S_6 = 1/2 \cdot \frac{4^6 - 1}{4 - 1}; S_6 = 682.5$

b.-  $a=8, r=0.5, l=0.25$   $0.25 = 8(0.5)^{n-1}, (0.5)^5 = (0.5)^{n-1}, 5=n-1, n=6$   
 $S_n = 8 \frac{(0.5)^6 - 1}{0.5 - 1}; S_6 = 15.75$

c.-  $n=4, r=3, S_n=280, a=? , l=? \quad 280 = a \frac{3^4-1}{3-1} ; a=7$

$$l = a(3)^{4-1}, l = 7(3)^3, l = 189$$

d.-  $a=10, r=-2, S_n=-210 \quad -210 = 10 \frac{(-2)^n-1}{-2-1}, 64 = (-2)^n, (-2)^4 = (-2)^n, n=6$

$$l = 10(-2)^{6-1}, l = -320$$

e.-  $a=96, n=3, S_n=168 \quad 168 = 96 \frac{r^3-1}{r-1}, 4r^3+4r-3=0, (2r+3)(2r-1)=0$

$$r^3-1/r-1 = r^3+r+1 \quad \text{Con } r=1/2; l = 96(1/2)^{3-1}, l = 24$$

$$\text{Con } r=-3/2; l = 96(-3/2)^{3-1}, l = 216$$

24. Hallar la suma al infinito de las series siguientes:

a.-  $14 + 2 + 2/7 + \dots \quad S_n = a/1-r, S_n = 14/1-1/7, S_n = 49/3$

b.-  $27 - 9 + 3 - \dots \quad S_n = 27/1+1/3, S_n = 81/4$

c.-  $4 + 3 + 9/4 + \dots \quad S_n = 4/1-3/4, S_n = 16$

d.-  $1 - 1/3 + 1/9 - \dots \quad S_n = 1/1+1/3, S_n = 3/4$

e.-  $2 + 0.2 + 0.02 + \dots \quad S_n = 2/1-0.1, S_n = 2/0.9, S_n = 20/9$

25. Hallar las fracciones ordinarias equivalentes a las fracciones decimales siguientes:

a.-  $2, \overline{13} = 2 + 13/100 + 13/10000 + \dots \quad S = 2 + 13/100/1-1/100, S_n = 211/99$

b.-  $1, 29\overline{16} = 1 + 29/100 + 16/10000 + 16/1000000 + \dots$

$$S = 1 + 29/100 + 16/10000/1-1/100, S = 12787/9900$$

c.-  $3, \overline{09} = 3 + 9/100 + 9/10000 + \dots \quad S = 3 + 9/100/1-1/100, S = 34/11$

d.-  $0, \overline{100} = 100/1000 + 100/1000000 + \dots \quad S = 100/1000/1-1/1000, S = 100/999$

e.-  $0, \overline{027} = 27/1000 + 27/1000000 + \dots \quad S = 27/1000/1-1/1000, S = 1/37$

f.-  $1, 9\overline{16} = 1 + 91/100 + 6/1000 + 6/10000 + \dots$

$$S = 1 + 91/100 + 6/1000/1-1/10, S = 23/12$$

26. Utilizando las fórmulas estudiadas para las progresiones aritméticas, deducir una fórmula que exprese:

a.- la función de  $a, n$  y  $S_n$ :  $S_n = n/2(a+l), 2S_n = n(a+l), l = 2S_n/n - a$

b.- la función de  $n, d$  y  $S_n$ :  $l = a + (n-1)d, a = l - (n-1)d, S_n = n/2[2a+l]$

$$S_n = n/2[l - (n-1)d + l], 2S_n = n[2l - (n-1)d], 2S_n/n + (n-1)d = 2l, l = S_n/n + (n-1)d/2$$

c.-  $S_n$  en función de  $a, l$  y  $d$ :  $S_n = n/2(a+l), l = a + (n-1)d, n = (l-a+d)/d$

$$S_n = ((l-a+d/2d)(a+l), S_n = (l-a)(l+a)/2d + d/2d(l+a)$$

$$S_n = l^2 - a^2/2d + la/2$$

d.- la función de  $n, l$  y  $S_n$ :  $l = a + (n-1)d, d = l-a/n-1, S_n = n/2(a+l), a = 2S_n/n - l$

$$d = l - (2S_n/n - l)/n-1, d = 2(ln - S_n)/n(n-1)$$

27. Utilizando las Fórmulas estudiadas para las progresiones geométricas deducir una fórmula que exprese:

a...  $l$  en función de  $a, r$  y  $S_n$ :  $l = f(a, r, S_n)$ ,  $S_n = \frac{l r - a}{r - 1}$ ,  $l = a + (r - 1) S_n / r$

b...  $S_n$  en función de  $r, n$  y  $l$ :  $S_n = \frac{l r - a}{r - 1}$ ,  $l = a r^{n-1}$ ,  $a = l / r^{n-1}$

$$S_n = \frac{l r - l / r^{n-1}}{r - 1}, S_n = \frac{l (r^n - 1)}{r^n - r^{n-1}}$$

c...  $r$  en función de  $a, l$  y  $S_n$ :  $S_n = \frac{l r - a}{r - 1}$ ,  $r = S_n - a / S_n - l$

d...  $a$  en función de  $r, S_n$  y  $l$ :  $S_n = \frac{l r - a}{r - 1}$ ,  $a = \frac{l r - (r - 1)(S_n)}{r - 1}$

e...  $l$  en función de  $n, r$  y  $S_n$ :  $S_n = \frac{a r^n}{r - 1}$ ,  $a = S_n (r - 1) / r^n - 1$ ,  $S_n = \frac{l r - a}{r - 1}$

$$l = S_n (r - 1) + a / r, l = \frac{S_n (r - 1) + S_n (r - 1) / r^n - 1}{r}, l = \frac{(r - 1) r^{n-1} S_n}{r^n - 1}$$

28. En una progresión aritmética de  $2n$  términos se conoce la suma  $A$  de los términos de orden impar (primero, tercero, etc) y la suma  $B$  de los términos de orden par (segundo, cuarto, etc). Determine la progresión. Sea la progresión

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) + (a + 5d) + \dots + [a + (2n - 1)d] + [a + (2n - 2)d]$$

Para la suma  $A$ :  $t_i = a$

$$A = \frac{n}{2} [a + a + (2n - 2)d] \quad \text{Resolviendo el sistema}$$

de ecua. para  $a$  y  $d$ .

$$u_n = a + (2n - 2)d$$

Para la suma  $B$ :  $t_i = a + d$

$$B = \frac{n}{2} [a + d + a + (2n - 1)d] \quad \text{d} = (B - A) / n$$

$$a = A - \frac{n - 1}{n} B$$

$$u_n = a + (2n - 1)d$$

29. La suma de dos números es 40. Su media aritmética excede a su media geométrica en 8. ¿Cuáles son los números?

Sean  $a$  y  $b$  los números que se buscan:  $a + b = 40$  ①;  $A = 8 + 8$ , ②  $a + b / 2 = \sqrt{ab} + 8$   
resolviendo el sistema ① y ② se tiene  $a = 4$ ,  $b = 36$

30. Hallar la suma de  $n$  términos de una progresión geométrica para la cual es  $r = -1$ .

$$S_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1}, S_n = a \frac{(-1)^n - 1}{-1 - 1}; \text{ Si es par: } S_n = a \frac{1 - 1}{-2}, S_n = 0; \text{ Si es impar: } S_n = a \frac{-1 - 1}{-2}, S_n = a$$

31. El papiro Rhind, uno de los documentos matemáticos más antiguos que se conocen (1650 a.d) contiene el problema siguiente: "Repartir 100 panes entre 5 hombres de manera que las cantidades recibidas estén en progresión aritmética y que  $1/7$  de la suma de las tres mayores porciones sea igual a la suma de las dos más pequeñas".

Sean:  $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d$ , las 5 porciones  $\Rightarrow 1/7(a + 2d + a + 3d + a + 4d) = a + a + d$

$$11a = 2d \quad \text{①}; S = n/2 [2a + (n - 1)d]; 100 = 5/2 (2a + 4d), 20 = a + 2d \quad \text{②}$$

resolviendo:  $a = 5/3$  y  $d = 55/6$

la progresión será:  $\frac{5}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$

32. Un niño ahorra 5 centavos la primera semana, 10 centavos la segunda semana, 15 centavos la tercera, y así sucesivamente durante 9 semanas. ¿Qué cantidad fija tendría que haber ahorrado semanalmente para tener la misma suma al cabo de 9 semanas?

$S_n = n/2 [2a + (n-1)d]$  pero ahora calculamos para 9 semanas

$S_9 = 9/2 [2(5) + (9-1)5]$ ,  $S_9 = 225$ . Esto es ahorrando en progresión aritmética:

Para que la cantidad sea fija en las 9 semanas es:  $225/9 = 25$  centavos.

33. Un obrero tiene que echar una carretilla de abono al pie de cada árbol de una fila de 20 árboles, los cuales están a 6m uno de otro. Si la pila de abono está en línea recta con los árboles y a 8m delante del primer árbol, ¿cuál es la distancia total que tiene que recorrer el obrero si al final deja la carretilla junto a la pila del abono?

pila  $\frac{8}{0} \frac{0}{1} \frac{6}{2} \frac{0}{3} \frac{6}{4} \frac{0}{5} \frac{6}{6} \frac{0}{7} \frac{6}{8} \frac{0}{9} \frac{6}{10} \frac{0}{11} \frac{6}{12} \frac{0}{13} \frac{6}{14} \frac{0}{15} \frac{6}{16} \frac{0}{17} \frac{6}{18} \frac{0}{19}$

Al 1º árbol distancia total = 16

Al 3º árbol distancia total = 40

Al 2º árbol distancia total = 28

Al 4º árbol distancia total = 52

Apartir del 2º árbol es progresión aritmética donde se debe encontrar la suma de:

$16 + 28 + 40 + 52 + \dots$ ;  $a = 28$ ,  $d = 12$ ,  $n = 19$ ;  $S_n = 16 + 19/2 [2(28) + (19-1)12]$ ;  $S_n = 2600m$

34. Una máquina que cuesta 4000 \$ se deprecia cada año 15% de lo que vale al principio de ese año. ¿Cuál será su valor al cabo de 5 años?

Al final del 1º año se deprecia  $(100-15)\% = 85\%$  es decir 0,85 veces menos.

Al final del 2º año será 0,85 veces menor que al principio de ese año, luego al cabo de 6 años será:

$$f_k = ar^{n-1}, f_k = 4000(0,85)^{k-1}, f_6 = 1774,82 \$$$

35. Si cada persona que recibe una carta de las llamadas "de cadena" envía 10 copias de la carta a otras tantas personas, ¿cuántas cartas se habrán enviado en total después de repetirse el proceso 6 veces? Comience por las 10 cartas escritas por una persona.

$a = 10$ ,  $n = 7$  y no 6 puesto que después de la 1ª suceden los 6 envíos

$$T = 10, S = ? \quad S_7 = 10 \frac{10^7 - 1}{10 - 1}; S_7 = 11111110$$

36. ¿Cuántos antepasados ha tenido desde el año 1700 una persona nacida en 1925. Tomando 25 años como periodo de tiempo de cada generación?

$$a = 2 \quad S = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$r = 2$$

$$n = 9 \quad S = 2 \frac{2^9 - 1}{2 - 1}; S = 1022$$

$$S = ?$$

37. Una ciudad tiene 800 000 habitantes. La tasa del crecimiento de esa población es de 6% anual. ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de 3 años?

$$a = 800\,000, r = (100+6)\% = 1.06, \quad l = 800\,000(1.06)^3, \quad l = 952\,812.8, \quad l = 952\,813 \text{ habitantes}$$

38. En una progresión geométrica decreciente de infinitos términos de suma vale 8 y la suma de los dos primeros términos es 6. ¿Cuál es la progresión?

$$S_n = a/(1-r); \quad 8 = a/(1-r) \quad (1) \quad S_2 = 6; \quad a + ar = 6 \quad (2) \quad \text{resolviendo (1) y (2)} \quad r = \pm 1/2$$

$$\text{Con } r = 1/2; \quad a = 4; \quad \text{la progresión es: } 4, 2, 1, \dots$$

$$\text{Con } r = -1/2, \quad a = 12; \quad \text{la progresión es: } 12, -6, 3, \dots$$

39. Un avión hace el viaje de ida a razón de 600 Km por hora y regresa a 400 Km por hora. ¿Cuál es su velocidad media en el viaje redondo?

$$\text{Con progresiones: } V_m = 2V_1V_2/V_1 + V_2 \text{ media armónica}$$

$$V_m = 2(600)(400)/(600+400); \quad V_m = 480 \text{ Km/h}$$

40. En una sucesión de cuatro números los tres primeros están en progresión aritmética y los tres últimos están en progresión geométrica. La suma de los términos primero y cuarto es 24 y la suma de los términos segundo y tercero es 18. ¿Cuál es la sucesión?

$$\text{Sea la sucesión: } a, a_1, a_2, a_3 \quad \text{En 1º lugar } a, a_1, a_2 \text{ están en progresión aritmética es decir } a, a+d, a+2d$$

$$\text{En 2º lugar } a_1, a_2, a_3 \text{ están en progresión geométrica}$$

$$\text{es decir el 1º término es } a_1 \text{ si designamos por } b \text{ el 1º término se tiene } b, br, br^2$$

$$\text{Condiciones del problema: } a_1 + a_4 = 24 \quad (1); \quad a_2 + a_3 = 18 \quad (2)$$

$$a_1 = a, \text{ en la progresión aritmética: } a_1 = a+d, a_2 = b \Rightarrow \text{En las dos progresiones}$$

$$a_3 = a+2d, a_3 = br \Rightarrow \text{En las dos progresiones}$$

$$a_4 = br^2 \text{ en la progresión geométrica; sustituyendo en (1) } a + br^2 = 24, \text{ en (2) } a+d+a+2d=18;$$

$$2a+3d=18; \text{ como } a+d=b \quad (3) \quad \text{y } a+2d=br \quad (4)$$

$$\text{Resolviendo el sistema: } a+br^2 \quad (1); \quad 18=2a+3d \quad (2); \quad a+d=b \quad (3); \quad a+2d=br \quad (4) \Rightarrow b+br=18$$

$$b=18/(1+r) \text{ en (1), } a=24-br^2/(1+r) \quad (5) \text{ en (3) } d=b-a \text{ en (2) se obtiene } 3b-a=18$$

$$3(18/(1+r))-a=18; \quad a=54/(1+r)-18 \quad (6); \quad a=b \text{ se tiene}$$

$$3r^2 - 7r + 2 = 0; \quad (r-2)(3r-1) = 0$$

$$\text{Con } r=2; \quad b=6; \quad a=0; \quad d=6; \quad \text{La sucesión es: } 0, 6, 12, 18$$

$$\text{Con } r=1/3; \quad b=13.5; \quad a=22.5; \quad d=-9; \quad \text{La sucesión es: } 22.5, 13.5, 4.5, -4.5$$

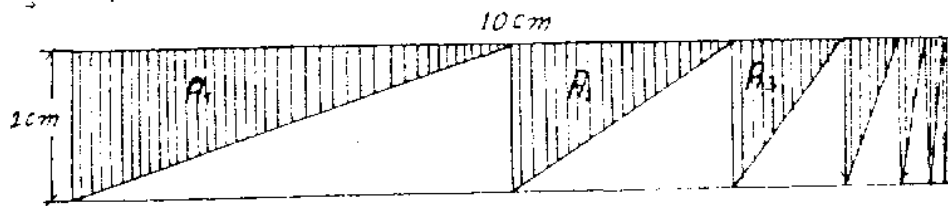
41. Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  es una progresión armónica, demostrar que  $a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + (n-1)(a_1 - a_2)}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )

$$\text{La correspondiente progresión aritmética es: } 1/a, 1/a_1, \dots, 1/a_n$$

donde  $a = 1/a_1$  ;  $l = 1/a_n$  ;  $d = 1/a_1 - 1/a_2$  ;  $d = a_2 - a_1 / a_1 a_2$  ;  $f = a_1 + (n-1)d$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \left( \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} \right) ; \quad \frac{1}{a_n} = \frac{a_2 + (n-1)(a_2 - a_1)}{a_1 a_2} ; \quad a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + (n-1)(a_2 - a_1)}$$

12. Se tiene un rectángulo de 10cm de largo por 2cm de alto. Se divide en dos partes iguales por una paralela a la altura y en una de estas partes se considera el triángulo determinado por una diagonal (el cual se ha sombreado en la figura). La otra parte se vuelve a dividir en dos de la misma manera y en una de estas partes se toma uno de los triángulos determinados por la diagonal, y así sucesivamente. ¿Cuánto vale el límite de la suma de las áreas de estos triángulos?



$$A = \frac{b \cdot h}{2} ; \quad A_1 = \frac{10/2 \cdot 2}{2} ; \quad A_1 = 5, \quad r = 1/2$$

$$A_2 = \frac{10}{4} \cdot \frac{2}{2}$$

$$A_3 = \frac{10}{8} \cdot \frac{2}{2}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} ; \quad S_n = \frac{5}{1-1/2} ; \quad S_n = 10 \text{ cm}^2$$

## LOGARITMOS

## Ejercicio 173

I Hallar los logaritmos que se indican a continuación:

1.  $\log_{10} 1000$  ;  $10^x = 10^3$ ;  $x=3$  :  $\log_{10} 1000 = x$  ;  $\log_{10} 1000 = 3$

2.  $\log_3 81$  :  $\log_3 81 = x$  ;  $3^x = 3^4$  ;  $x=4$

3.  $\log_5 125$  :  $\log_5 125 = x$ ,  $5^x = 125$ ,  $5^x = 5^3$  ;  $x=3$

4.  $\log_2 64$  :  $\log_2 64 = x$ ,  $2^x = 64$ ,  $2^x = 2^6$ ,  $x=6$

5.  $\log_2 512$  :  $\log_2 512 = x$ ,  $2^x = 512$ ,  $2^x = 2^9$ ,  $x=9$

6.  $\log_3 729$  :  $\log_3 729 = x$ ,  $3^x = 729$ ,  $3^x = 3^6$ ,  $x=6$

7.  $\log_{10} 1$  :  $\log_{10} 1 = x$ ,  $10^x = 1$ ,  $10^x = 10^0$ ,  $x=0$

8.  $\log_4 1$  :  $\log_4 1 = x$ ,  $4^x = 1$ ,  $4^x = 4^0$ ,  $x=0$

9.  $\log_{10} 0,01$  :  $\log_{10} 10^{-2} = x$ ,  $10^x = 10^{-2}$ ,  $x=-2$

10.  $\log_7 49$  :  $\log_7 49 = x$ ,  $7^x = 49$ ,  $7^x = 7^2$ ,  $x=2$

11.  $\log_{10} 10000$  :  $\log_{10} 10000 = x$ ,  $10^x = 10000$ ,  $10^x = 10^4$ ,  $x=4$

12.  $\log_2 0,125$  :  $\log_2 0,125 = x$ ,  $2^x = 0,125$ ,  $2^x = 1/8$ ,  $2^x = 2^{-3}$ ,  $x=-3$

13.  $\log_5 625$  :  $\log_5 625 = x$ ,  $5^x = 625$ ,  $5^x = 5^4$ ,  $x=4$

14.  $\log_2 \sqrt{2}$  :  $\log_2 \sqrt{2} = x$ ,  $2^x = \sqrt{2}$ ,  $2^x = 2^{1/2}$ ,  $x=1/2$

15.  $\log_5 \sqrt[3]{5}$  :  $\log_5 \sqrt[3]{5} = x$ ,  $5^x = \sqrt[3]{5}$ ,  $5^x = 5^{1/3}$ ,  $x=1/3$

16.  $\log_{10} 0,1$  :  $\log_{10} 0,1 = x$ ,  $10^x = 10^{-1}$ ,  $x=-1$

17.  $\log_{10} 0,001$  :  $\log_{10} 10^{-3} = x$ ,  $10^x = 10^{-3}$ ,  $x=-3$

18.  $\log_5 0,2$  :  $\log_5 1/5 = x$ ,  $5^x = 1/5$ ,  $5^x = 5^{-1}$ ,  $x=-1$

19.  $\log_4 8$  :  $\log_4 8 = x$ ,  $4^x = 8$ ,  $2^{2x} = 2^3$ ,  $2x=3$ ,  $x=3/2$

20.  $\log_9 27$  :  $\log_9 27 = x$ ,  $9^x = 27$ ,  $3^{2x} = 3^3$ ,  $2x=3$ ,  $x=3/2$

21.  $\log_{16} 8$  :  $\log_{16} 8 = x$ ,  $16^x = 8$ ,  $2^{4x} = 2^3$ ,  $4x=3$ ,  $x=3/4$



II. Escribir en notación logarítmica las expresiones siguientes que se dan en forma exponencial:

1.  $5^2 = 25$  :  $a^x = N$ ,  $\log_a N = x$  ;  $\log_5 25 = 2$

2.  $2^5 = 32$  :  $\log_2 32 = 5$

6.  $4^0 = 1$  :  $\log_4 1 = 0$

3.  $2^{-2} = 0,25$  :  $\log_2 0,25 = -2$

7.  $10^1 = 10$  :  $\log_{10} 10 = 1$

4.  $10^{-1} = 0,1$  :  $\log_{10} 0,1 = -1$

8.  $10^{1,39794} = 25$  :  $\log_{10} 25 = 1,39794$

5.  $5^{1/2} = \sqrt{5}$  :  $\log_5 \sqrt{5} = 1/2$

9.  $10^{0,77815} = 6$  :  $\log_{10} 6 = 0,77815$

III. Expresar en forma exponencial las siguientes:

1.  $\log_2 8 = 3$  :  $2^3 = 8$

4.  $\log_a p = m$  :  $a^m = p$

2.  $\log_4 2 = 0,5$  :  $4^{0,5} = 2$

5.  $\log_b q = n$  :  $b^n = q$

3.  $\log_6 216 = 3$  :  $6^3 = 216$

6.  $\log_{10} 5 = 0,69897$  :  $10^{0,69897} = 5$

IV. Comprobar las relaciones siguientes:

1.  $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$  :  $\log_2 4 = X$ ,  $2^X = 2^2$ ,  $X = 2$

$X_1 + X_2 = X$

$\log_2 8 = X$ ,  $2^X = 2^3$ ,  $X = 3$

$2 + 3 = 5$

$\log_2 32 = X$ ,  $2^X = 2^5$ ,  $X = 5$

$5 = 5$

2.  $2\log_3 9 = \log_3 81$  :  $\log_3 9 = X$ ,  $3^X = 3^2$ ,  $X = 2$

$2X = X$  ;  $2(2) = 4$

$\log_3 81 = X$ ,  $3^X = 3^4$ ,  $X = 4$

$4 = 4$

3.  $\log_5 3125 - \log_5 125 = \log_5 25$  :  $\log_5 3125 = X$ ,  $5^X = 5^5$ ,  $X = 5$

$X - Y = Z$

$\log_5 125 = Y$ ,  $5^Y = 5^3$ ,  $Y = 3$

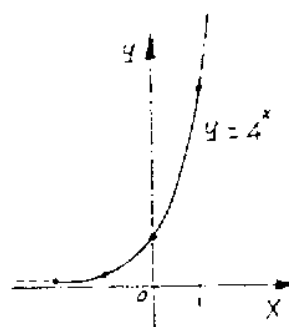
$5 - 3 = 2$

$\log_5 25 = Z$ ,  $5^Z = 5^2$ ,  $Z = 2$

$2 = 2$

4. Constrúyase el gráfico de  $y = 4^x$

X	0	1	0,5	1,5	2	-0,5	-1	-2
Y	1	4	2	8	16	0,5	0,25	1/16



## Ejercicio 174

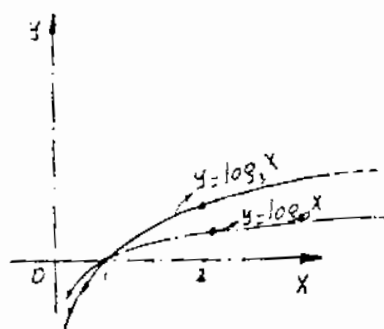
Construir el gráfico de las funciones siguientes:

1.  $y = \log_3 x$  ;  $3^y = x$

x	1	3	9	1/3	1/9	0.6
y	0	1	2	-1	-2	-0.5

2.  $y = \log_{10} x$  ;  $10^y = x$

x	1	10	3.2	0.3	5.6	0.2
y	0	1	0.5	-0.5	0.75	-0.75



## Ejercicio 175

I Aplicar las reglas 195-3 - 195-6 a los ejemplos siguientes:

195-3  $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$

195-5  $\log_a M^k = k \log_a M$

195-4  $\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$

195-6  $\log_a \sqrt[n]{M} = 1/n \log_a M$

1.  $\log(11 \cdot 13) = \log 11 + \log 13$

2.  $\log(25 \cdot 3.2) = \log 25 + \log 3.2$

3.  $\log(7 \cdot 15 \cdot 19) = \log 7 + \log 15 + \log 19$

4.  $\log_2(3 \cdot 5 \cdot 11) = \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 11$

5.  $\log 93/17 = \log 93 - \log 17$

6.  $\log 15/101 = \log 15 - \log 101$

7.  $\log_3 55/49 = \log_3 55 - \log_3 49$

8.  $\log 13 \cdot 23/47 = \log 13 + \log 23 - \log 47$

9.  $\log_5 300/7 \cdot 61 = \log_5 300 - \log_5 7 - \log_5 61$

10.  $\log 415 \cdot 313/29 \cdot 117 = \log 415 + \log 313 - \log 29 - \log 117$

11.  $\log 18^5 = 5 \log 18$

12.  $\log 9^{2/3} = 2/3 \log 9$

13.  $\log(7 \cdot 5^4) = \log 7 + \log 5^4 = \log 7 + 4 \log 5$

$$12. \log_4 (3^4 \cdot 2^{10}) = 2 \log_4 3 + 5 \log_4 2$$

$$15. \log (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = \log 2^3 + \log 3^2 + \log 5 = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5$$

$$16. \log 7 \cdot 3^2 / 29 = \log (7 \cdot 3^2) - \log 29 = \log 7 + 2 \log 3 - \log 29$$

$$17. \log 8^3 \cdot 11^2 / 5^2 \cdot 6^4 = \log 8^3 + \log 11^2 - \log 5^2 - \log 6^4 = 3 \log 8 + 2 \log 11 - 2 \log 5 - 4 \log 6$$

$$18. \log 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^{-2} / 11^4 \cdot 13^{2/3} = \log 3^2 + \log 5^3 + \log 7^{-2} - \log 11^4 - \log 13^{2/3} \\ = 2 \log 3 + 3 \log 5 - 2 \log 7 - 4 \log 11 - 2/3 \log 13$$

$$19. \log \sqrt{26} = 1/2 \log 26$$

$$20. \log \sqrt[3]{223} = 1/3 \log 223$$

$$21. \log \sqrt[5]{43 \cdot 78} = 1/5 \log (43 \cdot 78) = 1/5 (\log 43 + \log 78)$$

$$22. \log \sqrt{5^3 \cdot 7/4} = 1/2 \log (5^3 \cdot 7/4) = 1/2 (3 \log 5 + \log 7 - \log 4)$$

$$23. \log \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 75}{47}} = 1/3 [\log (36 \cdot 75) - \log 47] = 1/3 (\log 36 + \log 75 - \log 47)$$

$$24. \log \sqrt[4]{\frac{32^2 \cdot 7.5^3}{0.23 \cdot 8.1^2}} = 1/4 [\log (32^2 \cdot 7.5^3) - \log (0.23 \cdot 8.1^2)] \\ = 1/4 (2 \log 32 + 3 \log 7.5 - \log 0.23 - 2 \log 8.1)$$

$$25. \log \pi \sqrt{L/8} = \log \pi + 1/2 \log L/8 = \log \pi + 1/2 (\log L - \log 8)$$

$$26. \log \sqrt{AB^3/C} = 1/2 (\log AB^3 - \log C) = 1/2 (\log A + 3 \log B - \log C)$$

$$27. \log L^3 \sqrt{A}/T^2 = \log L^3 + \log \sqrt{A} - \log T^2 = 3 \log L + 1/2 \log A - 2 \log T$$

$$28. \log \sqrt[5]{M^3/EF^2} = 1/5 (\log M^3 - \log EF^2) = 1/5 (3 \log M - \log E - 2 \log F)$$

$$29. \log \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = 1/2 (\log (p-b)(p-c) - \log bc) \\ = 1/2 [\log (p-b) + \log (p-c) - \log b - \log c]$$

$$30. \log \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 1/2 \log p(p-a)(p-b)(p-c) \\ = 1/2 [\log p + \log (p-a) + \log (p-b) + \log (p-c)]$$

II Expresar cada uno de los siguientes mediante un solo logaritmo [úsense las reglas en sentido inverso; por ejemplo:  $\log 3 + \log 7 = \log (3 \cdot 7) = \log 21$ ]

$$1. \log 2 + \log 6 = \log (2 \cdot 6) = \log 12$$

2.  $\log 5 + \log 7 + \log 10 = \log(5 \cdot 7 \cdot 10) = \log 350$
3.  $\log 6 - \log 3 = \log 6/3 = \log 2$
4.  $\log 20 - \log 4 = \log 20/4 = \log 5$
5.  $\log 3 + \log 4 - \log 2 = \log(3 \cdot 4/2) = \log 6$
6.  $3\log 5 + 2\log 4 = \log 5^3 + \log 4^2 = \log(5^3 \cdot 4^2) = \log 2000$
7.  $1/2(\log 2 + \log 8 + \log h) = 1/2 \log(2gh) = \log(2gh)^{1/2} = \log \sqrt{2gh}$
8.  $\log A - \log B - \log C = \log A - (\log B + \log C) = \log A - \log BC = \log A/BC$
9.  $3\log E + 2\log F - \log R = \log E^3 + \log F^2 - \log R = \log E^3 F^2/R$
10.  $\log P - 1/4 \log Q + 2\log S = \log P - \log Q^{1/4} + \log S^2 = \log PS^2/\sqrt[4]{Q}$

III Decir si las igualdades siguientes son verdaderas (V) o falsas (F), en caso de que sea falsa, expresar la igualdad correspondiente:

1.  $\log(AB)^3 = (\log A + \log B)^3$  F :  $\log(AB)^3 = 3(\log A + \log B)$
2.  $\log_2(\log_{10} 10000) = 2$  V :  $\log_2 4 = 2$
3.  $\log \sqrt{24} = \log 24/2 = \log 12$  F :  $\log \sqrt{24} = 1/2 \log 24$
4.  $\log AB/CD = \log A + \log B / \log C + \log D$  F :  $\log AB/CD = \log A + \log B - \log C - \log D$
5.  $\log(A/B)^3 = 3\log A - 3\log B$  V
6.  $\log 23/50 = \log 23 - \log 50$  V
7.  $10^{\log x} = x$  V :  $\log 10^{\log x} = \log x$ ,  $\log x \log_{10} 10 = \log x$ ,  $\log x = \log x$
8.  $\log \sqrt[3]{115} = 3\log 115$  F :  $\log \sqrt[3]{115} = 1/3 \log 115$
9.  $A^5 = 5\log A$  F :  $\log A^5 = 5\log A$  y no solo es  $A^5$
10.  $\log \sqrt[3]{A^2/B} = (2\log A - \log B)^{1/3}$  F :  $\log \sqrt[3]{A^2/B} = 1/3(2\log A - \log B)$

IV Dados  $\log 2 = 0,30103$ ;  $\log 3 = 0,47712$ ;  $\log 5 = 0,69897$ ;  $\log 7 = 0,84510$ , hallar los logaritmos de los siguientes números [descomponga cada número en sus factores primos y aplíquense las reglas 195-3 y 195-5].

1. 360 :  $\log 360 = \log 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5$   
 $= 3(0,30103) + 2(0,47712) + 0,69897 = 2,55638$

$$2. \ 540 : \log 540 = \log 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2\log 2 + 3\log 3 + \log 5 \\ = 2(0,30103) + 3(0,47712) + 0,69897 = 2,733239$$

$$3. \ 1260 : \log 1260 = \log 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7 \\ = 2(0,30103) + 2(0,47712) + 0,69897 + 0,84510 = 3,10637$$

$$4. \ 735 : \log 735 = \log 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = \log 3 + \log 5 + 2\log 7 \\ = 0,47712 + 0,69897 + 2(0,84510) = 2,86629$$

$$5. \ 2520 : \log 2520 = \log 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7 \\ = 3(0,30103) + 2(0,47712) + 0,69897 + 0,84510 = 3,40140$$

$$6. \ 6300 : \log 6300 = \log 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5 + \log 7 \\ = 2(0,30103) + 2(0,47712) + 2(0,69897) + 0,84510 = 3,79934$$

### Ejercicio 176

Hallar la característica del logaritmo de cada uno de los siguientes números:

1.  $\overbrace{36,4}^{\text{posición "standard"}} \Rightarrow \text{es un lugar a la derecha} \Rightarrow 1$

- |                            |                               |                                |
|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 2. $1481 = 3$              | 10. $0,000068 \Rightarrow -5$ | 18. $0,0002672 \Rightarrow -4$ |
| 3. $470 = 2$               | 11. $0,003 \Rightarrow -3$    | 19. $6820000 \Rightarrow 6$    |
| 4. $6 = 0$                 | 12. $0,234 \Rightarrow -1$    | 20. $80,02 \Rightarrow 1$      |
| 5. $7,2 \Rightarrow 0$     | 13. $92765 \Rightarrow 4$     | 21. $70,00 \Rightarrow 1$      |
| 6. $0,32 \Rightarrow -1$   | 14. $856,3 \Rightarrow 2$     | 22. $27006 \Rightarrow 4$      |
| 7. $81,04 \Rightarrow 1$   | 15. $6392,264 \Rightarrow 3$  | 23. $0,0001 \Rightarrow -4$    |
| 8. $0,0009 \Rightarrow -4$ | 16. $0,467 \Rightarrow -1$    | 24. $0,40001 \Rightarrow -1$   |
| 9. $0,5 \Rightarrow -1$    | 17. $8,1 \Rightarrow 0$       |                                |

### Ejercicio 177

Conociendo :  $\log 425 = 2,62839$      $\log 34,7 = 1,54033$      $\log 6,2 = 0,79239$

Hallar los logaritmos de los números siguientes:

	Número N	Característica de $\log N$	Mantisa de $\log N$	$\log N$
1.	4,25	0	0,628 39	0,628 39
2.	347	2	0,540 33	2,540 33
3.	0,62	-1	0,792 39	$\bar{1},792 39$
4.	620	2	0,792 39	2,792 39
5.	0,425	-1	0,628 39	$\bar{1},628 39$
6.	3,47	0	0,540 33	0,540 33
7.	$6,2 \cdot 10^{-5}$	-5	0,792 39	$\bar{5},792 39$
8.	$4,25 \cdot 10^{12}$	12	0,628 39	12,628 39
9.	34700	4	0,540 33	4,540 33
10.	$3,47 \cdot 10^9$	9	0,540 33	9,540 33
11.	0,00425	-3	0,628 39	$\bar{3},628 39$
12.	0,0347	-2	0,540 33	$\bar{2},540 33$

### Ejercicio 178

Hallar el logaritmo de cada uno de los números siguientes:

- |   |  |
|---|--|
| 1. 3824 : $\log 3824 = 3,58252$               | 13. 6,93 : $\log 6,93 = 0,84073$             |
| 2. 7432 : $\log 7432 = 3,87111$               | 14. 34,83 : $\log 34,83 = 1,54195$           |
| 3. 25,46 : $\log 25,46 = 1,40586$             | 15. 0,0048 : $\log 0,0048 = \bar{3},68124$   |
| 4. 6,315 : $\log 6,315 = 0,80037$             | 16. 45 932 : $\log 45 932 = 4,66212$         |
| 5. 0,2542 : $\log 0,2542 = \bar{1},40518$     | 17. 27465 : $\log 27465 = 4,43878$           |
| 6. 371,8 : $\log 371,8 = 2,57031$             | 18. 32,416 : $\log 32,416 = 1,51076$         |
| 7. 48 930 : $\log 48 930 = 4,68958$           | 19. 5,9273 : $\log 5,9273 = 0,77286$         |
| 8. 0,06 921 : $\log 0,06 921 = \bar{2},84017$ | 20. 821,41 : $\log 821,41 = 2,91462$         |
| 9. 34,7 : $\log 34,7 = 1,54033$               | 21. 0,71829 : $\log 0,71829 = \bar{1},14370$ |
| 10. 5,4 : $\log 5,4 = 0,73239$                | 22. 88,277 : $\log 88,277 = 1,94585$         |
| 11. 0,27 : $\log 0,27 = \bar{1},43136$        |  |
| 12. 922 800 : $\log 922 800 = 5,96511$        |  |

Realizar con las tablas los ejercicios 179 y 180

## Ejercicio 181

I Sumar los logaritmos siguientes:

$$\begin{array}{r} 1. \quad 3.18142 \\ 0.25941 \\ + \quad \bar{2}.43150 \\ \hline 1.87233 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad \bar{1}.65581 \\ \bar{3}.16182 \\ + \quad \bar{6}.85434 \\ \hline 3.67197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad \bar{1}.46255 \\ 0.91468 \\ + \quad \bar{1}.74937 \\ \hline 2.12655 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad \bar{2}.16154 \\ \bar{1}.10202 \\ + \quad \bar{3}.46812 \\ \hline \bar{6}.73168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 3.26921 \\ 1.43816 \\ + \quad \bar{4}.76483 \\ \hline 1.47230 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 2.54678 \\ \bar{4}.26923 \\ + \quad \bar{1}.88601 \\ \hline \bar{2}.70201 \end{array}$$

$$7. \quad \bar{3}.60154 + \bar{5}.72453 + \bar{2}.64926 = \bar{9}.97533$$

$$8. \quad 0.26941 + \bar{4}.25341 + 2.64006 + 1.74884 = 0.91172$$

$$9. \quad \bar{1}.46243 + \bar{1}.32646 + 0.42783 + 1.32410 = 0.54082$$

$$10. \quad 2.61269 + \bar{3}.42761 + \bar{1}.64255 + \bar{2}.34932 = \bar{2}.03217$$

II Restar:

$$1. \quad 2.26921 \text{ de } 3.42026 : \quad 3.42026 - 2.26921 = 1.15105$$

$$2. \quad 3.42156 \text{ de } 1.72824 : \quad 1.72824 + \bar{3}.42156 = \bar{2}.30668$$

$$3. \quad \bar{1}.17692 \text{ de } 2.46239 : \quad 2.46239 - \bar{1}.17692 = 3.28547$$

$$4. \quad \bar{2}.34908 \text{ de } \bar{1}.36267 : \quad \bar{1}.36267 + 2.34908 = 1.01359$$

$$5. \quad \bar{6}.42341 \text{ de } \bar{3}.46813 : \quad \bar{3}.46813$$

$$- \quad \bar{6}.42341$$

$$\hline 3.04472$$

$$6. \quad 2.26924 \text{ de } \bar{1}.35002 : \quad \bar{1}.35002 + \bar{2}.26924 = \bar{3}.08078$$

$$7. \quad \bar{2}.46254$$

$$- \quad \bar{3}.61725$$

$$\hline 0.84529$$

$$8. \quad \bar{4}.92156$$

$$- \quad 1.46846$$

$$\hline \bar{5}.45310$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad 1,34678 \\ - 0,26415 \\ \hline 1,08263 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad 0,26181 \\ - 5,47183 \\ \hline 4,78898 \end{array}$$

### III Multiplicar :

$$1. \quad 3 \cdot 2,68413 = 8,05239$$

$$2. \quad 6 \cdot \bar{3},46134 = -3 + 0,46134 \cdot 6 = -18 + 2,76804 = \bar{16},76804$$

$$3. \quad 4 \cdot \bar{1},36015 = -1 + 0,36015 \cdot 4 = -4 + 1,44060 = \bar{3},44060$$

$$4. \quad 8 \cdot \bar{2},16171 = -2 + 0,16171 \cdot 8 = -16 + 1,29368 = \bar{15},29368$$

$$\begin{aligned} 5. \quad 1,2 \cdot \bar{4},50402 &= -4 + 0,50402 \cdot 1,2 = -4,8 + 0,604824 = -4 - 0,8 + 1 - 1 = -5 + 0,2 \\ &= \bar{5},2 \text{ y sumando a lo anterior} \\ &\bar{5},2 + 0,604824 = \bar{5},80482 \end{aligned}$$

$$6. \quad 4,6 \cdot \bar{5},23223 = -5 + 0,23223 \cdot 4,6 = -23 + 1,068258 = \bar{22},06826$$

$$7. \quad -5 \cdot \bar{1},10239 = -1 + 0,10239 \cdot (-5) = 5 - 0,51195 = 4,48805$$

$$\begin{aligned} 8. \quad -3 \cdot 2,15241 &= 2 + 0,15241 \cdot (-3) = -6 - 0,45723 = -6 - 1 + 1 - 0,45723 = -7 + 0,54277 \\ &= \bar{7},54277 \end{aligned}$$

$$9. \quad 2,46183 \cdot \bar{1},20405 : \text{Colog}(\bar{1},20405) = 0,79595$$

$$2,46183 \cdot 0,79595 = 1,95949 \quad \text{El producto pedido es } -1,95949$$

$$\log A \cdot \log B = -\log A \text{ colog } B ; \log A \cdot \log B = \text{colog } A \text{ colog } B$$

$$10. \quad \bar{3},70824 \cdot \bar{2},30752 \text{ transformando se tiene } 2,29176 \cdot 1,69248 = 3,87876$$

### IV Dividir :

$$1. \quad 6,27923 \div 4 = 1,56981$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \bar{1},46325 \div 3 \quad &\text{Agregamos } \bar{2} \text{ a la característica para convertir en un múltiplo de } 3 \\ &\text{y se escribe : } \bar{3} + 2,4632 \div 3 = \bar{1} + 0,82108 = \bar{1},82108 \end{aligned}$$

$$3. \quad \bar{3},64258 \div 5 \quad \text{Como el caso anterior}$$

$$\bar{5} + 2,64258 \div 5 = \bar{1} + 0,528516 = \bar{1},52852$$

$$4. \quad \bar{2},01541 \div 7 = \bar{7} + 5,01541 \div 7 = \bar{1} + 0,716487 = \bar{1},71649$$

$$5. \quad \bar{4},26556 \div 9 = \bar{9} + 5,26556 \div 9 = \bar{1} + 0,585062 = \bar{1},58506$$



6.  $\bar{8},16175 \div 2/3$  ;  $-8 + 0,16175 \div 0,666667 = -11,99999 + 0,2426258 = \bar{12},14269$
7.  $\bar{5},46912 \div 3,6$  en forma binómica resulta  $(3,6)5 = 18$   
 $\bar{5},46912 = 13,46912 - 18$  para que la parte sustractiva sea divisible para el divisor.  
 $13,46912 - 18 \div 3,6 = 3,74142 - 5$  el cociente es  $\bar{3},74142$
8.  $\bar{2},78415 \div 1,4$        $1,4(5) = 7$   
 $\bar{2},78415 = 5,78415 - 7$   
 $5,78415 - 7 \div 1,4 = 4,13153 - 5 = \bar{1},13153$
9.  $\bar{3},16024 \div 2,25916$  el colog  $\bar{3},16024$  es  $2,83976$   
 $2,83976 \div 2,25916 = 1,25699$ ; el cociente es  $-1,25$
10.  $\bar{4},17183 \div \bar{3},15244$        $\text{Colog } A / \text{Colog } B = \log A / \log B$   
 El colog  $\bar{4},17183$  es  $3,82817$  ;      Colog  $\bar{3},15244$  es  $2,84756$   
 $3,82817 \div 2,84756 = 1,3443685$  ; el cociente es  $1,34$

### Ejercicio 182

I Calcular por logaritmos:

1.  $5,24 \cdot 42,62$  , Sea  $X = 5,24 \cdot 42,62$  ;  $\log X = \log 5,24 + \log 42,62$   
 $\log X = 0,71933 + 1,62961$  ;  $\log X = 2,34894$  ,  $X = \text{antilog } 2,34894$  ,  $X = 0,36196$
2.  $0,284 \cdot 1,2745$  :  $\log X = \log 0,284 + \log 1,2745$  ;  $\log X = \bar{1},45332 + 0,10534$   
 $\log X = -0,44134$  ;  $X = 0,36196$
3.  $36,48 \cdot 7/4,3$  :  $\log X = \log 36,48 + \log 7/4,3$  ;  $\log X = 1,56105 + 2,85388$   
 $\log X = 4,41593$  ;  $X = 26057,34$
4.  $3,2 \cdot 8,25 \cdot 0,0167$  :  $\log X = \log 3,2 + \log 8,25 + \log 0,0167$  ;  $\log X = 0,50515 + 0,91645 + \bar{2},2227$   
 $\log X = -0,35568$  ;  $X = 0,44088$
5.  $4,732 \cdot 0,2676 \cdot 23,8$  :  $\log X = \log 4,732 + \log 0,2676 + \log 23,8$   
 $\log X = 0,67504 + \bar{1},42749 + 1,37658$  ;  $\log X = 1,47911$  ;  $X = 30,13769$
6.  $(0,8627)^3$  ;  $X = (0,8627)^3$   
 $\log X = 3 \log 0,8627$  ;  $\log X = 3(\bar{1},93586)$   
 $\log X = \bar{1},80758 = -0,19242$  ;  $X = 0,64106$

$$\begin{array}{r} -1 + 0,93586 \\ \hline \phantom{-1} \phantom{+} 3 \\ \hline -3 + 2,80758 \end{array}$$

7.  $3,28 \cdot (-1,423) \cdot 7,22$  prescindiendo del signo :  $\log X = \log 3,28 + \log 1,423 + \log 7,22$   
 $\log X = 0,51987 + 0,15320 + 0,85854$ ;  $\log X = 1,52761$ ;  $X = 33,629$ ;  $X = 33,698$

8.  $(6,741)^2$  :  $\log X = 2 \log 6,741$ ;  $\log X = 2(0,82872)$  :  $\log X = 1,65744$ ;  $X = 45,440$

9.  $36,4 \cdot (-2,73) \cdot 0,2004 \cdot (-72,3)$  El resultado da positivo, luego sin tomar en cuenta el signo (-)  
 $\log X = \log 36,4 + \log 2,73 + \log 0,2004 + \log 72,3$   
 $\log X = 1,56110 + 0,43616 + \bar{1},30190 + 1,85914$ ;  $\log X = 3,1583$ ;  $X = 1439,8$

10.  $(-7,15)^3 \cdot (4,26)^4 \cdot (-3,42)$  :  $\log X = 3 \log 7,15 + 4 \log 4,26 + \log 3,42$   
 $\log X = 3(0,85431) + 4(0,62941) + 0,53403$ ;  $\log X = 4,35578$ ;  $X = 22687,15$

11.  $(2,573)^{-2}$  :  $\log X = -2 \log 2,573$ ;  $\log X = -2(0,41044)$ ;  $\log X = -0,82088$ ;  $X = 0,15105$

12.  $(0,4572)^{-3}$  :  $\log X = -3 \log 0,4572$ ;  $\log X = -3(\bar{1},66012)$ ;  $\log X = 1,0964$ ;  $X = 10,463$

13.  $(0,04982)^5$  :  $\log X = 5 \log 0,04982$ ;  $\log X = 5(\bar{1},69740)$ ;  $\log X = -4,5136$  ó  $\bar{7},487$ ;  $X = 3,063 \cdot 10^{-9}$

14.  $(1,227)^{2,5}$  :  $\log X = 2,5 \log 1,227$ ;  $\log X = 2,5(0,08684)$ ;  $\log X = 0,2221$ ;  $X = 1,66763$

15.  $(1,05)^{20}$  :  $\log X = 20 \log 1,05$ ;  $\log X = 20(0,02119)$ ;  $\log X = 0,4238$ ;  $X = 2,6533$

16.  $(1,035)^{-5}$  :  $\log X = -5 \log 1,035$ ;  $\log X = -5(0,01494)$ ;  $\log X = -0,0747$ ;  $X = 0,84198$

17.  $4,273/3,421$  :  $\log X = \log 4,273 - \log 3,421$ ;  $\log X = 0,63073 - 0,53415$ ;  $X = 1,24905$

18.  $0,2491/0,7216$  :  $\log X = \log 0,2491 - \log 0,7216$ ;  $\log X = \bar{1},39637 - \bar{1},85830$ ;  $X = 0,3452$

19.  $0,4715/0,0826$  :  $\log X = \log 0,4715 - \log 0,0826$ ;  $\log X = \log 0,4715 + \text{colog } 0,0826$   
 $\log X = 0,4715 + \bar{1},91698$  ;  $\text{colog } 0,0826 = 1,08302$   
 $\log X = \bar{1},67348$  ;  $X = 5,7082$

20.  $2,56/23,47$  :  $\log X = \log 2,56 - \log 23,47$ ;  $\log X = 0,40824 - 1,37051$ ;  $X = 0,10907$

21.  $23,42 \cdot 5,163/153,4$  :  $\log X = \log 23,42 + \log 5,163 - \log 153,4$ ;  $\log X = 1,36959 + 0,71290 -$   
 $2,18583$  ;  $\log X = -0,10334$ ;  $X = 0,78824$

22.  $36,862 \cdot 0,46 / 9,872 : \log x = \log 36,862 + \log 0,46 - \log 9,872$   
 $\log x = 1,56680 + \bar{7},66275 - 0,99441 ; X = 1,7186$
23.  $318,24 / 26,9 \cdot 48,32 : \log 318,24 - \log 26,9 - \log 48,32 = \log x$   
 $\log x = 2,50275 - 1,42975 - 1,68413 ; X = 0,24483$
24.  $78,275 / 4,23 \cdot 15,66 : \log x = \log 78,275 - \log 4,23 - \log 15,66$   
 $\log x = 1,89362 - 0,62634 - 1,19479 ; X = 1,1817$
25.  $3,184 / 1,232^2 : \log x = \log 3,184 - 2 \log 1,232 ; \log x = 0,50297 - 2(0,09061) ; X = 2,0977$
26.  $(101/93)^5 : \log x = 5(\log 101 - \log 93) ; \log x = 5(2,00432 - 1,96848) ; X = 1,5108$
27.  $12,23 \cdot 0,0462 / 7,281 \cdot 1,234 : \log x = \log 12,23 + \log 0,0462 - \log 7,281 - \log 1,234$   
 $\log x = 1,15320 + \bar{2},66464 - 0,86219 - 0,09132 ; X = 0,07317$
28.  $3,15^4 \cdot 2,6715 / 819,42 : \log x = 4 \log 3,15 + \log 2,6715 - \log 819,42$   
 $\log x = 4(0,49831) + 0,42676 - 2,91351 ; X = 0,52098$
29.  $1,18^4 \cdot 12,35^2 / 45,398 : \log x = 4 \log 1,18 + 2 \log 12,35 - \log 45,398$   
 $\log x = 4(0,07188) + 2(1,09167) - 1,65704 ; X = 6,5136$
30.  $7,26 \cdot (-2,16)^3 / (-4,23)^2 : \log x = \log 7,26 + 3 \log 2,16 - 2 \log 4,23$   
 $\log x = 0,86094 + 3(0,33445) - 2(0,62634) ; X = -4,0889$
31.  $\sqrt{27,931} : \log x = 1/2 \log 27,931 ; \log x = 1/2(1,44609) ; X = 5,285$
32.  $\sqrt[3]{461,72} : \log x = 1/3 \log 461,72 ; \log x = 1/3(2,66438) ; X = 7,729$
33.  $\sqrt[3]{7915} : \log x = 1/3 \log 7915 ; \log x = 1/3(3,89845) ; X = 19,929$
34.  $\sqrt[4]{6,352} : \log x = 1/4 \log 6,352 ; \log x = 1/4(0,20073) ; X = 1,5876$
35.  $\sqrt[5]{0,046} : \log x = 1/5 \log 0,046 ; \log x = 1/5(\bar{2},66276) ; \log x = -0,26745 ; X = 0,5402$
36.  $\sqrt[5]{(3,08)^3} : \log x = 1/5(3 \log 3,08) ; \log x = 0,29313 ; X = 1,9639$
37.  $\sqrt[3]{25,1^3 \cdot 36,17} : \log x = 1/3(2 \log 25,1 + \log 36,17) ; \log x = 1,45257 ; X = 28,351$

$$38. \sqrt[4]{2.3 \cdot 7.8^2 \cdot 9.44^3} : \log x = 1/4 (\log 2.3 + 2 \log 7.8 + 3 \log 9.44); \log x = 1.26771; x = 18.523$$

$$39. (27.412)^2 / \sqrt[3]{0.0227} : \log x = 2 \log 27.412 - 1/3 \log 0.0227; \log x = 1.87588 - \bar{1}.45201; \\ x = 2653.8$$

$$40. \sqrt[4]{0.0369^3 / 0.4216} : \log x = 1/4 [(3 \log 0.0369) - \log 0.4216]; \log x = (5.70109 - \bar{1}.62490) / 4 \\ \log x = \bar{1}.01904; x = 0.10448$$

$$41. -4523 \cdot \sqrt[3]{4.03} / (218.7)^{1/2} \cdot (2.71)^2 : \log x = \log 4523 + 1/3 \log 4.03 - 1/2 \log 218.7 - 2 \log 2.71 \\ \log x = 3.65443 + 0.20177 - 0.66992 - 0.86594; x = -66.273$$

$$42. [832^2 \cdot 0.0734 / \sqrt{78.1}]^{1/2} : \log x = 1/2 [-2 \log 832 + \log 0.0734 - 1/2 \log 78.1] \\ \log x = 1/2 (-5.84025 + \bar{1}.86569 - 0.94633); \log x = \bar{1}.80791; x = 1.0954 \cdot 10^4$$

$$43. (3.548)(-0.4872)^{2/3} / 3.7614 : \log x = \log 3.548 + 2/3 \log 0.4872 - \log 3.7614 \\ \log x = 0.54998 + 2/3 (\bar{1}.68771) - 0.57535; \log x = \bar{1}.76643; x = 0.58402$$

$$44. \sqrt{\frac{5.274}{4.005}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3.684}{47.32}} : \log x = 1/2 (\log 5.274 - \log 4.005) + 1/3 (\log 3.684 - \log 47.32) \\ \log x = 1/2 (0.72214 - 0.60260) + 1/3 (3.56632 - 1.67413) \\ \log x = 0.05977 + 0.63073; x = 4.9034$$

$$45. \sqrt{41.54 \cdot 4762 / 312.6 \cdot 815.4} : \log x = 1/2 [(\log 41.54 + \log 4762) - \log 312.6 - \log 815.4] \\ \log x = 1/2 (1.61847 + 3.67779 - 2.49499 - 2.91137) \\ \log x = -0.05505; x = 0.88094$$

$$46. \sqrt[3]{\frac{0.254 \cdot 7.8^2}{0.35 \cdot 0.4672 \cdot 1.2}} : \log x = 1/3 [\log 0.254 + 2 \log 7.8 - \log 0.35 - \log 0.4672 - \log 1.2] \\ \log x = 1/3 (\bar{1}.40483 + 1.78419 - \bar{1}.54407 - \bar{1}.66950 - 0.07918) \\ \log x = 0.63209; x = 4.2864$$

$$47. \sqrt[5]{\frac{-34.875 \cdot 296^3}{218.02 \cdot 3.8^2}} : \log x = 1/5 (\log 34.875 + 3 \log 296 - \log 218.02 - 2 \log 3.8) \\ \log x = 1/5 (1.54251 + 7.41388 - 2.33849 - 1.15957) \\ \log x = 1.09166; x = -12.35$$

$$48. 93.24 \cdot \sqrt{7041} / \sqrt{6.932 \cdot 4.253} : \log x = \log 93.24 + 1/2 \log 7041 - 1/2 (\log 6.932 + \log 4.253) \\ \log x = 1.96960 + 1.92382 - 1/2 (0.84086 + 0.62869) \\ \log x = 3.89342 - 0.73478; x = 1440.9$$

$$\begin{aligned}
 49. \quad & \sqrt{\frac{3,27^3 \cdot \sqrt{79,2}}{8,23^3 \cdot 7,361}} ; \log x = 1/2 (3 \log 3,27 + 1/2 \log 79,2 - 2 \log 8,23 - \log 7,361) \\
 & \log x = 1/2 (1,54364 + 0,94936 - 1,83079 - 0,86694) \\
 & \log x = -0,10236 ; x = 0,79 \\
 50. \quad & \sqrt[3]{\frac{(4,3)^{-1} \cdot (5,6)^{0,1} \cdot (0,08)^{0,5}}{-3,4716 \cdot 8,1702}} ; \log x = 1/3 (-1 \log 4,3 + 0,1 \log 5,6 + 0,5 \log 0,08 - \log 3,4716 - \log 8,1702) \\
 & \log x = 1/3 (-1,26694 + 0,07482 + 0,5(2,90309) - 0,54053 - 0,91223) \\
 & \log x = 1/3 (-4,80667) ; \log x = -1,06445 ; x = 0,086208
 \end{aligned}$$

II. Resolver los siguientes problemas usando logaritmos:

1. Hallar el volumen de una esfera cuyo radio es de 13,42 cm

$$V = 4/3 \pi r^3 ; V = 4/3 \pi (13,42)^3 ; \log V = \log 4/3 + \log \pi + 3 \log 13,42$$

$$\log V = 0,12494 + 0,49715 + 3,38326 ; \log V = 4,00535 ; V = 10124 \text{ cm}^3$$

2. Calcular el radio de una esfera cuyo volumen es de 528,4 cm<sup>3</sup>

$$V = 4/3 \pi r^3 ; 528,4 = 4/3 \pi r^3 ; \log 528,4 = \log 4/3 + \log \pi + 3 \log r$$

$$2,72296 = 0,12494 + 0,49715 + 3 \log r ; \log r = 0,70029 ; r = 5,0152 \text{ cm}$$

3. Determinar el periodo de un péndulo que tiene 8,75 pies de largo usando la fórmula:  $T = 2\pi \sqrt{L/g}$  en la cual T representa el periodo,  $\pi = 3,1416$ , L la longitud del péndulo y  $g = 32,16$  pies/seg<sup>2</sup>.

$$T = 2(3,1416) \sqrt{8,75/32,16} ; \log T = \log 2 + \log 3,1416 + 1/2 (\log 8,75 - \log 32,16)$$

$$\log T = 0,30103 + 0,49715 + 1/2 (0,94201 - 1,50732) ; \log T = 0,51553 ; T = 3,2774 \text{ s}$$

4. Los lados de un triángulo son:  $a = 23,4 \text{ m}$ ,  $b = 29,2 \text{ m}$  y  $c = 37,6 \text{ cm}$ . Hallar el área del triángulo por la fórmula de Herón.  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  en el cual  $p = (a+b+c)/2$ .

$$p = (23,4 + 29,2 + 37,6)/2 ; p = 45,1$$

$$\log A = 1/2 [\log 45,1 + \log (45,1 - 23,4) + \log (45,1 - 29,2) + \log (45,1 - 37,6)]$$

$$\log A = 1/2 (1,65418 + 1,33646 + 1,20139 + 0,87506) ; \log A = 2,53355 ; A = 341,62 \text{ m}^2$$

5. El radio del círculo inscrito en un triángulo está dado por la fórmula:

$$r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p} \text{ en la cual, como antes, } p = (a+b+c)/2. \text{ Hallar } r \text{ cuando}$$

$$a = 3,45 \text{ cm}, b = 4,27 \text{ cm} \text{ y } c = 4,02 \text{ cm}.$$

$$p = (3,45 + 4,27 + 4,02)/2 ; p = 5,87$$

$$\log r = 1/2 [\log (5,87 - 3,45) + \log (5,87 - 4,27) + \log (5,87 - 4,02)] - 1/2 \log 5,87$$

$$\log r = 1/2 (0,38382 + 0,20412 + 0,26717 - 0,76864)$$

$$\log r = 0,043235 ; r = 1,10459 \text{ cm}$$

\* corregir la respuesta de texto, puesto que no se extrae la raíz cuadrada,

6. La relación entre el volumen y la presión a que está sometido un gas a temperatura constante está dada por la fórmula:  $pV^{1.41} = K$ . Si  $K = 12\,000$ , hallar la presión cuando  $V = 28.3$ .

$$\log p + \log V^{1.41} = \log K ; \log p + 1.41 \log V = \log K ; \log p + 1.41 \log 28.3 = \log 12\,000$$

$$\log p = 4.07918 - 2.04702, \quad p = 107.69$$

7. Hallar el peso en toneladas (1 tonelada = 2000 libras) de un barco cuyo desplazamiento es de 75 000 pies cúbicos, si un pie cúbico de agua pesa 62.5 libras. El peso de un barco es igual al peso del agua que desplaza.

$$P_{\text{barco}} = P_{\text{agua desplazada}} ; P_b = 75\,000 \cdot 62.5$$

$$\log P_b = \log 75\,000 + \log 62.5 ; \log P_b = 4.87506 + 1.79588 ; \log P_b = 6.67094$$

$$P_b = 4687486.176 \text{ libras} ; P_b = 2343.8 \text{ toneladas}$$

8. Si desde un bombardero se suelta un proyectil, el tiempo que éste tarda en llegar a tierra está dado por la fórmula:  $t = \sqrt{2h/g}$ , en donde  $t$  es el tiempo en segundos,  $h$  la altura en metros del avión y  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Si un bombardero vuela a una altura de 2.4 Km, ¿cuánto tiempo tardará la bomba en dar en el blanco?

$$2.4 \text{ Km} = 2400 \text{ m}$$

$$\log t = 1/2 [\log 2 + \log h - \log g] ; \log t = 1/2 (\log 2 + \log 2400 - \log 9.81)$$

$$\log t = 1/2 (0.30103 + 3.38021 - 0.99167) ; \log t = 1.344785 ; t = 22.12 \text{ s}$$

9. El peso máximo en toneladas que soporta una columna está dado por la fórmula  $W = 149.8 \frac{d^{3.55}}{l^2}$ , en donde  $d$  es su diámetro en pulgadas y  $l$  es su longitud en pies, hallar el peso que soportará una columna de 13.7 pulgadas de diámetro y 18.2 pies de longitud.

$$W = 149.8 \frac{13.7^{3.55}}{18.2^2} ; \log W = \log 149.8 + 3.55 \log 13.7 - 2 \log 18.2$$

$$\log W = 2.17551 + 4.03536 - 2.52014$$

$$\log W = 3.69073 ; W = 4906.02 \text{ toneladas}$$

10. Hallar el tiempo que tarda la luz en llegar desde el Sol a la Tierra si están a una distancia de  $1.49 \cdot 10^8 \text{ Km}$  y la velocidad de la luz es de  $2.998 \cdot 10^5 \text{ Km/s}$ .

$$x = v \cdot t ; t = x/v$$

$$\log t = \log 1.49 \cdot 10^8 - \log 2.998 \cdot 10^5 ; \log t = \log 1.49 + 8 \log 10 - \log 2.998 - 5 \log 10$$

$$\log t = \log 1.49 + 3 \log 10 - \log 2.998$$

$$\log t = 0.17319 + 3 - 0.47683$$

$$t = 497 \text{ s}$$

$$t = 8 \text{ min } 17 \text{ seg}$$

## Ejercicio 183

1. La intensidad que se aplica a un amplificador de sonido es de  $3,5 \text{ W/cm}^2$ . Si esta intensidad se aumenta a  $4 \text{ W/cm}^2$ . ¿Será apreciable por el oído la variación correspondiente de intensidad del sonido? ¿Y si la intensidad se aumenta a  $5 \text{ W/cm}^2$ ?

a.- Ganancia en decibelios  $= 10 \log I_2/I_1$

$$\text{Ed} = 10 \log 4/3,5 ; \text{Ed} = 10 \log 1,14 ; \text{Ed} = 10(0,0569) ; \text{Ed} = 0,569$$

puesto que  $\text{Ed} < 1 \text{ db} \Rightarrow$  la variación de intensidad NO será apreciable

b.-  $\text{Edb} = 10 \log 5/3,5 ; \text{Edb} = 10 \log 1,43 ; \text{Edb} = 10(0,155) ; \text{Edb} = 1,55$

$\text{Edb} > 1 \text{ db}$  si hay apreciación

2. La variación de intensidad de la palabra hablada puede llegar a 24 decibelios.  
¿Cuáles la razón  $I_1/I_2$  de las intensidades empleadas en el habla?

$$\text{Edb} = 10 \log I_1/I_2 ; \log I_1/I_2 = 24/10 ; \log I_1/I_2 = 2,4$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 251,2$$

## Ejercicio 184

I Resolver las ecuaciones siguientes:

1.  $2^x = 64 ; 2^x = 2^6 ; x = 6$

2.  $3^x = 243 ; 3^x = 3^5 ; x = 5$

3.  $4^x = 1024 ; 2^{2x} = 2^{10} ; 2x = 10 ; x = 5$

4.  $2^x = 25 ; \log 2^x = \log 25 ; x = \log 25 / \log 2 ; x = 1,39794 / 0,30103 ; x = 4,644$

5.  $7^x = 320 ; x = \log 320 / \log 7 ; x = 2,50515 / 0,84509 ; x = 2,9643$

6.  $5^x = 72 ; x = \log 72 / \log 5 ; x = 1,85733 / 0,69897 ; x = 2,6572$

7.  $3^{x+1} = 45 ; x+1 = \log 45 / \log 3 ; x = 1,65321 / 0,47712 - 1 ; x = 2,465$

8.  $4^{2x-3} = 225 ; 2x-3 = \log 225 / \log 4 ; 2x = 2,35218 / 0,60206 + 3 ; x = 3,453$

9.  $4^{x+1} = 3^{x-1} ; (x+1)\log 4 = (x-1)\log 3 ; x\log 4 + \log 4 = x\log 3 - \log 3$

$$x = -\frac{\log 4 + \log 3}{\log 4 - \log 3} ; x = -\frac{0,60206 + 0,47712}{0,60206 - 0,47712} ; x = -8,6376$$

10.  $2^{x+1} = 5^{2x-1}$ :  $(x+1)\log 2 = (2x-1)\log 5$ ;  $X = \frac{-\log 5 + \log 2}{\log 2 - 2\log 5}$ ;  $X = \frac{-0,69897 + 0,30103}{0,30103 - 1,39794}$ ;  $X = 0,9117$
11.  $6^{3x} = 120$ ;  $3x = \log 120 / \log 6$ ;  $X = 2,07918 / 2,33445$ ;  $X = 0,8906$
12.  $2^{5x} = 518$ ;  $X = \log 518 / 5\log 2$ ;  $X = 2,71433 / 1,50515$ ;  $X = 1,8034$
13.  $5^{x+2} = 7^{x-1}$ :  $(x+2)\log 5 = (x-1)\log 7$ ;  $X = \frac{-\log 7 + 2\log 5}{\log 5 - \log 7}$ ;  $X = \frac{-0,84509 + 1,39794}{0,69897 - 0,84509}$ ;  $X = 15,35$
14.  $(1,03)^x = 5$ :  $X = \log 5 / \log 1,03$ ;  $X = 0,69897 / 0,01284$ ;  $X = 54,45$
15.  $(1,04)^x = 12$ :  $X = \log 12 / \log 1,04$ ;  $X = 1,07918 / 0,01703$ ;  $X = 63,37$
16.  $(1,05)^t = 3$ :  $t = \log 3 / \log 1,05$ ;  $t = 0,47712 / 0,02119$ ;  $t = 22,516$
17.  $(1,07)^n = 2,41$ :  $n = \log 2,41 / \log 1,07$ ;  $n = 0,38202 / 0,02938$ ;  $n = 13,003$
18.  $(1,06)^x = 9$ :  $X = \log 9 / \log 1,06$ ;  $X = 0,95424 / 0,02531$ ;  $X = 37,702$
19.  $4^{\sqrt{x}} = 32$ :  $2^{2\sqrt{x}} = 2^5$ ;  $2\sqrt{x} = 5$ ;  $4x = 25$ ;  $x = 6,25$
20.  $2^{x^2-3x} = 16$ :  $2^{x^2-3x} = 2^4$ ;  $x^2-3x-4=0$ ;  $(x-4)(x+1)=0$ ;  $X_1=4$ ,  $X_2=-1$
21.  $(3^x)^2 = (3^x)^x$ ;  $3^{2x} = 3^{x^2}$ ;  $2x - x^2 = 0$ ;  $x(x-2)=0$ ;  $X_1=0$ ;  $X_2=2$
22.  $(1,43)^x = 18$ :  $X = \log 18 / \log 1,43$ ;  $X = 1,25527 / 0,15534$ ;  $X = 8,081$
23.  $3 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x$ :  $\log 3 + x\log 2 = \log 4 + x\log 5$ ;  $X = \log 4 - \log 3 / \log 2 - \log 5$ ;  $X = -0,314$
24.  $(1,04)^x = 1/2$ :  $-x = \log 1/2 / \log 1,04$ ;  $X = -\log 2 / \log 1,04$ ;  $X = 0,30103 / 0,01703$ ;  $X = 17,676$
25.  $2^x + 4^x = 72$ :  $2^x + 2^{2x} - 72 = 0$ ;  $(2^x + 9)(2^x - 8) = 0$ ;  $2^x = -9$ ;  $x = \log(-9) / \log 2$  impossible  
 $2^x = 8$ ;  $2^x = 2^3$ ;  $x = 3$
26.  $1^{x+1} + 4^x = 288$ :  $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 288 = 0$ ;  $(2^x + 18)(2^x - 16) = 0$ ;  $2^x = -18$  impossible;  $2^x = 16$ ;  $x = 4$
27.  $3^{x+1} + 9^x = 108$ :  $3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 108 = 0$ ;  $(3^x + 12)(3^x - 9) = 0$ ;  $3^x = -12$  impossible;  $3^x = 3^2$ ,  $x = 2$



$$28. \quad 9^{x+1} - 3^x = 6534 : 3^{x+2} - 3^x = 6534 = 0 ; (9 \cdot 3^{x+2} + 242)(3^x - 27) = 0 ; 9 \cdot 3^x = -242 \text{ NO}$$

$$3^x = 27 ; 3^x = 3^3 ; X = 3$$

II Hallar las soluciones positivas de los sistemas siguientes:

$$1. \quad X^y = Y^x \text{ y } X^3 = Y^4 \quad \textcircled{a} \quad Y \log X = X \log Y \quad \textcircled{b} \quad 2 \log X = 4 \log Y$$

$\div$  la una por la otra  $Y/2 = X/4$  en  $\textcircled{a}$

$$X^3 = Y^4 : (2Y)^3 = Y^4 ; Y^3(Y^2 - 4) = 0 ; Y^2(Y+2)(Y-2) = 0 ; Y_1 = 0 \text{ y } Y_2 = -2 \text{ NO} ; Y_3 = 2 \Rightarrow X = 4$$

$$2. \quad X + Y = 5$$

$$3^X \cdot 5^Y = 675 \quad 3^X \cdot 5^Y = 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow X = 3 \text{ y } Y = 2$$

III En una progresión geométrica el primer término es 15, la razón es 2 y el último término es 15360. ¿De cuántos términos se compone la progresión?

$$P = ar^{n-1} ; 15360 = 15 \cdot 2^{n-1} ; \log 15360 = \log 15 + (n-1) \log 2 ; n-1 = \log 15360 - \log 15 / \log 2$$

$$n-1 = 4,18639 - 1,17609 / 0,30103 ; n-1 = 10 ; n = 11$$

IV Se sabe que la presión barométrica de la atmósfera disminuye con la altura. Si la presión  $P$  se mide en pulgadas y la altura  $H$  en pies se tiene  $P = 29,92 e^{-H/26200}$ , donde  $e = 2,718$ . Averiguar a qué altura la presión barométrica será de 25,8 pulgadas.

$$25,8 = 29,92 (2,718)^{-H/26200} ; \log 25,8 = \log 29,92 - H/26200 \log 2,718$$

$$1,41162 = 1,47596 - 0,43425 / 26200 H ; H = 3981,8 \text{ pies}$$

V Una cantidad  $a$  de radium se reduce al cabo de  $t$  años a la cantidad  $x$  dada por la fórmula:  $X = a(1/2)^{t/1500}$ . ¿En qué tiempo queda reducida la cantidad de radium a la quinta parte?  $X = a/5$  (quinta parte).

$$a/5 = a(1/2)^{t/1500} ; 1/5 = (1/2)^{t/1500} ; -\log 5 = t/1500 (-\log 2)$$

$$1500 \log 5 / \log 2 = t ; t = 3483 \text{ años}$$

VI Resolver:

$$1. \quad \log 4X = 3 : \log 4 + \log X = 3 ; \log X = 3 - 0,60206 ; X = 250$$

$$2. \quad \log(x-2) + \log x = \log 8 : \log x(x-2) = \log 8 : X^2 - 2X - 8 = 0 ; (X-4)(X+2) = 0, X_1 = -2 \text{ NO} ; X_2 = 4$$

$$3. \quad \log(\log X) = 1,17609 : \log X = \text{antilog}(1,17609) ; \log X = 10^{1,17609} ; \log X = 15 ; X = 10^{15}$$

$$4. \quad \log 1/2x + 3 = -2 : -\log(2x+3) = -2 ; \log(2x+3) = 2 ; 2x+3 = 100 ; X = 48,5$$

$$5. \quad \log(x-5) + \log(x+4) = 1 : \log(x-5)(x+4) = \log 10 ; X^2 - X - 30 = 0 ; (X-6)(X+5) = 0$$

$$X_1 = 6 \text{ y } X_2 = -5 \text{ NO}$$

$$6. \log(X^2 - 15X) = 3 : X^2 - 15X = 10^3 ; X^2 - 15X - 1000 = 0 ; (X - 40)(X + 25) = 0 ; X_1 = 40, X_2 = -25 \text{ no}$$

$$7. X^2 + Y^2 = 909 : \log X/Y = 1 ; X/Y = 10 ; X = 10Y$$

$$\log X - \log Y = 1 : 100Y^2 + Y^2 = 909 ; Y^2 = 9 ; Y = \pm 3 \Rightarrow Y_1 = 3 ; X = 30, Y_2 = -3 \text{ no}$$

### Ejercicio 186 (Repaso)

#### I Escribir en notación logarítmica:

$$1. 3^4 = 81 : \log_3 81 = 4$$

$$4. 2^{-3} = 0,125 : \log_2 0,125 = -3$$

$$2. 5^{-2} = 0,04 : \log_5 0,04 = -2$$

$$5. 8^0 = 1 : \log_8 1 = 0$$

$$3. 10^{1/2} = \sqrt{10} : \log_{10} \sqrt{10} = 1/2$$

$$6. 10^{0,60206} = 4 : \log_{10} 4 = 0,60206$$

#### II Escribir en notación exponencial

$$1. \log_2 64 = 6 : 2^6 = 64$$

$$4. \log_{10} 8 = 0,90309 : 10^{0,90309} = 8$$

$$2. \log_5 0,2 = -1 : 5^{-1} = 0,2$$

$$5. \log_b r = 5 : b^5 = r$$

$$3. \log_7 343 = 3 : 7^3 = 343$$

$$6. \log_{10} m = X : 10^X = m$$

#### III Aplicando la definición de logaritmo calcular:

$$1. \log_2 128 : \log_2 128 = X ; 2^X = 2^7 ; X = 7$$

$$2. \log_2 0,25 : \log_2 0,25 = X ; 2^X = 1/4 ; 2^X = 2^{-2} ; X = -2$$

$$3. \log_3 27 : \log_3 27 = X ; 3^X = 3^3 ; X = 3$$

$$4. \log_3 \sqrt{3} : \log_3 \sqrt{3} = X ; 3^X = 3^{1/2} ; X = 1/2$$

$$5. \log_{10} 0,001 : \log_{10} 0,001 = X ; 10^X = 10^{-3} ; X = -3$$

$$6. \log_8 512 : \log_8 512 = X ; 8^X = 512 ; 2^{3X} = 2^9 ; 3X = 9 ; X = 3$$

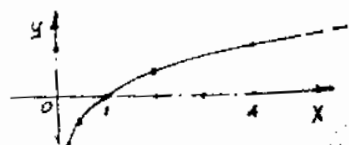
#### IV Comprobar que:

$$1. \log_3 9 + \log_3 27 = \log_3 243 : \log_3 243 = \log_3 243$$

$$2. 3 \log_2 4 = \log_2 64 : \log_2 4^3 = \log_2 64 ; \log_2 64 = \log_2 64$$

$$3. \text{Construir el gráfico de } Y = \log_4 X : 4^Y = X$$

X	0,25	0,5	1	2	4	8
Y	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5



V Aplicar las propiedades de los logaritmos (véase 3195) en los siguientes casos:

1.  $\log(25/32 \cdot 43) : \log 25/32 \cdot 43 = \log 25 - \log 32 - \log 43$
2.  $\log(2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^2) = 5 \log 2 + 4 \log 3 + 2 \log 7$
3.  $\log[(29 \cdot 31^3)/37^2] = \log 29 \cdot 31^3 - \log 37^2 = \log 29 + 3 \log 31 - 2 \log 37$
4.  $\log \sqrt{79/51^3} = 1/2 \log 79/51^3 = 1/2 (\log 79 - 3 \log 51)$
5.  $\log(A^3 B/C^2) = 3 \log A + \log B - 2 \log C$
6.  $\log(A\sqrt{B}/C^3) = \log A + 1/2 \log B - 3 \log C$

VI Expresar mediante un solo logaritmo:

1.  $\log 3 + \log 5 + \log 6 = \log 3 \cdot 5 \cdot 6 = \log 90$
2.  $\log 3 + \log 4 - \log 6 = \log 3 \cdot 4/6 = \log 2$
3.  $2 \log 3 + 3 \log 5 = \log 3^2 + \log 5^3 = \log 3^2 \cdot 5^3 = \log 1125$
4.  $2 \log A + \log B - 3 \log C = \log A^2 B/C^3$

VII Decir si son verdadero (V) o falsas (F) las igualdades siguientes:

1.  $\log A - \log B = \log A/\log B$  F       $\log A - \log B = \log A/B$
2.  $\log \sqrt[3]{19} = \log 19/3$  V      "
3.  $7^4 = 4 \log 7$  F       $4 \log 7 = \log 7^4$
4.  $\log A^2/B^3 = 2 \log A - 3 \log B$  V
5.  $\log \sqrt{ab/c} = 1/2 (\log a + \log b/\log c)$  F       $\log \sqrt{ab/c} = 1/2 (\log a + \log b - \log c)$

VIII Dados  $\log 3 = 0,47712$ ,  $\log 5 = 0,69897$  y  $\log 11 = 1,04139$  encontrar (sin utilizar las tablas).

1.  $\log 495 : \log 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \log 3 + \log 5 + \log 11 = 2(0,47712) + 0,69897 + 1,04139 = 2,69460$
2.  $\log 1089 : \log 3^2 \cdot 11^2 = 2 \log 3 + 2 \log 11 = 2(0,47712) + 2(1,04139) = 3,03702$
3.  $\log 7425 : \log 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 3 \log 3 + 2 \log 5 + \log 11 = 3(0,47712) + 2(0,69897) + 1,04139 = 3,87069$

4. Si  $C = 8,84 \text{ kA}/10^3 \text{ d}$  comprobar que  $\log C = \log 8,84 + \log K + \log A + c \log d - 8$   
 $\log C = \log 8,84 + \log K + \log A - 3 \log 10 - \log d$   
 $\log C = \log 8,84 + \log K + \log A + c \log d - 3$  NO satisface la ecuación

IX Efectuar las operaciones indicadas siguientes:

1.  $(\bar{3}, \bar{4}8\ 923) + (\bar{1}, 33\ 401) + (\bar{4}, 76\ 811) + (0, \bar{6}6\ 813) = 0, 25\ 949$
2.  $(\bar{2}, 76\ 928) + (1, 72\ 437) - (\bar{1}, 16\ 152) = 1, 33\ 213$
3.  $5 \cdot \bar{2}, 76\ 932 = -2 + 0, 76\ 932 \cdot 5 = -10 + 3, 8466 = \bar{7}, 8466$
4.  $-2 \cdot \bar{1}, 76\ 823 = (-1 + 0, 76\ 823)(-2) = 2 - 1, 53\ 646 = 0, 46\ 354$
5.  $\bar{3}, 46\ 128 \cdot 1, 26\ 921$  :  $\text{Colog } \bar{3}, 46\ 128 = 2, 53\ 872$  ;  $\log A \log B = -\text{Colog } A \log B$   
 $2, 53\ 872 + 1, 26\ 921 = 3, 22\ 217$  el producto pedido es  $= -3, 22\ 217$
6.  $\bar{2}, 75\ 481 \div 5$  Se hace múltiplo del divisor:  $-2 + 0, 75\ 481 - 3 + 3 = -5 + 3, 75\ 481$   
 $-5 + 3, 75\ 481 \div 5 = -1 + 0, 75\ 096 = \bar{1}, 75\ 096$
7.  $\bar{3}, 46\ 824 \div 2, 5$  puesto que  $2(2, 5) = 5$  la parte sustractiva tiene que ser igual o múltiplo del divisor.  
poniendo en forma binomia  $2, 46\ 824 - 5 \div 2, 5 = 0, 987\ 296 - 2 = \bar{2}, 9873$
8.  $\bar{5}, 68\ 426 \div 3/4$  :  $\bar{5}, 68\ 426 \div 0, 75$  ; Como  $8(0, 75) = 6$   
 $1, 68\ 426 - 6 \div 0, 75 = 2, 24\ 568 - 8 = \bar{6}, 24\ 568$
9.  $\bar{1}, 76\ 165 \div 7 = -7 + 6, 76\ 165 \div 7 = -1 + 0, 96\ 595 = \bar{1}, 96\ 595$
10.  $\bar{2}, 48\ 723 \div \bar{3}, 92\ 451$  :  $\frac{\log A}{\log B} = \frac{\text{Colog } A}{\text{Colog } B}$  ;  $\frac{\bar{2}, 48\ 723}{\bar{3}, 92\ 451} = \frac{1, 51\ 276}{2, 17\ 549} = 0, 69537$

# X Calcular por logaritmos :

1.  $(673, 2 \cdot 9, 641)/700, 7$  ;  $\log X = \log 673, 2 + \log 9, 641 - \log 700, 7$   
 $\log X = 2, 82\ 814 + 0, 98\ 412 - 2, 84\ 553$  ;  $\log X = 0, 96\ 673$  ;  $X = 9, 2625$
2.  $\sqrt[3]{0, 476}$  :  $\log X = 1/3 \log 0, 476$  ;  $\log X = 1/3 (\bar{1}, 67\ 761)$  :  $-3 + 2, 67\ 761 \div 3 = -1 + 0, 89\ 253$   
 $\log X = \bar{1}, 89\ 253$  ;  $\log X = 910\ 746$  ;  $X = 0, 7808$
3.  $(36, 83)^{3, 2}$  :  $\log X = 3, 2 \log 36, 83$  ;  $\log X = 3, 2(1, 56\ 620)$  ;  $X = 102\ 765$
4.  $4/3 \pi (2, 83)^3$  :  $\log X = \log 4 - \log 3 + \log \pi + 3 \log 2, 83$   
 $\log X = 0, 60\ 206 - 0, 47\ 712 + 0, 49\ 715 + 3(0, 45\ 179)$  ;  
 $X = 94, 94$

5.  $2\pi \sqrt{0.615/32.16} : \log X = \log 2 + \log \pi + 1/2 (\log 0.615 - \log 32.16)$   
 $\log X = 0.30103 + 0.49715 + 1/2 (7.78888 - 1.50732) ; \log X = -0.06102 ; X = 0.869$
6.  $32.45^4 \cdot 7.81^3 / 9.32^2 \cdot \sqrt{476.1} : \log X = 4 \log 32.45 + 3 \log 7.81 - 2 \log 9.32 - 1/2 \log 476.1$   
 $\log X = 6.04486 + 2.67795 - 1.93883 - 1.33885 ; \log X = 5.44513 ; X = 278.697, 5$
7.  $[3.168 \sqrt{0.927/38.423}]^3 : \log X = 3(\log 3.168 + 1/2 \log 0.927 - \log 38.423)$   
 $\log X = 3(0.50079 - 0.01644 - 1.58459) ; \log X = -3.30078 ; X = 5.003 \cdot 10^{-4}$
8.  $[526.2 \sqrt[3]{0.0692/30.02} (7.56)^2]^2 : \log X = 2(\log 526.2 + 1/3 \log 0.0692 - \log 30.02 - 2 \log 7.56)$   
 $\log X = 2(2.72115 + 2.84012/3 - 1.47741 - 1.75704) ; \log X = -1.79987 ; X = 0.015854$
9.  $\sqrt[3]{\frac{2.34^2 \cdot (-3.167) \cdot 2.1^4}{7.26^2 \cdot 1.862^4}} : \log X = 1/3 (2 \log 2.34 + \log 3.167 + 4 \log 2.1 - 2 \log 7.26 - 4 \log 1.862)$   
 $\log X = 1/3 (0.73843 + 0.50065 + 1.28888 - 1.72187 - 1.07992)$   
 $\log X = -0.09128 ; X = 0.81044$
10.  $0.0524 \sqrt[5]{0.362^3 \cdot 0.8746^2} / 76.293^4 : \log X = \log 0.0524 + 1/5 (3 \log 0.362 + 2 \log 0.8746) - 4 \log 76.293$   
 $\log X = 2.71933 + 1/5 (2.17613 + 1.88362) + 8.47006 ; \log X = 10.90134$   
 $\log X = -9.09866 ; X = 7.9678 \cdot 10^{-10}$

## XI Resolver los siguientes ejercicios :

- Calcular en millas la circunferencia terrestre sabiendo que el radio (medio) de la Tierra es de 3959 millas. Fórmula  $C = 2\pi r$   
 $C = 2\pi \cdot 3959 ; \log C = \log 2 + \log \pi + \log 3959 ; \log C = 0.30103 + 0.49715 + 3.59759$   
 $\log C = 4.39577 ; C = 24875.4 \text{ millas.}$
- El peso en libras de una persona situada a  $m$  millas de la superficie terrestre está dada por la fórmula :  $W = 3960^2 W_0 / (3960 + m)^2$ , en donde  $W_0$  es un peso al nivel del mar. ¿Cuánto pesará un individuo a 80 millas de la superficie terrestre si su peso normal es de 160 lb?  
 $W = 3960^2 \cdot 160 / (3960 + 80)^2 ; \log W = 2 \log 3960 + \log 160 - 2 \log 4040$   
 $\log W = 7.19539 + 2.20412 - 7.21276 ; W = 153.73 \text{ libras}$
- En un motor Diesel se tiene  $P_2/P_1 = (V_1/V_2)^{1.32}$  en donde  $P_1$  y  $V_1$  son la presión y el volumen respectivamente, antes de la compresión.  $P_2$  y  $V_2$  son la presión y el volumen después de la compresión. Si la presión inicial es de 32 libras por pulgada cuadrada y  $V_2 = V_1/6$ , ¿cuánto vale  $P_2$ ?  
 $P_2 = P_1 (V_1/V_2)^{1.32} ; P_2 = P_1 (V_1/V_1/6)^{1.32} ; P_2 = P_1 (6)^{1.32} ; P_2 = 32(6)^{1.32}$   
 $\log P_2 = \log 32 + 1.32 \log 6 ; \log P_2 = 1.50515 + 1.02716 ; P_2 = 340.65 \text{ lb/pulg}^2$

4. La capacitancia (en micro Faradios) de un tendido eléctrico que se compone de dos hilos desnudos paralelos está dado por la fórmula:  $C = 0,0121 L / \log(d/r)$ , en donde  $L$  es la longitud de la línea en kilómetros,  $d$  la distancia entre los centros de hilos y  $r$  el radio de los hilos (expresados en la misma unidad). Hallar la capacitancia de una línea de 3 700 m de longitud, que se compone de dos hilos de cobre de 0,8 cm de diámetro separados 60 cm (distancia entre los centros de los hilos)\*.

$$d = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m} ; r = 0,4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; L = 3\,700 \text{ m}$$

$$C = 0,0121 L / \log(d/r) ; C = 0,0121 \cdot 3\,700 / \log(0,6 / 4 \cdot 10^{-3}) ; C = 0,0121 \cdot 3\,700 / \log 150$$

$$\log C = \log 0,0121 + \log 3\,700 - \log(\log 150) ; \log C = 2,08\,279 + 3,56\,820 - 0,33\,768$$

$$\log C = 1,31\,333 ; C = 20,57 \text{ P.f.d} ; C = 0,0205 \text{ m.f.d (microFaradios)}$$

5. El pH de una solución se define por la fórmula  $\text{pH} = \log 1/H$  en donde  $H$  es la concentración de iones de hidrógeno de la solución. Cuando  $\text{pH} = 7$  la solución es neutra, si  $\text{pH} > 7$  la solución es alcalina y si  $\text{pH} < 7$  la solución es ácida. Hallar el pH de una solución para la cual es  $H = 1,6 \cdot 10^{-5}$ .

$$\text{pH} = \log 1 / 1,6 \cdot 10^{-5} ; \text{pH} = \log 1 - \log 1,6 + 5 \log 10 ; \text{pH} = 5 - \log 1,6$$

$$\text{pH} = 5 - 0,20412 ; \text{pH} = 4,8$$

## XII Resolver las ecuaciones siguientes:

1.  $6^x = 30 ; x = \log 30 / \log 6 ; x = 1,47\,712 / 0,77\,815 ; x = 1,8982$

2.  $7^{x-1} = 21 ; x-1 = \log 21 / \log 7 ; x = 1,32\,222 / 0,84\,509 + 1 ; x = 2,56\,458$

3.  $5^{x+1} = 105 ; x+1 = \log 105 / \log 5 ; x = 2,02\,119 / 0,69\,897 - 1 ; x = 1,89\,167$

4.  $(26,7)^{x+2} = (1,9)^{2x-1} ; x \log 26,7 + 2 \log 26,7 = 2x \log 1,9 - \log 1,9$   

$$x = \frac{-\log 1,9 + 2 \log 26,7}{\log 26,7 - 2 \log 1,9} ; x = \frac{-0,27\,875 + 2,85\,302}{1,42\,651 - 0,55\,751} ; x = -3,604$$

5.  $4^x + 2^{x+2} = 96 ; 2^{2x} + 2^2 \cdot 2^x - 96 = 0 ; (2^x + 12)(2^x - 8) = 0 ; 2^x = -12 \text{ NO y } 2^x = 2^3 ; x = 3$

6.  $5^{x+1} + 25^x = 750 ; 5 \cdot 5^x + 5^{2x} = 750 ; 5^{2x} + 5 \cdot 5^x - 750 = 0 ; (5^x + 30)(5^x - 25) = 0$   
 $5^x = -30 \text{ NO y } 5^x = 5^2 ; x = 2$

7.  $\log(x+1) + \log(x-1) = 1,38\,021 ; \log(x+1)(x-1) = 1,38\,021 ; \log(x^2-1) = 1,38\,021$   
 $x^2-1 = 24 ; x = \pm 5 ; x = 5 \text{ y } x = -5 \text{ NO}$

## CAPITULO 19

## ELEMENTOS DE ALGEBRA FINANCIERA

## Ejercicio 187

- Hallar el interés simple que produce un capital de 1400\$ prestado al 0,03 por uno durante 8 meses.  
 $t = 8/12 = 2/3$   
 ecuación:  $i = crt$  ;  $i = 1400(0,03)(2/3)$  ;  $i = 18 \$$
- Hallar el interés simple que produce en 6 meses un capital de 1500\$ invertido en bonos del 5,5%.  
 $i = crt$  ;  $i = 1500(5,5/100)6/12$  ;  $i = 68,75 \$$
- Hallar el interés simple que gana un capital de 640\$ colocado durante un trimestre en cuenta de ahorros al 2,25%.  
 $i = crt$  ;  $i = 640(2,25/100)(3/12)$  ;  $i = 3,60 \$$
- Averiguar qué capital produce un interés simple de 72,50\$ colocado al 4% durante 60 días.  
 $c = ?$  ,  $i = 72,50 \$$  ,  $r = 0,04$  ,  $t = 60 \text{ días} = 1/6 \text{ años}$   
 $c = i/rt$  ;  $c = 72,50/0,04(1/6)$  ;  $c = 10\,875 \$$
- Hallar el capital que produjo 200\$ de interés simple invertido al 8% durante 3 años 4 meses.  
 $c = ?$  ,  $i = 200 \$$  ;  $r = 0,08$  ,  $t = 10/3$   
 $c = i/rt$  ;  $c = 200/0,08(10/3)$  ;  $c = 750 \$$
- ¿ Durante qué tiempo ha de estar colocado un capital de 24000\$ al 3,5% para producir 1400\$ de interés simple ?  
 $t = ?$  ,  $c = 24\,000$  ,  $r = 0,035$  ,  $i = 1400$   
 $t = i/cr$  ;  $t = 1400/24000 \cdot 0,035$  ;  $t = 5/3$  ;  $t = 1\,2/3$  ,  $t = 1 \text{ año}, 8 \text{ meses}$
- Hallar la tasa de interés a que estuvo colocado un capital de 6000\$ que produjo en 150 días un interés simple de 112,50\$.  
 $r = ?$  ,  $c = 6000 \$$  ,  $t = 5/12 \text{ años}$  ,  $i = 112,50$   
 $r = \frac{i}{ct}$  ;  $r = \frac{112,50}{6000(5/12)}$  ;  $r = 0,045$

8. Hallar el monto de un capital de 3 200\$ colocado al 2% de interés simple durante 5 años.  
 $M = C + i$  ;  $M = C + Cr\bar{t}$  ;  $M = C(1 + r\bar{t})$  ;  $M = 3\,200(1 + 0,02 \cdot 5)$  ;  $M = 3\,520\$$
9. Hallar al cabo de un año el monto de un capital de 8 000\$ colocado al 3%.  
 Si:  $\bar{t} = 1$  ;  $M = C(1 + r\bar{t})$  ;  $M = C(1 + r)$  ;  $M = 8\,000(1 + 0,03)$  ;  $M = 8\,240\$$
10. Hallar al cabo de un año el monto de un capital de 340\$ colocado al 5%.  
 $M = 340(1 + 0,05)$  ;  $M = 357\$$

### Ejercicio 188

- I Resuélvanse los problemas 1º a 10º utilizando las tablas de intereses:
1. Averiguar a cuánto asciende al cabo de 6 años un capital de 225\$ colocado al 5% de interés compuesto anual.  
 $C = C(1 + r)^n$  ;  $C = 225(1 + 0,05)^6$  ;  $C = 225(1,340096)$  ;  $C = 301,52\$$
  2. ¿A cuánto ascenderá dentro de 9 años un capital de 1 200\$ colocado al 6% de interés compuesto anual?  
 $C = C(1 + r)^n$  ;  $C = 1\,200(1 + 0,06)^9$  ;  $C = 1\,200(1,689479)$  ;  $C = 2\,027,4\$$
  3. Hallar el monto de 825,40\$ al 3,5% de interés compuesto durante 12 años.  
 $C = 825(1 + 0,035)^{12}$  ;  $C = 1\,246,63\$$
  4. Hallar el monto de 50\$ colocado durante 10 años al 8% (anual) de interés compuesto capitalizándose los intereses cada 6 meses.  
 interés semestral =  $8/2\%$  ; periodos  $\bar{t} = 20$  ;  $\bar{t} = 50(1 + 0,04)^{20}$  ;  $C = 109,56\$$
  5. Calcular a cuánto ascenderá un capital de 2 000\$ colocado al 6% anual de interés compuesto durante 8 años, si los intereses se capitalizan trimestralmente.  
 periodos  $\bar{t} = 24$ , interés trimestral  $6/3\%$  ;  $C = 2\,000(1 + 0,02)^{24}$  ;  $C = 3\,216,87\$$
  6. Hallar el rédito producido por un capital de 700\$ invertido al 2,5% de interés compuesto anual durante 5 años.  
 $I = C - c$  ;  $I = c[(1 + r)^n - 1]$   
 $I = 700[(1 + 0,025)^5 - 1]$  ;  $I = 700(1,131408 - 1)$  ;  $I = 91,98\$$



7. Hallar el rédito producido por un capital de 2 600\$ invertido al 4% de interés compuesto anual durante 15 años.

$$I = 2600[(1+0,04)^{15} - 1] ; I = 2082,45\$$$

8. ¿Qué rédito se obtiene colocando 600\$ a interés compuesto durante 8 años al 3% (anual) si los intereses se capitalizan semestralmente?

$$I = ? , C = 600\$ , \text{ periodos } t = 16 , \text{ interés semestral } 3/2\% ; I = 600[(1+0,015)^{16} - 1] ; I = 161,40\$$$

9. Impongo 2 800\$ al 2% de interés compuesto anual. ¿Cuánto tendré al cabo de 6 años?

$$C = C(1+r)^n ; C = 2800(1+0,02)^6 ; C = 3153,25\$$$

10. Se colocan 4 840\$ al 4% de interés compuesto. Los intereses se capitalizan trimestralmente. ¿En cuánto se convertirán al cabo de 3 años?

$$\text{interés trimestral} = 4/3\% , \text{ tiempo } t = 9$$

$$C = 4840(1+0,013)^9 ; \log C = \log 4840 + 9 \log 1,01333 ; \log C = 3,68484 + 0,05177$$

$$\log C = 3,73662 ; C = 5452,75\$$$

## II Resuélvanse los problemas 1º a 5º utilizando logaritmos, averiguar en cuánto se convertirá, colocado a interés compuesto, un capital de:

1. 675\$ al 2% en 7 años.

$$C = C(1+r)^n ; C = 675(1+0,02)^7 ; \log C = \log 675 + 7 \log 1,02 ; \log C = 2,82930 + 0,01010$$

$$\log C = 2,88950 ; C = 775,35\$$$

2. 1400\$ al 3,5% en 4 años.

$$C = 1400(1+0,035)^4 ; \log C = \log 1400 + 4 \log 1,035 ; \log C = 3,20583 ; C = 1626,53\$$$

3. 900\$ al 4% en 8 años.

$$C = 900(1+0,04)^8 ; \log C = \log 900 + \log 1,04 ; \log C = 2,95424 + 0,13627 ; C = 1231,71\$$$

4. 2700\$ al 5,5% en 3 años.

$$C = 2700(1+0,055)^3 ; \log C = \log 2700 + \log 1,055 ; \log C = 3,43136 + 0,04976 ; C = 3170,44\$$$

5. 6200\$ al 4,5% en 6 años.

$$C = 6200(1+0,045)^6 ; \log C = \log 6200 + \log 1,045 ; \log C = 3,79239 + 0,11469 ; C = 8073,94\$$$

## EJERCICIO 189

I Resuélvanse los problemas 1º al 10º utilizando las tablas de intereses:

1. Calcular el valor de una deuda de 800\$ pagadera dentro de 6 años si el tiempo de interés (compuesto) es el 3% anual.

$$C = 800; n = 6, r = 0,03 : C = C(1+r)^n ; C = 800(1+0,03)^6 ; C = 669,98 \$$$

2. Retrotraer a la actualidad una suma de 3400\$ pagadera dentro de 5 años, calculando los intereses al 2,5%.

$$C = C(1+r)^n ; C = 3400(1+0,025)^5 ; C = 3005,1 \$$$

3. Averiguar el capital que habrá que colocar al 5% de interés compuesto para tener 2000\$ al cabo de 20 años.

$$C = C(1+r)^n ; C = 2000(1+0,05)^{-20} ; C = 753,78 \$$$

4. Hallar el capital que importará 900\$ al cabo de 12 años invertido al 3,5% de interés compuesto.

$$C = C(1+r)^n ; C = 900(1+0,035)^{-12} ; C = 595,60 \$$$

5. Determinar el valor actual de 680\$ pagaderos dentro de 9 años si el tiempo de interés es el 4%.

$$C = C(1+r)^n ; C = 680(1+0,04)^{-9} ; C = 477,76 \$$$

6. Calcular el valor actual de 700\$ pagaderos dentro de 4 años si el tiempo de interés es el 6% anual y los intereses se capitalizan semestralmente. interés semestral 6/2 ; t = 8

$$C = C(1+r)^n ; C = 700(1+0,03)^{-8} ; C = 552,59 \$$$

7. ¿Cuánto necesita depositar hoy el 4% anual de interés compuesto capitalizado trimestralmente para tener 1000\$ dentro de 10 años?

$$\text{interés trimestral } 4/3, \text{ periodos } 30 : C = C(1+r)^n ; C = 1000(1+0,0133)^{-30} ; C = 672,75 \$$$

8. Hallar el valor actual de 1870\$ pagadero dentro de 3 años, si se conviene hacer el descuento al 5% de interés compuesto anual.

$$C = C(1+r)^n ; C = 1870(1+0,05)^{-3} ; C = 1615,38 \$$$

9. José depositó cierta cantidad en cuenta de ahorro el 1º de Agosto de 1950 y en igual fecha de 1956 tenía 591,59\$. Si los intereses fueron capitalizados semestralmente al 2% anual, ¿a cuánto ascendió su depósito originalmente?

$$\text{años} = 6, \text{ periodos} = 12, \text{ interés semestral } 2/2 \% ; C = 591,59(1+0,01)^{-12} ; C = 525 \$$$

10. ¿Cuánto vale en la actualidad una deuda de 8000 \$ pagable dentro de 20 años, si el interés fijado es el 6% anual? \* corregir la respuesta del texto  
 $C = 8000(1+0,06)^{-20}$ ;  $C = 2494,44 \$$

II. Resuélvanse los problemas siguientes utilizando logaritmos. Hallar el valor actual de:

1. 425,76 \$ descontado 8 años al 3%  
 $C = F(1+r)^{-n}$ ;  $C = 425,76(1+0,03)^{-8}$ ;  $\log C = \log 425,76 - 8 \log 1,03$ ;  $C = 336,09 \$$
2. 500 \$ descontado 10 años al 4%  
 $C = 500(1+0,04)^{-10}$ ;  $\log C = \log 500 - 10 \log 1,04$ ;  $\log C = 2,52864$ ;  $C = 337,80 \$$
3. 1260 \$ descontado 4 años al 5%  
 $C = 1260(1+0,05)^{-4}$ ;  $\log C = \log 1260 - 4 \log 1,05$ ;  $\log C = 3,01561$ ;  $C = 1036,41 \$$   
 \* corregir el planteo del problema la respuesta corresponde a 5 años y no 4 años.
4. 300 \$ descontado 7 años al 2%  
 $C = 300(1+0,02)^{-7}$ ;  $\log C = \log 300 - 7 \log 1,02$ ;  $\log C = 2,41692$ ;  $C = 261,17 \$$
5. 850 \$ descontado 3 años al 6% anual pero suponiendo que los intereses se capitalizan trimestralmente.  
 interés trimestral =  $6/3\%$ , periodos 9  
 $C = 850(1+0,02)^{-9}$ ;  $\log C = \log 850 - 9 \log 1,02$ ;  $\log C = 2,85202$ ;  $C = 711,25 \$$

### Ejercicio 190

1. Averiguar a qué tanto por ciento de interés compuesto estuvo colocado un capital de 700 \$ que en 6 años se convirtió en 885,72 \$  
 $C = C(1+r)^n$ ;  $r = \sqrt[n]{\frac{F}{C}} - 1$ ;  $r = \sqrt[6]{\frac{885,72}{700}} - 1$ ;  $\log(1+r) = 1/6(\log 885,72 - \log 700)$   
 $\log(1+r) = 0,01703$ ;  $1+r = 1,03999$ ;  $r = 0,03999$ ;  $r = 4\%$
2. Determinar el tanto por uno al cual se debe colocar a interés compuesto un capital de 200 \$ para tener 358,17 \$ en 10 años.  
 $C = C(1+r)^n$ ;  $1+r = \sqrt[10]{\frac{358,17}{200}}$ ;  $\log(1+r) = 1/10(\log 358,17 - \log 200)$   
 $1+r = 1,060$ ;  $r = 0,06$ ;  $r = 6\%$

3. Hay que invertir ahora 641,86 \$ a interés compuesto para tener 10 000 \$ dentro de 15 años.  
¿Qué tipo de interés gana el capital a si invertido?

$$1+r = \sqrt[15]{\frac{10\,000}{641,86}} ; \log(1+r) = 1/15(\log 10\,000 - \log 641,86) ; 1+r = 1,2$$

$$r = 0,2, \quad r = 20\%$$

4. Un capital de 2500 \$ colocado al 5% de interés compuesto importó 3 038,80 \$  
¿cuántos años duró la inversión?

$$C = c(1+r)^n ; 3\,038,80 = 2\,500(1+0,05)^n ; n = \log 1,21\,552 / \log 1,05 ; n = 4 \text{ años}$$

5. ¿Cuánto tiempo estuvo colocado un capital de 500 \$ al 2% de interés compuesto para convertirse en 585,83?

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)} ; n = \frac{\log 585,83 - \log 500}{\log(1+0,02)} ; n = 8 \text{ años}$$

6. Hallar el tiempo que estuvo colocado al 3,5 % de interés compuesto un capital de 730 \$ que produjo 264,90 \$ de rédito.

$$I = C - c ; I = c[(1+r)^n - 1] ; 264,90 = 730[(1+0,035)^n - 1]$$

$$n = \log 1,362\,877 / \log 1,035 ; n = 9 \text{ años}$$

7. Un bono se puede comprar por 18,75 \$ y vale 25 \$ al cabo de 10 años. Si los intereses se capitalizan semestralmente, ¿cuál es la tasa de interés fijado a estos bonos?

$$c = 18,75 \$, C = 25 \$, \text{ periodos} = 20 ; \text{ interés semestral } r/2$$

$$C = c(1+r)^n ; 25 = 18,75(1+r/2)^{20} ; \log(1+r/2) = \log 25 - \log 18,75 / 20$$

$$1+r/2 = 1,01448 ; r/2 = 0,1448 ; r = 0,289 ; r = 2,9\% \text{ anual}$$

8. También se pueden comprar otros bonos por 75 \$ cuando uno, los cuales alcanzan un valor de 100 \$ al cabo de 10 años. Si los intereses se capitalizan semestralmente, ¿cuál es la tasa del interés fijados a estos bonos?

$$\log(1+r/2) = \log 100 - \log 75 / 20 ; 1+r/2 = 1,029\,186 ; r/2 = 2,9\%$$

9. ¿En cuánto tiempo 450 \$ se convertirán en 570,70 \$ al 4 % de interés compuesto si las capitalizaciones son cada 6 meses?

$$\text{interés semestral} = 4/2\%$$

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)} ; n = \frac{\log 570,70 - \log 450}{\log(1+0,02)} ; n = 12$$

$$n = 12 \text{ si es el interés anual, como es semestral } n/2 = 6 \text{ años}$$

10. Se obtiene 2445 \$ de una inversión original de 1000 \$ durante 15 años. Si el interés se capitalizó trimestralmente, ¿a qué tipo de interés (anual) se realizó la inversión?  
 interés trimestral  $r/3$ , periodos 45  
 $\log(1+r/3) = \log 2445 - \log 1000/45$ ;  $r = 0,06$ ;  $r = 6\%$  anual.
11. ¿Cuántos años se necesitan para que 500 \$ se conviertan en 640 \$ capitalizándose los intereses semestralmente al 2,5% semestral?  
 interés anual será  $2(2,5) = 5\%$   
 $n = \log C - \log c / \log(1+r)$ ;  $n = \log 640 - \log 500 / \log(1+0,05)$ ;  $n = 5$  años
12. Averiguar a qué tanto por ciento anual 800 \$ producen 183,40 \$ de intereses totales al cabo de 6 años.  
 $I = C[(1+r)^n - 1]$ ;  $183,40 = 800[(1+r)^6 - 1]$ ;  $\log(1,22925) = 6 \log(1+r)$   
 $r = 0,035$ ;  $3,5\%$  ó  $3\frac{1}{2}\%$

### Ejercicio 191

1. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital colocado al 4% de interés compuesto?  
 Como  $C = 2c$ ;  $n = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)}$ ;  $n = \frac{\log 2c - \log c}{\log(1+0,04)}$ ;  $n = \frac{\log 2 + \log c - \log c}{\log 1,04}$ ;  $n = 17,68$  años
2. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital colocado al 3% de interés compuesto?  
 $n = \frac{\log 2 + \log c - \log c}{\log(1+0,03)}$ ;  $n = 23,45$  años
3. ¿Cuánto tiempo necesita un capital colocado al 6% de interés compuesto para triplicarse?  
 $C = 3c$ ;  $n = \frac{\log 3 - \log c + \log c}{\log(1+0,06)}$ ;  $n = 19,65$  años
4. ¿En qué año hubiera sido necesario depositar 1 \$ al 3% de interés compuesto para tener ahora 1000 000 \$?  
 $n = \frac{\log 1000\,000 - \log 1}{\log(1+0,03)}$ ;  $n = \frac{6}{\log 1,03}$ ;  $n = 467,39$  años

5. Se invierten 300 \$ al 5% anual durante 4 meses. Calcular el monto simple  $M_s = c(1+rt)$  y el compuesto  $M_c = c(1+r)^t$  con  $t = 4/12 = 1/3$  ¿Cuál es mayor? ¿Y si el tiempo fuese 1 año y 4 meses? Generalicémos estos resultados utilizando la fórmula del binomio para desarrollar  $(1+r)^t$ .

a.- para  $t = 1/3$  :  $M_s = 300[1+0,05(1/3)]$  ;  $M_s = 305$  \$

$M_c = 300(1+0,05)^{1/3}$  ;  $M_c = 304,91$  \$

b.- si  $t = 1$  año 4 meses ;  $t = 1 + 4/12$  ;  $t = 4/3$  :  $M_s = 300[1+0,05(4/3)]$  ;  $M_s = 320,00$  \$

$M_c = 300[1+0,05]^{4/3}$  ;  $M_c = 320,16$  \$

En conclusión : Si  $t < 1 \Rightarrow M_s > M_c$

$t > 1 \Rightarrow M_s < M_c$

$t = 1 \Rightarrow M_s = M_c$

Cuando  $t = 1 \Rightarrow M_s = 300(1+0,05(1))$  ;  $M_s = 315$

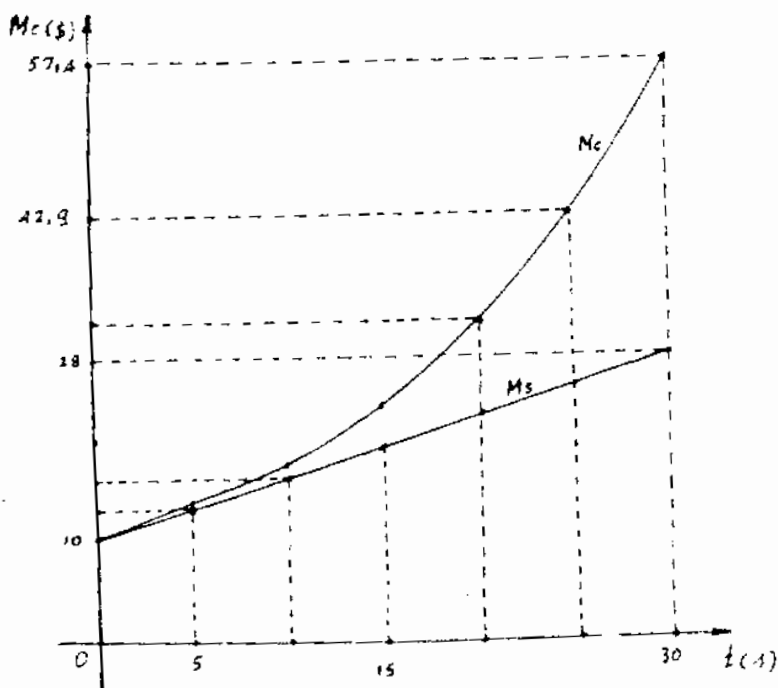
$M_c = 300(1+0,05)^1$  ;  $M_c = 315$

### Ejercicio 192

Construir una gráfica comparativo de los monto simple y compuesto para  $c = 10$  \$ ;  $r = 0,06$  y para valores de  $t$  entre  $t = 0$  y  $t = 30$

Escala  $1 \text{ cm} \approx 57,4$

$M_s$	10	13	16	19	25	28
$M_c$	10	14,2	17,9	24	42,9	57,4
$t$	0	5	10	15	25	30



## Ejercicio 193

1. Hallar el tipo de interés efectivo equivalente a un tipo nominal de 6% capitalizable trimestralmente.

$$r = ? , K = 4 \text{ (cuatro meses al año)} ; r = 0,06$$

$$1 + r' = (1 + r/K)^K ; 1 + r' = (1 + 0,06/4)^4 ; r' = 0,06131 \Rightarrow 6,131\%$$

2. Hallar el tipo de interés efectivo equivalente a un tipo nominal de 4% capitalizable semestralmente.

$$K = 2, r' = ? , r = 0,04 ; 1 + r' = (1 + 0,04/2)^2 ; r' = 0,0404 \Rightarrow 4,04\%$$

3. Hallar el tipo de interés efectivo equivalente a un tipo nominal de 6% capitalizable mensualmente.

$$K = 12 ; 1 + r' = (1 + 0,06/12)^{12} ; r' = 0,06168 \Rightarrow 6,168\%$$

4. Hallar el tipo de interés efectivo equivalente a un tipo nominal de 5% capitalizable semestralmente.

$$K = 2 ; 1 + r' = (1 + 0,05/2)^2 ; r' = 0,050625 \Rightarrow 5,06\%$$

5. En la fórmula (1) despejar el interés nominal  $r$  en función del interés efectivo  $r'$ .

$$1 + r' = (1 + r/K)^K ; (1 + r')^{1/K} = 1 + r/K ; K[(1 + r')^{1/K} - 1] = r$$

6. Hallar el tipo de interés nominal capitalizable trimestralmente equivalente a un tipo de interés efectivo de 6%.

$$K = 4, r' = 0,06, r = ? ; r = K[(1 + r')^{1/K} - 1] ; r = 4[(1 + 0,06)^{1/4} - 1] ; r = 0,0587 \Rightarrow 5,87\%$$

7. Hallar el tipo de interés nominal capitalizable semestralmente equivalente a un tipo de interés efectivo de 5%.

$$r = 2[(1 + 0,05)^{1/2} - 1] ; r = 0,0494 \Rightarrow 4,94\%$$

8. Hallar el tipo de interés nominal capitalizable mensualmente, equivalente a un tipo de interés efectivo de 8%.

$$K = 12 ; r = 12[(1 + 0,08)^{1/12} - 1] ; r = 0,0772 \Rightarrow 7,72\%$$

## Ejercicio 194

1. Hallar el monto de una imposición anual de 500\$ colocada al 3% durante 10 años, si los pagos son vencidos.

$$A = a \frac{(1+r)^n - 1}{r} ; A = 500 \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{0,03} ; A = 5\,731,94 \$$$

2. Hallar el monto de una imposición trimestral (anticipada) de 80\$ efectuada durante 5 años al 6% anual. Utilícese la tasa nominal correspondiente.

$$n = 20, r = 6/4\%, r = 0,015 : A = a \frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r} ; A = 80 \frac{(1+0,015)[(1+0,015)^{20} - 1]}{0,015} ; A = 1\,877,64 \$$$

3. Hallar el monto de una imposición anual de 400\$ colocada al 4% durante 12 años si los pagos son anticipados.

$$A = a \frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r} ; A = 400 \frac{(1+0,04)[(1+0,04)^{12} - 1]}{0,04} ; A = 6\,250,74 \$$$

4. Determinar la anualidad (vencida) que colocada al 3% permite acumular en 25 años un capital de 2000\$.

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} ; a = \frac{2000(0,03)}{(1+0,03)^{25} - 1} ; a = 54,86 \$$$

5. ¿Qué anualidad (anticipada) se necesita para acumular al 2,5% un capital de 5000\$ en 15 años?

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^{n+1} - (1+r)} ; a = \frac{5000(0,025)}{(1+0,025)^{15+1} - (1+0,025)} ; a = 272,03 \$$$

6. Hallar el valor de la mensualidad (vencida) necesaria para constituir en 4 años un capital de 3600\$ si gana un interés de 6% anual. Utilícese: a) la tasa mensual nominal correspondiente; b) la tasa efectiva correspondiente.

$$a.. r = 6/12\% = 5 \cdot 10^{-3}, n^{\circ} \text{ periodos} = 4(12) = 48$$

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} ; a = \frac{3600 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{(1+5 \cdot 10^{-3})^{48} - 1} ; a = 66,55 \$$$



7. Hallar el valor actual del monto de una anualidad (vencida) de 200 \$ al 8% durante 10 años.

$$A = 200 \$ ; r = 0,08, n = 10 \text{ años}, P = ?$$

$$P = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} ; P = 200 \frac{1 - (1+0,08)^{-10}}{0,08} \rightarrow P = 1342,02 \$$$

8. Hallar el valor actual del monto de una anualidad (anticipada) de 120 \$ al 5% durante 30 años.

$$A = 120 \$ ; r = 0,05, n = 30 \text{ años}, P = ?$$

$$P = a(1+r) \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} ; P = 120(1+0,05) \frac{1 - (1+0,05)^{-30}}{0,05} \rightarrow P = 1936,93 \$$$

9. ¿Cuántos años se necesitan para constituir con una anualidad (vencida) de 150 \$ colocada al 4% un capital de 3000 \$?

$$n = ? ; a = 150 \$, r = 0,04, A = 3000 \$$$

$$A = a \frac{(1+r)^n - 1}{r} ; n = \frac{\log(A/r + 1)}{\log(1+r)} ; n = \frac{\log\left(\frac{3000 \cdot 0,04}{150} + 1\right)}{\log(1+0,04)} \rightarrow n = 15 \text{ años}$$

10. Averiguar cuántos años se necesitan para constituir un capital de 5000 \$ con una anualidad (anticipada) de 423,45 \$ colocada al 3%.

$$n = ? ; A = 5000 \$ ; a = 423,45 \$ ; r = 0,03$$

$$A = a \frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r} ; n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a(1+r)}{\log(1+r)}$$

$$n = \frac{\log[5000(0,03) + 423,45(1+0,03)] - \log 423,45(1+0,03)}{\log(1+0,03)} \rightarrow n = 10 \text{ años}$$

### Ejercicio 195

1. Un individuo toma a préstamo 6000 \$ al 8% para amortizar en 5 años. ¿A cuánto ascenderán las anualidades?

$$C = 6000 \$ ; r = 0,08 ; n = 5 \text{ años} ; a = ?$$

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} ; a = \frac{6000(0,08)(1+0,08)^5}{(1+0,08)^5 - 1} \rightarrow a = 1502,74 \$$$

2. Se hace un préstamo de 9000 \$ al 6% anual para amortizar por mensualidades en un término de 8 años. ¿A cuánto ascenderán las mensualidades? Úsese 0,5% como tipo de interés mensual.

$$C = 9000 \$ ; r = 0,06 ; n = 8 \rightarrow 96 \text{ meses} ; T = 0,5 \% \text{ mensual} ; r = 0,005$$

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} ; a = \frac{9000(0,005)(1+0,005)^{96}}{(1+0,005)^{96} - 1} \rightarrow a = 118,27 \$$$

3. Si las condiciones de un negocio permiten el pago de una anualidad de 1500 \$, ¿cuánto se podrá tomar a préstamo al 5% para amortizar en 20 años?
- $a = 1500 \$$ ;  $r = 0,05$ ;  $n = 20 \text{ años}$ ;  $c = ?$
- $$c = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; c = 1500 \frac{1 - (1+0,05)^{-20}}{0,05} \rightarrow c = 18633,32 \$$$
4. Hay que pagar una deuda de 10 000 \$ dentro de 6 años para lo cual se desea constituir un fondo de amortización. Si las anualidades ganan el 3% de interés compuesto, ¿a cuánto ascenderá el valor de cada anualidad?
- $c = 10000 \$$ ;  $n = 6 \text{ años}$ ;  $r = 0,03$
- $$a = \frac{cr}{(1+r)^n - 1}; a = \frac{10000(0,03)}{(1+0,03)^6 - 1} \rightarrow a = 1546 \$$$
5. Se forma un fondo de amortización para el pago de una deuda de 20 000 \$ en 12 años, mediante el depósito semestral de cantidades que devengan el 2% semestral. ¿A cuánto ascenderá el fondo al cabo de 3 1/2 años?
- $$a = \frac{cr}{(1+r)^n - 1}; a = \frac{20000(0,02)}{(1,02)^{24} - 1} \rightarrow a = 999,4 \$$$

### Ejercicio 196

Suponiendo que el inversionista desee obtener un interés de 3% semestral, determinar el precio de compra en los casos siguientes. En todos estos casos los bonos devengan dividendos semestralmente.

1. 20 bonos de 100 \$ al 5% redimibles dentro de 10 años a la par.
- $20(100 \$) = 2000 \$$  Valor actual  $c = C(1+r)^{-n}; c = 2000(1+0,03)^{-10} \rightarrow c = 1107,3515 \$$
- Los 20 bonos producen en dividendo semestral  $20(100)(0,025) = 50$
- Valor actual del monto de la anualidad  $P; P = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; P = 50 \frac{1 - (1+0,03)^{-10}}{0,03}; P = 1851,2252 \$$
- Precio de compra  $c + P = 1107,3515 + 1851,2252 \rightarrow = 1851,22 \$$
2. 25 bonos de 500 \$ al 4 1/2 % redimibles dentro 20 años a 525 \$.
- Precio de redención  $25(525 \$) = 13125 \$$
- $c = C(1+r)^{-n}; c = 13125(1+0,03)^{-40}; c = 4023,5585 \$$
- Los 25 bonos producen semestralmente:  $25(500 \$)(0,0225) = 281,25 \$$
- $P = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; P = 281,25 \frac{1 - (1+0,03)^{-40}}{0,03}; P = 6501,0296$  Precio de compra
- $c + P = 10524,59 \$$

3. 10 bonos de 100\$ al 4% redimibles dentro de 5 años a 106\$.

$$10(106) = 1060$$

$$C = 1060(1+0,03)^{-10}; C = 788,73955$$

$$\text{los 10 bonos producen semestralmente } 10(100)(0,02) = 20$$

$$P = \frac{20[1-(1+0,03)^{-10}]}{0,03}; P = 170,60406$$

$$\text{Precio de compra } C+P = 788,73955 + 170,60406$$

$$= 959,34 \$$$

4. 30 bonos de 50\$ al 5% redimibles dentro de 8 años a la par.

$$30(50\$) = 1500 \$$$

$$C = 1500(1+0,03)^{-16}; C = 934,75041$$

$$\text{Los 30 bonos producen semestralmente } 30(50\$)(0,025) = 37,5$$

$$P = \frac{37,5[1-(1+0,03)^{-16}]}{0,03}; P = 471,04133$$

$$\rightarrow C+P = 1405,79 \$$$

5. 100 bonos de 25\$ al 4 1/2 % redimibles dentro de 12 años a 27,50\$

$$100(27,50\$) = 2750 \$$$

$$C = 2750(1+0,03)^{-24}; C = 1352,8178 \$$$

$$\text{Los 100 bonos producen semestralmente } 100(25\$)(0,0225) = 56,25 \$$$

$$P = \frac{56,25[1-(1+0,03)^{-24}]}{0,03}; P = 952,62424$$

$$\rightarrow C+P = 2305,44 \$$$

### Ejercicio 197

1. ¿Qué capital invertido al 6% produce una perpetuidad de 180\$ anuales?

$$P = \frac{a}{r}; P = \frac{180}{0,06} \rightarrow P = 3000 \$$$

2. El propietario de un terreno paga una anualidad de 150\$ por un censo que lo grava. Capitalizando al 4%, ¿a qué precio podrá redimirse el censo?

$$P = 150/0,04 \rightarrow P = 3750 \$$$

3. Hallar el valor actual de una perpetuidad de 200\$ semestrales, si el tipo de interés es el 5% anual.

$$200 \$ \text{ semestral} = 400 \$ \text{ anual}$$

$$P = 400/0,05 \rightarrow P = 8000 \$$$

### Ejercicio 198 (REPASO).

1. El interés simple sobre cierta suma al 5% durante 8 meses es 20\$. ¿Cuál sería el interés correspondiente al 4%?

$$\begin{array}{l} 5\% \dots \rightarrow 20\$ \\ 4\% \dots \rightarrow x \end{array} \quad X = \frac{4 \cdot 20}{5} \rightarrow X = 16\$$$

2. ¿Qué capital colocado al 3,5% produce un interés simple de 367,50\$ en dos años y medio?

$$I = \frac{C T t}{100}; C = \frac{100 I}{T t}; C = \frac{100 (367,50)}{3,5 (2,5)} \rightarrow C = 4\,200\$$$

3. Hallar en un año el monto de 700\$ al 6%.

$$I = \frac{700 (6) (1)}{100}; I = 42 \rightarrow M = C + I; M = 742\$$$

4. Hallar en 3 años el monto de 950\$ al 4% de interés simple.

$$M = C + I; M = 950 + \frac{950 (4) (3)}{100} \rightarrow M = 1\,064\$$$

5. ¿Qué capital colocado al 3% de interés simple produce en 1 año 9 meses un monto de 252,60\$?

$$M = C + I; C = M - I; C = 1200 I / T t; I = C T t / 1200$$

$$C = M - \frac{C T t}{1200}; C = \frac{1200 M}{1200 + T t}; C = \frac{1200 (252,60)}{1200 + 3 (21)} \rightarrow C = 240\$$$

6. Mostrar que cuando el tipo de interés es el 6% y el tiempo es de 60 días, para hallar el interés basta mover la coma decimal dos lugares a la izquierda en el número que expresa el capital. Ilústrese con un ejemplo. ¿Qué regla puede seguirse para hallar el interés al 3% por 60 días? ¿Y al 3% por 30 días?

Sea un capital de 2000\$  $\Rightarrow$  El  $I_1 = 20\$$  moviendo dos lugares la coma;

a. Demostración:  $I_1 = \frac{C T t}{36000}$  (en días);  $I_1 = \frac{2000 (6) (60)}{36000}$ ;  $I_1 = 20\$ \rightarrow I_1 = I_2$

b.  $I_1 = \frac{C \cdot 3 \cdot 60}{36000}$ ;  $I_1 = \frac{C}{200}$   $I_2 = \frac{C \cdot 3 \cdot 30}{36000}$ ;  $I_2 = \frac{C}{400} \Rightarrow I_1 = 2 I_2$  regla

[En los problemas siguientes hágase el cálculo con auxilio de tablas de intereses o por logaritmos, según se prefiera. Las respuestas se dan con sus cifras exactas (error menor que media unidad del orden de la última cifra conservada).]

7. Hallar el monto de 720\$ colocados al 5% de interés compuesto durante 8 años.

$$C = c(1+r)^n; C = 720(1+0,05)^8; C = 1\,063,77\$$$

8. Hallar el monto de 180\$ colocado al 3,5% de interés compuesto durante 10 años.

$$C = 180(1+0,035)^{10}; C = 253,91\$$$

9. Calcular el monto de 423,75\$ colocados al 2,5% de interés compuesto durante 6 años.

$$C = 423,75(1+0,025)^6; C = 491,42\$$$

10. ¿En cuánto se convertirán 500\$ al cabo de 15 años colocados al 4% de interés compuesto (anual) si los intereses se capitalizan semestralmente?

$$C = c \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n} ; C = 500 \left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{30} \rightarrow C = 905,68 \$$$

11. Determinar los intereses totales producidos por un capital de 400\$ colocados al 7% de interés compuesto durante 9 años.

$$I = C - c ; I = C(1+r)^n - c ; I = 400(1+0.07)^9 - 400 \rightarrow I = 335,38 \$$$

12. ¿Qué capital colocado al 6% de interés compuesto se convierte al cabo de 10 años en 2000\$?

$$c = C(1+r)^{-n} ; c = 2000(1+0.06)^{-10} ; c = 1116,79 \$$$

13. ¿Cuánto se necesita depositar ahora al 2% (anual) capitalizable trimestralmente para tener 1500\$ dentro de 8 años?

$$c = C \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{-4n} ; c = 1500 \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{-32} \rightarrow c = 1278,73 \$$$

14. Calcular el valor actual de una deuda de 900\$ pagable dentro de 3 años si el tipo de interés es el 5% anual.

$$c = C(1+r)^{-n} ; c = 900(1+0.05)^{-3} \rightarrow c = 777,45 \$$$

15. Referir a la actualidad una suma de 1420\$ pagadera dentro de 7 años calculando los intereses al 3%.

$$c = C(1+r)^{-n} ; c = 1420(1+0.03)^{-7} \rightarrow c = 1154,59 \$$$

16. ¿A qué tanto por ciento se colocó a interés compuesto una suma de 600\$ que al cabo de 10 años se convirtió en 846,36\$?

$$C = c(1+r)^n ; 846,36 = 600(1+r)^n ; 1,4106 = (1+r)^n ; 10 \log(1+r) = \log 1,4106$$

$$\log(1+r) = 0,0149403 ; 1+r = 1,035 ; r = 0,035 \rightarrow T = 3,5 \%$$

17. El puente del Don (Aberdeen, Escocia) fue construido con el importe de un fondo equivalente a 12,06 dólares que se habían depositado en el año 1320 para el mantenimiento de otro puente. En 1831 el monto ascendía a 85000 dólares. Suponiendo que las capitalizaciones se hiciesen anualmente, ¿a qué tipo de interés estuvo invertido el dinero?

$$1+r = \sqrt[n]{C/c} ; 1+r = \sqrt[511]{85000/12,06} ; \log(1+r) = 1/511 (\log 85000 - \log 12,06)$$

$$\log(1+r) = 7,33 \cdot 10^{-3} ; 1+r = 1,01749 ; r = 0,0175 \rightarrow T = 1,75 \%$$

18. Un individuo comienza un negocio con 30000\$ y a los 5 años encuentra que su capital se ha duplicado. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto hubiera tenido que colocar su dinero para lograr esto mismo?

$$1+r = \sqrt[n]{C/c} ; 1+r = \sqrt[5]{60000/30000} ; 1+r = \sqrt[5]{2} ; \log(1+r) = 1/5 \log 2$$

$$1+r = 1,1486 ; r = 0,148 \rightarrow T = 14,87 \%$$

19. ¿Cuántos años estuvo invertido un capital de 3300\$ que al 6% se convirtió en 8886,15\$?

$$C = c(1+r)^n ; n = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)} ; n = \frac{\log 8886,15 - \log 3300}{\log(1+0.06)} \rightarrow n = 17 \text{ años}$$

20. ¿Qué tiempo necesita un capital para triplicarse al 4% de interés compuesto?

$$C = 3c ; 3c = c(1+r)^n ; 3 = (1+0.04)^n ; n = \log 3 / \log 1.04 ; n = 28,016 \rightarrow n \approx 28 \text{ años}$$

21. Determinar el tipo de interés efectivo anual equivalente a uno nominal de 8% capitalizable semestralmente.

$$r' = \text{tipo de interés efectivo} ; r = \text{tipo de interés nominal}$$

$$1 + r' = \left(1 + \frac{r}{K}\right)^K ; 1 + r' = \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^2 ; r' = 0,0816 \rightarrow T = 8,16\%$$

22. Si se quiere que el tipo de interés efectivo anual sea el 6%. ¿cuál será la tasa equivalente de capitalización semestral?

$$1 + \frac{0,06}{2} = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 ; r^2 + 4r - 0,12 = 0 ; r = 0,0297 \rightarrow T = 2,97\%$$

23. Hallar el monto de una imposición anual (vencida) de 150\$ colocada al 4% durante 12 años.

$$A = a \frac{(1+r)^n - 1}{r} ; A = 150 \frac{(1,04)^{12} - 1}{0,04} \rightarrow A = 2253,87 \$$$

24. Hallar el monto de una imposición anual (anticipada) de 225\$ colocada al 3% durante 10 años.

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^{n+1} - (1+r)} ; A = \frac{a[(1+r)^{n+1} - (1+r)]}{r} ; A = \frac{225[(1,03)^{11} - 1,03]}{0,03} \rightarrow A = 2656,75 \$$$

25. ¿Qué anualidad (anticipada) se necesita para acumular 20000\$ al 3,5% en 25 años?

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^{n+1} - (1+r)} ; a = \frac{20000(0,035)}{(1,035)^{26} - 1,035} \rightarrow a = 496,12 \$$$

26. ¿Qué anualidad (vencida) se necesita para acumular 8000\$ al 2,5% en 15 años?

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} ; a = \frac{8000(0,025)}{(1+0,025)^{15} - 1} \rightarrow a = 446,13 \$$$

27. Calcular el valor actual del monto de una anualidad (vencida) de 125\$ colocada al 4% durante 20 años.

$$P = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} ; P = 125 \frac{1 - (1+0,04)^{-20}}{0,04} \rightarrow P = 1698,79 \$$$

28. Calcular el valor actual del monto de una anualidad (anticipada) de 200\$ colocada al 4,5% durante 16 años.

$$P = a(1+r) \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} ; P = 200(1+0,045) \frac{1 - (1+0,045)^{-16}}{0,045} \rightarrow P = 2347,91 \$$$

29. Averiguar el número de años que se necesitan para acumular con una anualidad (anticipada) de 60\$ colocada al 5% un capital de 5690,18\$.

$$A = a \frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r} ; n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a(1+r)}{\log(1+r)}$$

$$n = \left\{ \log[5690,18(0,05) + 60(1+0,05)] - \log 60(1+0,05) \right\} / \log(1+0,05) \rightarrow n = 35 \text{ años}$$

30. Con mensualidades vencidas de 75\$ colocadas al 3% anual, capitalizables mensualmente al tipo nominal correspondiente, ¿en cuánto tiempo se podrá constituir un capital de 5374,51\$?

$$\text{Tasa nominal } 3\% / 12 = 0,25\% \rightarrow r = 0,0025$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{Ar}{a} + 1\right)}{\log(1+r)} ; n = \frac{\log\left(5374,51 \cdot \frac{0,0025}{75} + 1\right)}{\log(1+0,0025)} ; n = 66 \text{ meses} \rightarrow n = 5 \frac{1}{2} \text{ años}$$

31. Hallar el valor de la anualidad necesaria para amortizar una deuda de 6000\$ en 8 años al 5% de

interés anual.

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}; a = \frac{6000(0,05)(1+0,05)^8}{(1+0,05)^8 - 1} \rightarrow a = 928,33 \$$$

32. ¿Qué mensualidad debe pagarse para amortizar en 6 años un préstamo de 8 500\$ al 9% anual? Utilícese el tipo nominal correspondiente (0,75%).  $r/12 = 0,75\%$

$$a = \frac{C \frac{r}{12} (1 + \frac{r}{12})^{12n}}{(1 + \frac{r}{12})^{12n} - 1}; a = \frac{8500(0,0075)(1+0,0075)^{72}}{(1+0,0075)^{72} - 1}; a = 153,22 \$$$

33. Si se dispone de una anualidad de 300\$, ¿cuánto se podrá tomar a préstamo al 8% para amortizar en 15 años?

$$C = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; C = 300 \frac{1 - (1+0,08)^{-15}}{0,08} \rightarrow C = 2567,84 \$$$

34. Una compañía de préstamos anuncia lo siguiente: "Tome prestado 300\$ y pague 27,50\$ al final de cada mes durante 12 meses. Esto incluye el interés sobre el saldo no pagado a razón de 1% mensual". ¿Es correcto el anuncio?

El préstamo es 300\$ y paga  $27,5(12) = 330$

si  $C = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; C = 27,5 \frac{1 - (1+0,01)^{-12}}{0,01}; C = 309,51$  No es correcto pues debe pagar solo 309,51\$ y no 330\$

35. Para pagar una deuda de 13 000\$ dentro de 6 años se constituye un fondo de amortización. ¿A cuánto ascenderán las anualidades si ganan el 3,5% de interés compuesto?

$$a = Cr / (1+r)^n - 1; a = 13000(0,035) / (1+0,035)^6 - 1 \rightarrow a = 1984,69 \$$$

36. Para hacer una obra un municipio ha emitido bonos por valor de 100 000\$ los cuales son redimibles dentro de 25 años. Si establece un Fondo de amortización para pagar la deuda, ¿cuánto debe depositar anualmente en la Caja Postal de Ahorros? La Caja abona el 3% de interés compuesto anual sobre los depósitos.

$$a = Cr / (1+r)^n - 1; a = 100000(0,03) / (1+0,03)^{25} - 1 \rightarrow a = 2742,79 \$$$

37. Hallar el precio de compra de un bono de 1000\$ que paga dividendos semestrales al 4,5%, es redimible a la par dentro de 8 años y el comprador desea que la inversión le produzca un interés de 2,5% semestral.

$$C = C(1+r)^{-n}; C = 1000(1,025)^{-16} = 673,62 \rightarrow (2,5\%) \quad 1 \text{ bono produce}$$

$$1000(0,0225) = 22,5 \$ \rightarrow (2,5\%); P = 22,5 \frac{1 - (1+0,025)^{-16}}{0,025}; P = 293,74 \$$$

precio de compra  $C + P = 967,36 \$$

38. Hallar el precio de compra de 20 bonos de 100\$ que son redimibles a 104\$ dentro de 11 años. Los dividendos son pagados semestralmente al 5% y el inversionista se propone sacar un interés al 6% anual.

$$20(104) = 2080 \$ \quad C = 2080(1+0,03)^{-11}; C = 1085,54$$

Los 20 bonos producen semestralmente  $20(100)(0,025) = 50$

$$P = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}; P = 50 \frac{1 - (1,03)^{-22}}{0,03} \rightarrow P = 796,85 \quad C + P = 1882,39 \$$$

39. Si se capitaliza al 5% anual, ¿cuánto habrá que pagar para redimir un censo cuya perpetuidad es de 23 \$ semestrales?

$$P = \frac{a}{r} \quad ; \quad P = \frac{23}{0,05} \text{ (2) semestral} \longrightarrow P = 920 \$$$

40. Un individuo posee bonos consolidados canadienses que le producen una renta anual perpetua de 225 \$. Capitalizado al 3%, ¿cuál es el valor de dichos bonos?

$$P = \frac{225}{0,03} \longrightarrow P = 7500 \$$$


---



## CAPITULO 20

## COMBINATORIA. PROBABILIDADES.

## Ejercicio 199

1. Formar todas las permutaciones posibles con las tres letras X, Y, Z.

$XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX$

2. Formar todas las permutaciones que pueden hacerse con las letras A, B, C, D.

ABCD ABDC ACBD ACDB ADBC ADCB

BACD BADC BCAD BCDA BDAC BDC A

CABD CADB CBAD CBDA CDAB CDBA

DABC DACB DBAC DBCA DCAB DCBA

$$\Rightarrow 4! = 24$$

3. Formar todas las permutaciones que pueden hacerse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5

12345 12354 12534 12543 15234 15243 12435 12453

15324 15342 15423 15432 13245 13254 13524 13542

13425 13452 14235 14253 14523 14532 14325 14352

Resolviendo con todos los números  $\Rightarrow 120$  permutaciones

4. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con 7 objetos?

$$P_7 = 7! \rightarrow 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

5. ¿Cuántas señales se pueden hacer con 4 banderas de diferentes colores si cada señal se hace con las 4 banderas dispuestas en cierto orden?

$$P_4 = 4! \rightarrow 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

6. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de la palabra MÉXICO?

$$\text{Como son 6 letras} \rightarrow 6! = 6 \cdot 5 \cdot P_4 = 720$$

7. Calcular el número de permutaciones que pueden hacerse con 10 objetos.

$$P_{10} = 10! \rightarrow 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot P_7 = 3\,628\,800$$

8. ¿De cuántas maneras se pueden disponer los jugadores de un equipo de fútbol (11 jugadores)?

$$P_{11} = 11! \rightarrow 11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11 \cdot P_{10} = 39\,916\,800$$

9. ¿De cuántas maneras se pueden disponer los jugadores de un equipo de baseball (9 jugadores)? ¿De cuántas maneras si el "pitcher" es siempre el mismo?

$$a. \quad P_9 = 9 \cdot 8 \cdot P_7 = 72(5040) = 362\,880$$

$$b. \quad P_8 = 8 \cdot P_7 = 8(5040) = 40\,320$$

10. ¿De cuántas maneras se pueden intercambiar las gomas de un automóvil (incluyendo la de repuesto)?

$$P_5 = 5 \cdot P_4 = 5(24) = 120$$

11. Una persona invita 6 amigos a una comida. Si el anfitrión se sienta siempre en la cabecera, ¿de cuántas maneras se pueden disponer los comensales?

- Puesto que el anfitrión ocupa siempre el mismo puesto solo quedan 5  $\rightarrow P_5 = 120$
12. Demostrar que el número de permutaciones que pueden hacerse con las letras de la palabra TABACO es  $6!/2!$   
 Como se repite la letra A dos veces  
 $6!/2 = 720/2 = 360 \rightarrow 6!/2!$  Demostrado
13. Demostrar que el número de permutaciones que pueden hacerse con las letras de la palabra AVANZAR es  $7!/3!$  Como se repite la letra A tres veces  
 $P_7 = 5040 \quad P_3 = 6 \rightarrow P_7/P_3 = 1680$
14. ¿Cuántas señales se pueden hacer con 5 banderas de las cuales hay 3 rojas y 2 verdes, si cada señal se hace con las 5 banderas? Total 5 banderas = 3 rojas; 2 verdes  
 $P_5/P_3P_2 = 5!/3!2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 / 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 10$

### Ejercicio 200

- Formar las variaciones binarias de las tres letras X, Y, Z.  
 $XY \quad XZ \quad YZ \quad YX \quad ZX \quad ZY \quad V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$
- Formar las variaciones ternarias de las cuatro cifras 1, 2, 3, 4.  $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$   
 $123 \quad 124 \quad 132 \quad 134 \quad 142 \quad 143 \quad 312 \quad 314 \quad 321 \quad 324 \quad 341 \quad 342$   
 $213 \quad 214 \quad 231 \quad 234 \quad 241 \quad 243 \quad 412 \quad 413 \quad 421 \quad 423 \quad 431 \quad 432$
- Formar las variaciones de cinco objetos tomados dos a dos.  
 $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$
- Calcular el número de variaciones de seis objetos tomados tres a tres.  
 $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- Calcular el número de variaciones de diez objetos tomados cuatro a cuatro.  
 $V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
- Hay 12 aviones sirviendo la ruta aérea Caracas - Buenos Aires. ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje tomando al regreso un avión distinto al de ida?  
 Como se toman dos aviones uno de ida y otro de regreso  $\rightarrow V_{12,2} = 12 \cdot 11 = 132$
- ¿De cuántas maneras se pueden cubrir las posiciones de presidente, secretario y tesorero de un club, si hay 10 socios elegibles?  
 $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
- ¿De cuántas maneras se puede sentar 4 personas en 6 asientos?  
 $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- Calcular el número de señales que se pueden hacer con 10 banderas pudiendo izarse cada vez 2 ó 3 banderas.  $V_{10,2} + V_{10,3} = 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 \cdot 8 = 90 + 720 = 810$
- Con 20 letras, ¿cuántas siglas de 4 letras pueden formarse?  $V_{20,4} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$

11. Hallar el valor de  $n$  para el cual  $V_{n,6} = 3 V_{n,5}$ .  
 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 3n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ ;  $n-5 = 3 \rightarrow n = 8$
12. Hallar el valor de  $n$  para el cual  $V_{n,5} = 6 V_{n,3}$ .  
 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6n(n-1)(n-2)$ ;  $(n-3)(n-4) = 6$ ;  $n^2 - 7n + 6 = 0$ ;  
 $(n-6)(n-1) = 0 \rightarrow n_1 = 6$  y  $n_2 = 1$  No satisface  $\rightarrow n = 6$
13. Hallar el valor de  $p$  para el cual  $V_{8,p} = 2 V_{7,p}$ .  
 $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (8-p+1) = 2[7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (7-p+1)]$ ;  $8 = 2(8-p)$ ;  $8 = 16 - 2p \rightarrow p = 4$
14. Hallar el valor de  $p$  para el cual  $V_{12,p} = 2 V_{11,p}$ .  
 $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (12-p+1) = 2[11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (11-p+1)]$ ;  $12 = 2(12-p) \rightarrow p = 6$
15. Demostrar que la Fórmula que expresa el número de variaciones de orden  $p$  de  $n$  objetos se puede expresar de la manera siguiente:  $V_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$   
 $V_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) = n!/(n-p)!$

### Ejercicio 201

1. Formar las combinaciones binarias de las tres letras X, Y, Z.  
 XY    XZ    YZ
2. Formar las combinaciones ternarias de las cinco cifras 1, 2, 3, 4, 5.  
 123    124    125    134    135    145    234    235    245    345
3. Formar las combinaciones cuaternarias de las letras A, B, C, D, E, F.  
 ABCD    ABCE    ABCE    ABDE    ABDF    ABFE    ACDE    ACDF    ACEF    ADEF  
 BCDE    BCDE    BCEF    BDEF    CDEF
4. Calcular el número de combinaciones ternarias de 6 objetos.  
 $C_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20$
5. Calcular el número de combinaciones de 8 objetos tomados cinco a cinco.  
 $C_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 / 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 56$
6. Calcular el número de combinaciones de 10 objetos tomados cuatro a cuatro.  
 $C_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 210$
7. ¿Cuántas manos diferentes de 8 cartas se pueden dar con una baraja de 40 cartas?  
 $C_{40,8} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 / 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 76\ 904\ 685$
8. Si hay 12 personas elegibles, ¿de cuántas maneras se puede formar un comité de 5 personas?  
 $C_{12,5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 / 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 792$
9. Si hay 9 personas elegibles, ¿de cuántas maneras se puede formar un comité de 4 personas, si una de las personas ha de formar siempre parte del comité?  
 Como una siempre forma parte entonces quedan 8 para ser elegidas, como debe ser el comité de 4 personas y siempre va estar una en toda entonces quedan 3:  $C_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 56$

10. En una liga de 8 clubes de pelota, ¿cuántos encuentros se efectuarán si cada equipo juega 3 con cada uno de los restantes? En cada encuentro entran 2 equipos

$$C_{8,2} = 8 \cdot 7 / 2 \cdot 1 = 28 \quad \text{Cada uno juega 3 torneos}$$

$$C_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 56 \implies C_T = C_{8,2} + C_{8,3} ; C_T = 28 + 56 = 84$$

11. Hallar el número de rectas de unión de 6 puntos de un plano, tres de los cuales nunca están en línea recta. Como 3 puntos no están en línea recta entonces dos sí pueden estar:

$$C_{6,2} = 6 \cdot 5 / 2 \cdot 1 = 15$$

12. ¿Cuántos triángulos quedan determinados por 10 puntos, tres de los cuales nunca están en línea recta?

$$C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

13. Se desea formar un comité de 3 damas y 3 caballeros y hay elegibles 7 damas y 10 caballeros. ¿De cuántas maneras puede formarse el comité?

$$C_{7,3} \cdot C_{10,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4200$$

14. Hallar  $n$  sabiendo que  $C_{n,8} = C_{n,7}$ .

$$\frac{n!}{8!(n-8)!} = \frac{n!}{7!(n-7)!} \quad \text{suprimiendo factoriales ;} \quad 8(n-8) = 7(n-7)$$

$$8n - 64 = 7n - 49 \implies n = 15$$

15. Hallar  $n$  sabiendo que  $3C_{n,5} = C_{n,6}$ .

$$3 \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n!}{6!(n-6)!} ; \frac{3}{n-5} = \frac{1}{6} ; 18 = n-5 \implies n = 23$$

## Ejercicio 202

Calcular las probabilidades siguientes:

- De sacar 3 con un dado.  $p = \frac{m}{n} \frac{(\text{Casos favorables})}{(\text{Casos posibles})}$  ;  $p = \frac{1}{6}$   $m=1$   
 $n=6$
- De sacar el 2 ó el 3 con un dado.  $m=2$ ,  $n=6 \implies p = 2/6$ ,  $p = 1/3$
- De sacar la suma 7 con dos dados.  $m=2$ ,  $n=12 \implies p = 2/12 = 1/6$
- De sacar un rey de un paquete de 52 cartas.  $m=4$ ,  $n=52 \implies p = 4/52 = 1/13$
- De una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 3 negras se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) la bola sea roja; b) la bola sea blanca; c) la bola sea roja o blanca?  
 $n = 4 + 5 + 3 = 12$  a.-  $m=4 \implies p = 4/12$ ;  $p = 1/3$  b.-  $m=5 \implies p = 5/12$   
c.-  $m=9 \implies p = 9/12$ ;  $p = 3/4$
- De una urna que contiene 6 bolas rojas, 9 blancas y 5 negras se extrae una bola. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea negra. Hallar la probabilidad de que sea negra o blanca.  
 $n = 6 + 9 + 5 = 20$  a.-  $m=5 \implies p = 5/20$ ;  $p = 1/4$  b.-  $m = 9 + 5 = 14 \implies p = 14/20$ ;  $p = 7/10$

7. Hallar la probabilidad de obtener una suma igual a 13 tirando 3 dados simultáneamente.

$n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$  casos posibles      Realizando los casos favorables se obtiene

Suma 13    166   616   661   355   535   553   445   454   544

346   364   436   463   634   643

256   265   526   562   625   652

Suma 13    166   355   445   346   256

Casos favorables    3    3    3    6    6/21

Total 21 ;  $m = 21$  ;  $p = 21/216 \rightarrow 7/72$

8. Calculando las probabilidades correspondientes demostrar que es más probable obtener una suma igual a 11 con 3 dados que una suma igual a 12.

Suma 11    146   236   335   443   551   245    Suma 12    156   246   345   444   336   552

Casos favorables    6    6    3    3    3    6 / 27    Casos favorables    6    6    6    1    3    3 / 25

$P = 27/216 \rightarrow P = 1/8$

$P = 25/216$

9. Una urna contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Se sacan a la suerte 3 bolas simultáneamente, ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean blancas?

Casos posibles  $C_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 220 \Rightarrow p = \frac{C_{5,3}}{C_{12,3}} ; p = \frac{10}{220} ; p = \frac{1}{22}$

Casos favorables  $C_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10$

10. De un grupo de 6 mujeres y 8 hombres se elige a la suerte un comité de 3 personas. Hallar la probabilidad de que el comité consista: a) de 3 mujeres; b) de 3 hombres; c) de 2 mujeres y 1 hombre.

Casos posibles  $C_{14,3} = 14 \cdot 13 \cdot 12 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 364$

a.- Casos favorables  $C_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \rightarrow P = C_{6,3} / C_{14,3} = 20/364 = 5/91$

b.- Casos favorables  $C_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 / 3 \cdot 2 \cdot 1 = 56 \rightarrow P = C_{8,3} / C_{14,3} = 56/364 = 2/13$

c.- Casos favorables  $C_{6,2} \times C_{8,1} ; 6 \cdot 5 / 2 \cdot 1 \times 8 / 1 = 120 \rightarrow P = C_{6,2} \times C_{8,1} / C_{14,3} = 120/364 = 30/91$

### Ejercicio 203

1. De acuerdo con el censo de 1953 la población de Cuba en esa fecha era de 5 829 029 habitantes, de los cuales 16 657 eran asiáticos. Hallar la frecuencia relativa de asiáticos en la población cubana.

$fr = f/n ; fr = 16\,657/5\,829\,029 \rightarrow fr = 0,0028$

2. Según la tabla de mortalidad, de 100 000 personas a la edad de 10 años llegan 69 804 a los 50. ¿Cuál es la probabilidad de que un niño de 10 años llegue a los 50 años?

$P = 69\,804/100\,000 \rightarrow P = 0,69804$

3. Suponiendo que de cada 1000 predicciones de un observatorio, 900 son correctas, ¿cuál es la probabilidad de que no llueva mañana si el observatorio dice que lloverá?

900 son correctas de que lloverá  $\rightarrow$  quedan 100 de las cuales la probabilidad es:  $P = 100/1000 \rightarrow P = 0,1$

4. Utilizando la tabla de mortalidad determinar aproximadamente la probabilidad de que una persona de 80 años viva al menos un año más.

80 años  $\rightarrow 14\,474$  ; 81 años  $\rightarrow 12\,383$  ;  $P = 12\,383/14\,474 \rightarrow P = 0,856$

5. Determinar aproximadamente la probabilidad de que una persona de 60 años viva hasta los 80 años.  
 60 años  $\rightarrow$  57 917 ; 80 años  $\rightarrow$  14 474 ;  $P = 14\,474/57\,917$  ;  $P = 0,249 \approx 0,25$
6. Calcular aproximadamente la probabilidad de que una persona de 20 años viva hasta los 40 pero muera antes de los 45 años. Viven de 20 años  $\rightarrow$  92 637 ; 40 años  $\rightarrow$  78 106 ; 45 años  $\rightarrow$  74 173  
 probabilidad para vivir hasta 40 años  $78\,106/92\,637$  ; Probabilidad de morir antes de 45 años  
 probabilidad para 45 años  $74\,173/92\,637$   $P = 78\,106/92\,637 - 74\,173/92\,637 = 0,042$
7. ¿ Cuántas veces aproximadamente saldrá el 2 tirando un dado (bueno) 300 veces ?  
 $n = f/p$  ;  $n = 300/6 \rightarrow n = 50$
8. Según el censo de Cuba de 1953, el número de analfabetos por provincias era el siguiente:
- | PROVINCIA               | Pinar del Río                    | Habana        | Matanzas      | Las Villas    | Camagüey      | Oriente       |
|-------------------------|----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| POBLACIÓN (7 de 9 años) | 322 249                          | 1 264 666     | 300 981       | 777 103       | 465 741       | 1 245 879     |
| ANALFABETOS             | 99 377                           | 116 269       | 57 770        | 192 850       | 127 007       | 439 576       |
|                         | $P_1 = 99\,377/322\,249 = 0,308$ | $P_2 = 0,092$ | $P_3 = 0,192$ | $P_4 = 0,248$ | $P_5 = 0,273$ | $P_6 = 0,353$ |
9. Cierta año, sobre 500 000 automóviles registrados en el Brasil, 3 300 fueron objeto de robo. Si una compañía tiene asegurados 75 000 automóviles, ¿ cuántos robos pueden corresponderle en un año?  
 El número de robos será :  $75\,000/500\,000 \times 3\,300 = 495$
10. En una fábrica de piezas se encontró que en 40 000 piezas hechas, 180 salieron defectuosas. Las piezas defectuosas no aparecieron en series sino distribuidas al azar. ¿ Cuántas piezas defectuosas cabe esperar entre las 2 000 primeras piezas fabricadas al año siguiente ?  
 Número de piezas defectuosas :  $180/40\,000 \times 2\,000 = 9$

### Ejercicio 204

1. Una publicación con 100 000 suscriptores reparte mensualmente entre ellos un premio de 20 000 \$. ¿ Cuál es la esperanza matemática de cada suscriptor ?  
 $A = 20\,000 \$$  ;  $P = 1/100\,000 = 0,00001$   
 $AP = ?$   $AP = 20\,000 \times 1/100\,000 \rightarrow AP = 0,20 \$$
2. La probabilidad de que A muera dentro de un año es 0,15. Si muere A, B recibirá 5 000 \$. ¿ Cuál es el valor de la esperanza matemática de B ?  
 $AP = 5\,000 \times 0,15 = 750 \$$
3. Una caja contiene 100 sobres, de los cuales 40 contienen billetes de 5 \$. Si A saca un sobre a suerte, ¿ cuál es el valor de su esperanza matemática ?  
 $A = 5 \$$  ;  $P = 40/100 \Rightarrow AP = 5 \times 40/100$  ;  $AP = 2 \$$

### Ejercicio 205

- Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?  
 a.-  $P = (4+5)/15 = 3/5$     b.- de ser blanca es  $5/15 = 1/3$   
 de que no sea blanca es  $1 - 1/3 = 2/3$
- En un juego en que solamente una persona puede ganar, la probabilidad de ganar A es  $1/4$  y la probabilidad de ganar B es  $2/5$ . ¿Cuál es la probabilidad de que A o B ganen el juego?  
 $A \rightarrow 1/4$  ;  $B \rightarrow 2/5$      $P = 1/4 + 2/5 = 13/20$
- En un cierto conjunto de números naturales la probabilidad de que uno de ellos sea divisible por 2 es  $1/6$ , la probabilidad de que sea divisible por 5 es  $1/3$  y la probabilidad de que sea divisible por 10 es  $1/12$ . ¿Cuál es la probabilidad de que un número de ese conjunto sea divisible por 2 o 5?  
 $2 \rightarrow 1/3$  ;  $5 \rightarrow 1/6$  ;  $10 \rightarrow 1/12$     para 2 :  $1/3 - 1/12 = 1/4$   
 para 5 :  $1/6 - 1/12 = 1/12$  ;    2 y 5 :  $1/4 + 1/12 = 1/3$   
 para 2 o 5  $(1 - \frac{1}{3})^2 = 4/9$
- Una caja contiene 6 bolas blancas y 9 rojas. Al mismo tiempo se extraen dos bolas. ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas o las dos sean rojas?  
 $P_1 = 6_2 / 15_2$  ;  $P_1 = 1/7$  para dos bolas blancas  $\Rightarrow P = P_1 + P_2$   
 $P_2 = 9_2 / 15_2$  ;  $P_2 = 12/35$  para dos bolas rojas  $\Rightarrow P = 1/7 + 12/35 \Rightarrow P = 17/35$
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar sota, caballo o rey de un paquete de 48 cartas?  
 Como son 4 cartas sean; sota, caballo o rey  $\Rightarrow$   
 $P = 1/4$
- En el juego de la ruleta un jugador hace una puesta a los números pares y otra a los múltiplos de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?  
 pares = 18  $\rightarrow A$  ; múltiplos de 3 = 12  $\rightarrow B$  ; pares y múltiplos = 6  $\rightarrow AB$   
 La ruleta tiene 37 números incluido el cero  
 $P_A = 18/37$  ;  $P_B = 12/37$  ;  $P_{AB} = 6/37 \Rightarrow P_{A+B} = P_A + P_B - P_{AB}$  ;  
 $P_{AB} = 18/37 + 12/37 - 6/37 = 24/37$
- La probabilidad de que un hombre viva 20 años es  $1/4$  y la de que su mujer viva 20 años es  $1/3$ . Hallar la probabilidad de que: a) ambos vivan 20 años; b) de que el hombre viva 20 años y su mujer no; c) de que ambos mueran antes de los 20 años.  
 hombre  $P_1 = 1/4$  ; mujer  $P_2 = 1/3$     a.-  $P = P_1 P_2$  ;  $P = (1/4)(1/3)$  ;  $P = 1/12$   
 b.- probabilidad del hombre es  $1/4$   
 probabilidad de que no viva la mujer es  $1 - 1/3 = 2/3$   
 Luego la probabilidad de que viva solamente el hombre es :  $1/4(2/3) = 1/6$
- Hallar la probabilidad de sacar dos veces una bola blanca de una urna que contiene 4 bolas blancas y 6 negras, suponiendo: a) que la primera bola se reintegra a la urna antes de la segunda extracción, b) que la primera bola no se reintegra.  
 a.-  $P = (4/10)^2 \Rightarrow P = 4/25$     b.-  $P_1 = 4/10 = 2/5$  ;  $P_2 = 3/9 = 1/3 \Rightarrow P = 2/5(1/3) = 2/15$

9. Si se extraen sucesivamente 3 cartas de un paquete de 52 cartas, hallar la probabilidad de sacar un rey, una reina y un as (en ese orden).

$$P = 4 \cdot 4 \cdot 4 / 52 \cdot 51 \cdot 50 ; P = 8 / 16575 \quad \text{si se sacaran al azar sería } P = 4 \cdot 4 \cdot 4 / C_{52,3} = 16 / 5525$$

10. Un saco contiene 10 bolas blancas y 5 rojas. Se hacen dos extracciones de dos bolas cada una, restando las bolas de la primera extracción antes de hacer la segunda. Hallar la probabilidad de que en la primera extracción salgan 2 bolas blancas y en la segunda 2 bolas rojas.

Total 15 de 15: se pueden seleccionar  $C_{15,2}$   $P = C_{10,2} \cdot C_{5,2} / C_{15,2} \cdot C_{15,2}$

10 blancas de 10: se pueden seleccionar  $C_{10,2}$   $P = \frac{10 \cdot 9 / 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 / 2 \cdot 1}{15 \cdot 14 / 2 \cdot 1 \times 15 \cdot 14 / 2 \cdot 1} = \frac{2}{49}$

5 rojas de 5: se pueden seleccionar  $C_{5,2}$

11. A tiene 50 años de edad y su probabilidad de llegar a los 68 años es  $5/13$ . B tiene 60 años y su probabilidad de llegar a los 78 años es  $1/4$ . ¿Cuales es la probabilidad de que al menos uno de ellos esté vivo de aquí a 18 años?

La probabilidad de que hayan muerto los dos es:  $(1 - 5/13)(1 - 1/4) = 6/13$

Luego la probabilidad de que viva por lo menos uno de ellos es:  $1 - 6/13 = 7/13$

12. Tres amigos A, B y C salen de cacería. Como promedio A mata dos pájaros de cada tres, B tres de cada cinco y C uno de cada dos. Si los tres disparan al mismo tiempo a una pieza, ¿cuál es la probabilidad de que la maten?

$$P = 1 - (1 - 2/3)(1 - 3/5)(1 - 1/2) ; P = 1 - 1/3 \cdot 2/5 \cdot 1/2 \rightarrow P = 14/15$$

13. ¿Cuál es la probabilidad de tirar 5 con un dado al menos una vez en cuatro ensayos?

$$P = 1/6 ; q = 5/6 \quad P^n + C_{n,1} P^{n-1} q + C_{n,2} P^{n-2} q^2 + \dots + C_{n,k} P^k q^{n-k}$$

$$n=4 ; k=1 \quad (1/6)^4 + C_{4,1} (1/6)^3 (5/6) + C_{4,2} (1/6)^2 (5/6)^2 + C_{4,3} (1/6) (5/6)^3 = 671/1296$$

14. ¿En cuántas tiradas con dos dados hay una probabilidad igual a  $1/2$  de que el doble 6 aparezca al menos una vez? (Problema de Pascal).

15. Dos urnas iguales contienen 10 y 12 bolas respectivamente. La primera urna contiene 3 bolas blancas, y la segunda, 5 bolas blancas. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca?

La probabilidad de sacar una bola de la 1ª es  $1/2$

la probabilidad de sacar una blanca es  $3/10$

→ la probabilidad será  $1/2 (3/10)$  y así para la 2ª.

$$1/2 \cdot 3/10 + 1/2 \cdot 5/12 = 43/120$$

16. Un dado se tira dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo número sea > que el 1º?

$$1/6 \cdot 5/6 + 1/6 \cdot 4/6 + 1/6 \cdot 3/6 + 1/6 \cdot 2/6 + 1/6 \cdot 1/6 = 5/12$$

(probabilidad de que el 1º número sea 1 y el 2º > que 1, más la probabilidad de que el 1º sea 2 y el 2º mayor que 2, etc.).



17. Si A tira tres monedas y B tira dos, ¿cuál es la probabilidad de que A obtenga mayor número de "caras" que B?

$$1/2 (3/5) + 1/2 (2/5) = 1/2$$

18. Hallar la probabilidad de hacer blanco en un barco con 4 torpedos, cada uno de los cuales tiene probabilidad  $1/4$  de dar en el blanco.

$$1 - (4/3)^4 = 175/256$$

19. Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 negras y otra contiene 7 bolas blancas y 2 negras. Se escoge, al azar, una bola de la primera urna y se coloca en la segunda (sin mirar su color) y se saca entonces una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

$$3/8 \cdot 8/10 + 5/8 \cdot 7/10 = 59/80$$

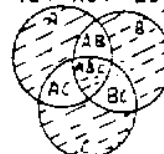
20. Utilizando la fórmula (3) del § 23.3, demostrar que:  $P_{A+B+C} = P_A + P_B + P_C - (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC}) + P_{ABC}$ .

$$\text{Fórmula: } \begin{cases} P_{A+B} = P_A + P_B - P_{AB} \\ P_{A+C} = P_A + P_C - P_{AC} \\ P_{B+C} = P_B + P_C - P_{BC} \end{cases}$$

Sumandose obtiene:  $P_{ABC} = P_{ABC}$

Al sumar las frecuencias se están contando dos veces por lo que es

preciso descontar.  $P_{A+B+C} = P_A + P_B + P_C - (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC}) + P_{ABC}$



### Ejercicio 206

1. Un dado se tira 4 veces. ¿Cuáles es la probabilidad de que el 6 salga exactamente 2 veces?

$$C_{n,k} p^k q^{n-k} = C_{4,2} (1/6)^2 (5/6)^{4-2} = 25/216 \quad \text{para que salga } 1/6 \Rightarrow \text{no salga } 5/6$$

2. Una moneda se tira 5 veces. ¿Cuáles es la probabilidad de que salga cara exactamente 3 veces?

$$\text{salga } 1/2; \text{ No salga } 1/2 \quad C_{5,3} (1/2)^3 (1/2)^{5-3} = 5/16$$

3. Un cazador hace en promedio 4 blancos en 5 disparos. ¿Cuáles es la probabilidad de que haga exactamente 9 blancos en 10 disparos? ¿Al menos 8 blancos en 10 disparos?

$$a.- C_{n,k} p^k q^{n-k} : n=10; k=9; p=4/5; q=1-4/5=1/5$$

$$C_{10,9} (4/5)^9 (1/5)^1 = 2(4/5)^9 \approx 0,2684$$

$$b.- n=10; k=8; p=4/5; q=1/5; n-k+1=3 : P = C_{n,1} p^{n-1} q + C_{n,2} p^{n-2} q^2 + \dots + C_{n,k} p^k q^{n-k}$$

$$(4/5)^0 + C_{10,1} (4/5)^9 (1/5) + C_{10,2} (4/5)^8 (1/5)^2 = 6619136/9765625 = 0,6778$$

4. Hallar la probabilidad de obtener "dobles" al menos 2 veces en 4 tiros con dos dados.

probabilidad de sacar en 2:  $p = 1/3$ ; maneras de obtener 2 es 1,1; 2,2  $\Rightarrow q = 1/3$

$$(1/2)^4 + 4(1/2)^3(1/3) + 6(1/2)^2(1/3)^2 = 19/48$$

$$P = 19/48(1/3) = 19/144 \text{ por ser dos dados}$$

5. Dos esposos tienen ojos negros, pero la madre de cada uno de ellos es de ojos azules. Se sabe que la probabilidad de que uno cualquiera de sus hijos tengan ojos negros es  $3/4$  y de que tenga ojos azules es  $1/4$ . Si el matrimonio tiene tres niños, ¿cuáles es la probabilidad de que dos de ellos tengan ojos negros y uno tenga ojos azules? ¿Cuál es la probabilidad de que los tres tengan ojos azules?

$$a.- p=3/4; q=1/4; n=3; K=2 : C_{3,2} (3/4)^3 (1/4) = 27/64$$

$$b.- C_{3,3} (3/4)^3 (1/4) = 9/64$$

## Ejercicio 207

1. Calcular el valor actual de una renta vitalicia de 1000 \$ anuales para una persona de 40 años.

$$Q_x = N_x + 1 / D_x \text{ para } 1\$ ; X=40 : Q_{40} = N_{40} / D_{40} ; Q_{40} = 324440 / 19727,4 = 16,446161$$

Para 1000 \$ es  $16,446161 (1000) = 16446,16 \$$

2. Calcular el valor actual de una renta vitalicia de 800 \$ anuales para una persona de 60 años.

$$\text{Para } 1\$ : Q_{60} = N_{60} / D_{60} ; Q_{60} = 73754,7 / 7351,65 = 10,032401$$

para 800 \$ es :  $10,032401 (800) = 8025,92$

3. Hallar la prima neta para un seguro de vida por 25 años por valor de 3000 \$ para una persona de 45 años.

$$nAx = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \text{ para } 1\$ : 25A_{45} = \frac{M_{45} - M_{70}}{D_{45}} = \frac{7192,81 - 2592,54}{15773,6} = 0,2916436$$

$$\text{Para } 3000\$ \text{ es : } 0,2916436 (3000) = 874,93 \$$$

4. ¿Cuáles es la prima neta para un seguro de vida de 2000 \$ por 10 años para una persona de 25 años?

$$10A_{25} = (M_{25} - M_{35}) / D_{25} = (11631,1 - 9094,96) / 37673,6 = 0,0673187$$

Para 2000 es :  $0,0673187 (2000) = 134,64 \$$

5. Hallar la prima neta única que una persona, de 32 años debe pagar para suscribir una póliza ordinaria de vida por valor de 8000 \$.

$$Ax = M_x / D_x ; A_{32} = M_{32} / D_{32} ; A_{32} = 9771,37 / 27937,5 = 0,3497582$$

Para 8000 \$ es :  $0,3497582 (8000) = 2798,06 \$$

6. Hallar la prima neta anual de una póliza ordinaria de vida de 6000 \$ para una persona de 38 años.

$$Px = M_x / N_x ; P_{38} = M_{38} / N_{38} ; P_{38} = 8475,66 / 386323 = 0,0219393$$

Para 6000 \$ vale :  $0,0219393 (6000) = 131,64 \$$

7. Hallar la prima neta única de un capital de 20000 \$ pagable dentro de 30 años a una persona que en la actualidad tiene 40 años.

$$P_{40} = M_{40} / N_{40} = 8088,91 / 344167 = 0,0235028$$

Para 20000 es :  $0,0235028 (20000) = 470,057$

8. Calcular el valor de la prima neta única que corresponde a un capital diferido de 5000 \$ por 15 años, pagable a una persona que en la actualidad tiene 48 años.

$$nEx = D_{x+n} / D_x ; 15E_{48} = D_{63} / D_{48} = 6071,27 / 13738,5 = 0,4419165$$

para 5000 \$ será :  $0,4419165 (5000) = 2209,58 \$$

9. Hallar la prima neta única que corresponde a una póliza total de 20 años por 6000 \$ sobre la vida de una persona de 27 años.

$$A_{\overline{xx}|n} = nAx + nEx ; A_{\overline{xx}|n} = (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) / D_x ; A_{\overline{17:10}|} = (M_{17} - M_{27} + D_{27}) / D_{17}$$

$$A_{\overline{17:10}|} = (11054.0 - 6854.34 + 14392.1) / 34601.5 = 0.5373108$$

$$\text{Para } 6000\$ \text{ será: } 0.5373108(6000) = 3223.86\$$$

10. Un joven de 25 años hereda una renta vitalicia de 8000\$ anuales. ¿Cuál es el valor actual de la herencia?

$$Q_x = N_{x+1} / D_x ; Q_{25} = N_{26} / D_{25} = 732440 / 37673.6 = 19.441731$$

$$\text{Para } 8000\$ \text{ es: } 19.441731(8000) = 155533.85\$$$

### Ejercicio 208 (REPASO).

1. Formar todas las permutaciones que pueden hacerse con las letras de la palabra ROMA.

ROMA	AROM	MARO	OMAR	ORAM	MROA
ROAM	ARMO	MAOR	OMRA	ORMA	MRAO
RAOM	AMRO	MOAR	OAMR	RMOA	AORM
RAMO	AMOR	MORA	OARM	RMAO	AOMR

2. Calcular el número de permutaciones que se pueden hacer con 8 objetos.

$$P_n = n! ; 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

3. En una carrera del hipódromo entran 9 caballos. ¿De cuántas maneras pueden terminar la carrera suponiendo que no haya empates?

$$P_9 = 9! = 9 \cdot 8! = 9(40320) = 362880$$

4. Formar las variaciones binarias y las ternarias que se pueden hacer con las letras de la palabra AZUL. Variaciones binarias

AZ ZA AL LA ZU UZ AU UA ZL LZ LU UL

Variaciones ternarias: AZU AUZ UAZ UZA AZL ALZ LAZ LZA AUL ALU

LAU LUA ZUL ZLU LZU LUZ ULA UAL ULZ UZL

ZAL ZLA ZAU ZUA

5. Hallar el número de variaciones de 9 objetos tomados cinco a cinco.

$$V_{n,p} = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) ; V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$$

6. ¿Cuántas siglas de 3 letras pueden formarse si hay 10 letras para escoger?

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

7. En los juegos Panamericanos de Waterpolo participan 8 equipos. ¿De cuántas maneras pueden estos equipos ocupar los tres primeros lugares?

$$V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

8. Formar las combinaciones binarias y ternarias que se pueden formar con las letras de la palabra SALMÓN.

SA SL SM SO SN AL AM AO AN LM LO LN MO MN ON Comb. binarias

SAL SAM SAO SAN SLH SLO SLN SMO SMN SON ALM ALO ALN AMO AMN AON

10. Se venden 8000 papeletas a 1\$ para la rifa de una orden de compra de 6000\$. Un individuo compra 10 papeletas. ¿Cuál es su esperanza matemática?

$$Ap = 6000 \cdot 10 / 8000 = 15\$$$

21. Un saco contiene 7 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas o las dos sean negras? ¿Cuál es la probabilidad de que una sea blanca y la otra negra?

a. probabilidad de sacar 2 bolas blancas es:

$$P_1 = C_{7,2} / C_{12,2} = 7/22$$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2$$

$$\text{probabilidad de sacar 2 bolas negras es: } P_2 = C_{5,2} / C_{12,2} = 5/33 \quad P = 7/22 + 5/33 \rightarrow P = 31/66$$

$$b. P = C_{7,1} \times C_{5,1} / C_{12,2} \rightarrow P = 35/66$$

22. En el juego de la ruleta un jugador hace una apuesta a los números impares y otra a los múltiplos de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

Nº Impares 18      Múltiplos de 3 12      repetidos 6

$$P_A = 18/37; P_B = 12/37; P_{A \cap B} = 6/37$$

$$P_{A+B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}; P_{A+B} = 18/37 + 12/37 - 6/37 \rightarrow P_{A+B} = 24/37$$

23. Una urna contiene 10 bolas rojas y 15 bolas blancas. Hallar la probabilidad de sacar dos veces consecutivas una bola roja, suponiendo: a) que la primera bola se reintegra a la urna antes de proceder a la segunda extracción; b) que la primera bola no se reintegra.

$$a. P = (10/25)^2; P = 4/25$$

$$b. 1^\circ \text{ extracción } 10/25 = 2/5$$

$$\text{si no se vuelve a introducir } 9/24 = 3/8 \Rightarrow P = 2/5 (3/8) = 3/20$$

24. La urna A contiene 4 bolas blancas y 6 rojas y la B contiene 7 bolas blancas y 4 rojas. Sin mirar el color, se saca una bola de la urna A y se coloca en la B. Se extrae ahora al azar una bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

$$A: \begin{cases} 4 \text{ bl.} & P = 4/10 \text{ (probabilidad de que una bola sea blanca)} \\ 6 \text{ rojo} & P = 2/5 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} 7 \text{ bl.} & P = 1/10 \text{ (probabilidad de que una sea blanca al ser introducida en la 2da)} \\ 4 \text{ rojo} & P = 2/12 \text{ (probabilidad de haber introducido y extraído de la 2da)} \end{cases}$$

$$P = 1/6 \Rightarrow 2/5 - 1/10 (1/6) = 23/60$$

25. Hallar la probabilidad de sacar exactamente tres veces el 4 en seis tiradas con un dado.

$$n = 6; K = 3; C_{n,K} P^K q^{n-K}; P = 1/6; q = 1 - 1/6 = 5/6$$

$$C_{6,3} (1/6)^3 (5/6)^3 = 625/11664$$

26. Hallar la probabilidad de sacar al menos tres veces el 4 en seis tiradas con un dado.

$$\text{Aplicando } P^n + C_{n,1} P^{n-1} q + C_{n,2} P^{n-2} q^2 + \dots + C_{n,K} P^K q^{n-K}$$

$$P = 1/6; q = 5/6; (1/6)^6 + C_{6,5} (1/6)^5 (5/6) + C_{6,4} (1/6)^4 (5/6)^2 + C_{6,3} (1/6)^3 (5/6)^3 = 2096/6^6$$

27. Suponiendo que la probabilidad de que un recién nacido sea de determinado sexo es 1/2, ¿cuál es la probabilidad de que en una familia de 7 hijos haya 4 niños y 3 niñas?

$$P = 1/2; q = 1/2; n = 7; K = 3 : C_{7,3} (1/2)^3 (1/2)^4 = 35/128$$

28. Determinar el valor actual de una renta vitalicia anual de 500 \$ para una persona de 45 años.

$$Q_x = M_x + 1/D_x; Q_{45} = M_{45}/D_{45}; Q_{45} = 237972/15773,6; Q_{45} = 15,086727$$

para 500 \$ es  $15,086727(500) = 7543,36 \$$

29. Una persona de 42 años compra un seguro de vida a término de 25 años por valor de 10 000 \$. ¿Cuál es el importe de la prima neta?

$$n A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}; 25 A_{42} = \frac{M_{42} - M_{67}}{D_{42}}; 25 A_{42} = \frac{7719,74 - 3218,3}{18052,9}$$

$$25 A_{42} = 0,2493472 \text{ para } 1 \$$$

$$\text{Para } 10000 \$ \text{ sera } 0,2493472(10000) = 2493,47 \$$$

30. Calcular la prima neta anual de una póliza ordinaria de vida por 3000 \$ para una persona de 39 años.

$$P_x = M_x/N_x; P_{39} = M_{39}/N_{39}; P_{39} = 8279,86/364783; P_{39} = 0,022698$$

$$\text{Para } 3000 \$ \text{ es } 0,022698(3000) = 68,09 \$$$

31. Hallar la prima neta única de un capital de 2000 \$ diferido 10 años para una persona de 50 años.

$$n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}; 10 E_{50} = \frac{D_{60}}{D_{50}}; 10 E_{50} = \frac{7351,65}{12498,6} = 0,5881978$$

$$\text{para } 2000 \$ \text{ es } 0,5881978(2000) = 1176,40 \$$$

32. Hallar la prima neta única de una póliza dotal de 15 años por 8000 \$ sobre la vida de una persona de 30 años.

$$A_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}; A_{30:15} = \frac{M_{30} - M_{45} + D_{45}}{D_{30}}$$

$$A_{30:15} = \frac{10259,0 - 7192,81 + 15773,6}{30440,8} = 0,6188993$$

$$\text{para } 8000 \$ \text{ es : } 0,6188993(8000) = 4951,19 \$$$

